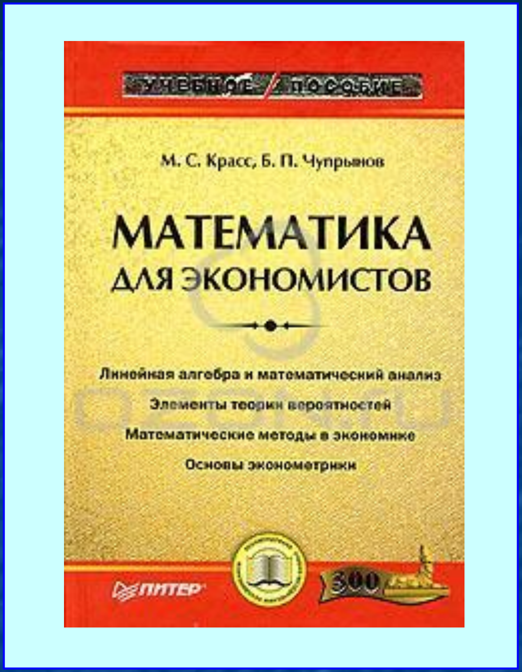
МАТЕМАТИКА 4

Математические методы в экономике

Проф.
ВЕДЕНЯПИН
Евгений Николаевич



Основная литература

Красс М.С., Чупрынов Б.П. «Математика для экономистов», СПб., Питер, 2007

Дополнительная литература

Четыркин Е.М. «Финансовая математика», М., Дело, 2000

1. Анализ рисков

Рассматриваемые вопросы:

- Выбор с помощью дерева решений
- Мера риска
- Основы портфельного анализа
- Выбор оптимального портфеля

1.1. Выбор с помощью дерева решений

Основные понятия методов анализа риска

Любая сфера человеческой деятельности, в особенности, экономика и бизнес, связаны с **принятием решений** в условиях **неполноты информации**.

Многие ситуации требуют принятия решения в результате анализа **последовательности** возможных решений в рыночной обстановке, когда одна совокупность решений лица, принимающего решения (ЛПР), и состояний рынка порождает другое состояние аналогичного типа. В момент такого перехода требуется принятие решения с оценкой возможных последствий.

Позиционные игры

Игры, в которых задается последовательность принятия решений игроками, называются **позиционными играми**.

Число игроков в позиционной игре может варьироваться от двух и более.

Игрок принимает свое решение, уже зная о решении партнера (соперника), т. е. в ответ на его решение.

Примеры позиционных игр двух игроков: шахматы, шашки.

Позиционные игры моделируют поведение фирм в условиях рынка. Потому этот класс игр широко используется в экономике.

Дерево решений

Позиционную игру наглядно представляет **дерево решений** (в общем случае — **граф решений**), приводящее игроков из исходной позиции в конечные.

Дерево решений – это метод, применяемый при многоходовом процессе анализа и осуществления управленческих решений. Ветви дерева изображают события, которые могут иметь место, а узлы и вершины - момент выбора направления действий.

Вершины дерева игры называются **позициями**.

Позиции, непосредственно следующие за некоторой позицией, называются **альтернативами**; позиции, не имеющие альтернатив, называются **окончательными**, а ведущие в них пути — **партиями**.

Часть дерева решений, описывающая игру из некоторой позиции (которая может считаться начальной), называют **подыгрой**.

Пример позиционной игры

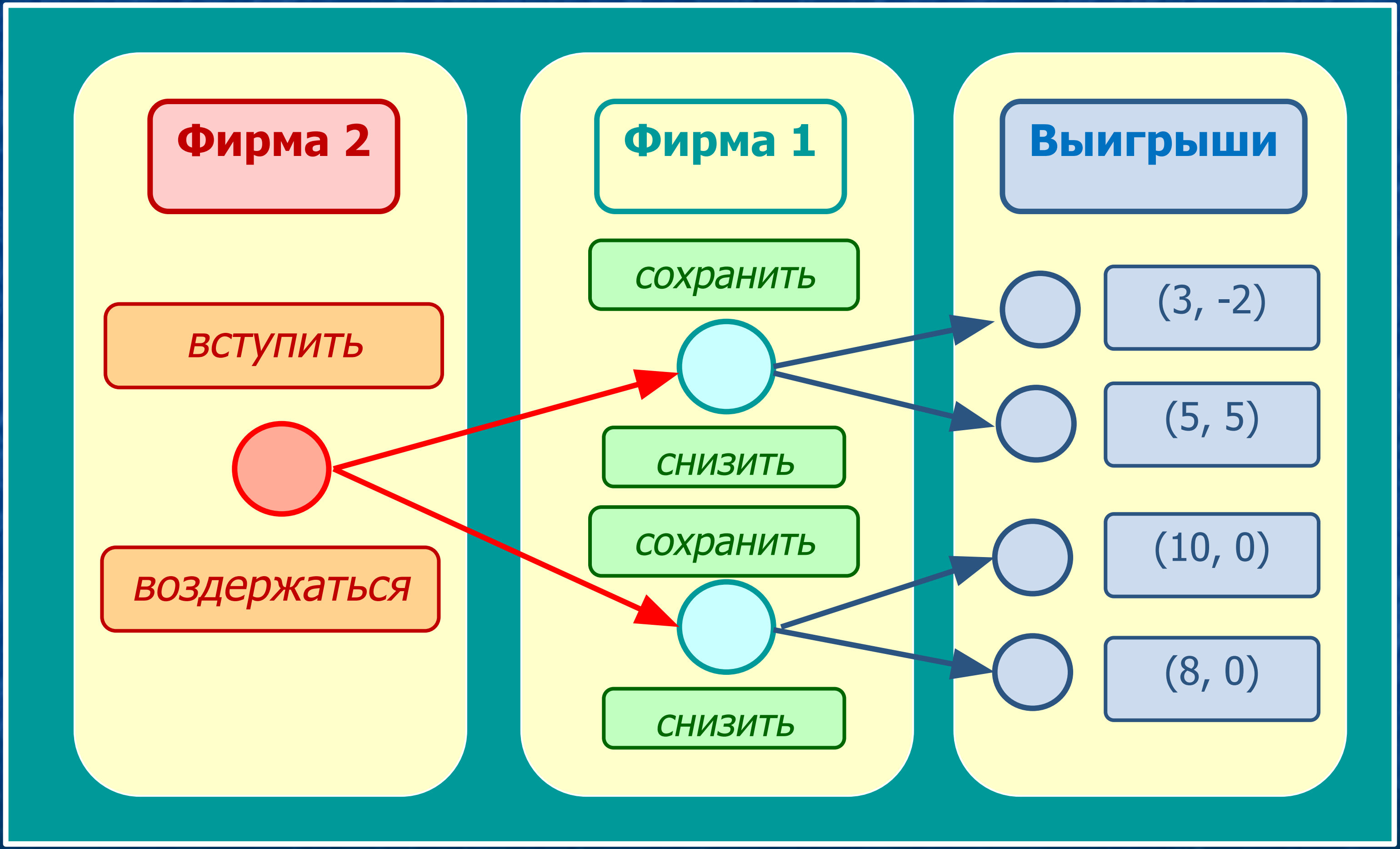
На рынке доминирует производитель — **фирма 1**, и монопольное положение приносит ей прибыль *10 млрд у.е*.

Фирма 2 решает вопрос о внедрении на этот рынок при следующих известных предпосылках.

В случае вступления **фирмы 2** на рынок **фирма 1** может отреагировать двояко: а) снизить объем своего производства и тогда поделить с **фирмой 2** свою прибыль по *5 млрд* на каждого конкурента; б) не уступать в объеме производства — тогда прибыль **фирмы 1** понизится до *3 млрд* вследствие снижения рыночной цены, а **фирма 2** понесет убытки в размере *2 млрд* тоже из-за падения рыночной цены на товар, а также из-за того, что предварительные затраты на проработку рынка и организацию производства не будут компенсированы.

Если же **фирма 2** воздерживается от вступления на рынок, то ее прибыль будет нулевой; в этом случае **за фирмой 1** остаются два варианта поведения: не снижать объем производства с прибылью *10 млрд* и снизить объем производства со снижением прибыли до *8 млрд у.е*.

Дерево решений для игры двух партнеров



Этапы процесса принятия решения

1. Формулировка задачи. Состоит в формализации экономического объекта и выбора основных определяющих факторов. Включает в себя сбор информации, составление перечня возможных событий, которые могут произойти с определенными вероятностями, установление порядка следования событий с информацией об их исходах, установление последовательности возможных действий.

2. Оценка вероятности исхода каждого события.

3. Установление выигрышей и проигрышей для каждой возможной комбинации действий.

4. Построение **дерева решений**.

5. Проведение расчетов и **принятие решения** как движение от вершины дерева решения к его корням с анализом вариантов.

Пример проведения процедуры принятия решения

Администрация компании решает вопрос об инвестировании. Можно инвестировать средства в проект *А*, в проект *Б* или в действующий торговый комплекс (проект *В*). С вероятностями *0.5* инвестиции в проекты *А* и *Б* могут принести выигрыши S_1 и S_2:

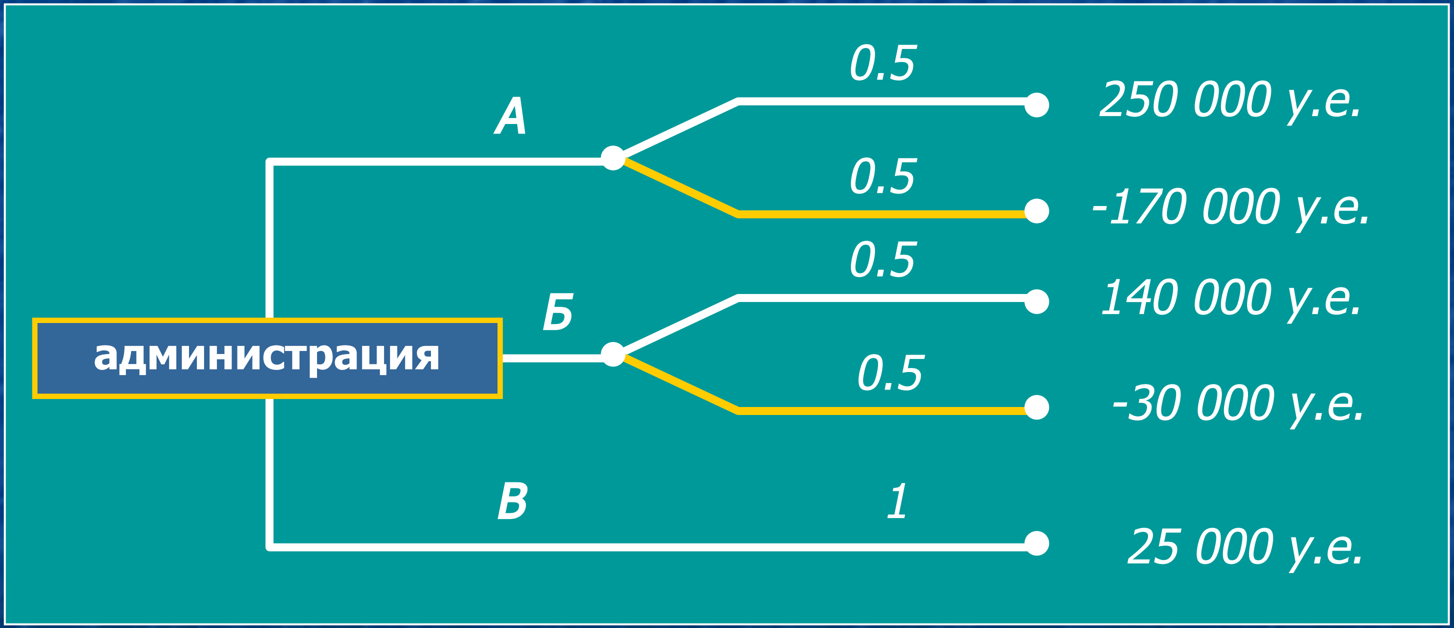
	Выигрыш, у.е.	**Проигрыш, у.е.**
Проект *А*, S_1	*250 000*	*-170 000*
Проект *Б*, S_2	*140 000*	*-30 000*

Инвестирование торгового комплекса (проект *В*) принесет гарантированную прибыль *25 000 у.е*. Найти оптимальное решение.

Пример проведения процедуры принятия решения (продолжение)

Этапы 1-3 выполнены.

Этап 4. Построение дерева решений



Пример проведения процедуры принятия решения (окончание)

Этап 5. Проведение расчетов

Ожидаемая прибыль – это **математическое ожидание** случайной величины

$$Pr\,f = \bar{S} = S_1 p_1 + S_2 p_2$$

$$Pr\,f_A = \bar{S}_A = S_{A1} p_{A1} + S_{A2} p_{A2} = 250.0 \cdot 0.5 + \left(-170.0\right) \cdot 0.5 = 40.0$$

$$Pr\,f_Б = \bar{S}_Б = S_{Б1} p_{Б1} + S_{Б2} p_{Б2} = 140.0 \cdot 0.5 + \left(-30.0\right) \cdot 0.5 = 55.0$$

$$Pr\,f_В = \bar{S}_В = S_{В1} p_{В1} = 25.0 \cdot 1 = 25.0$$

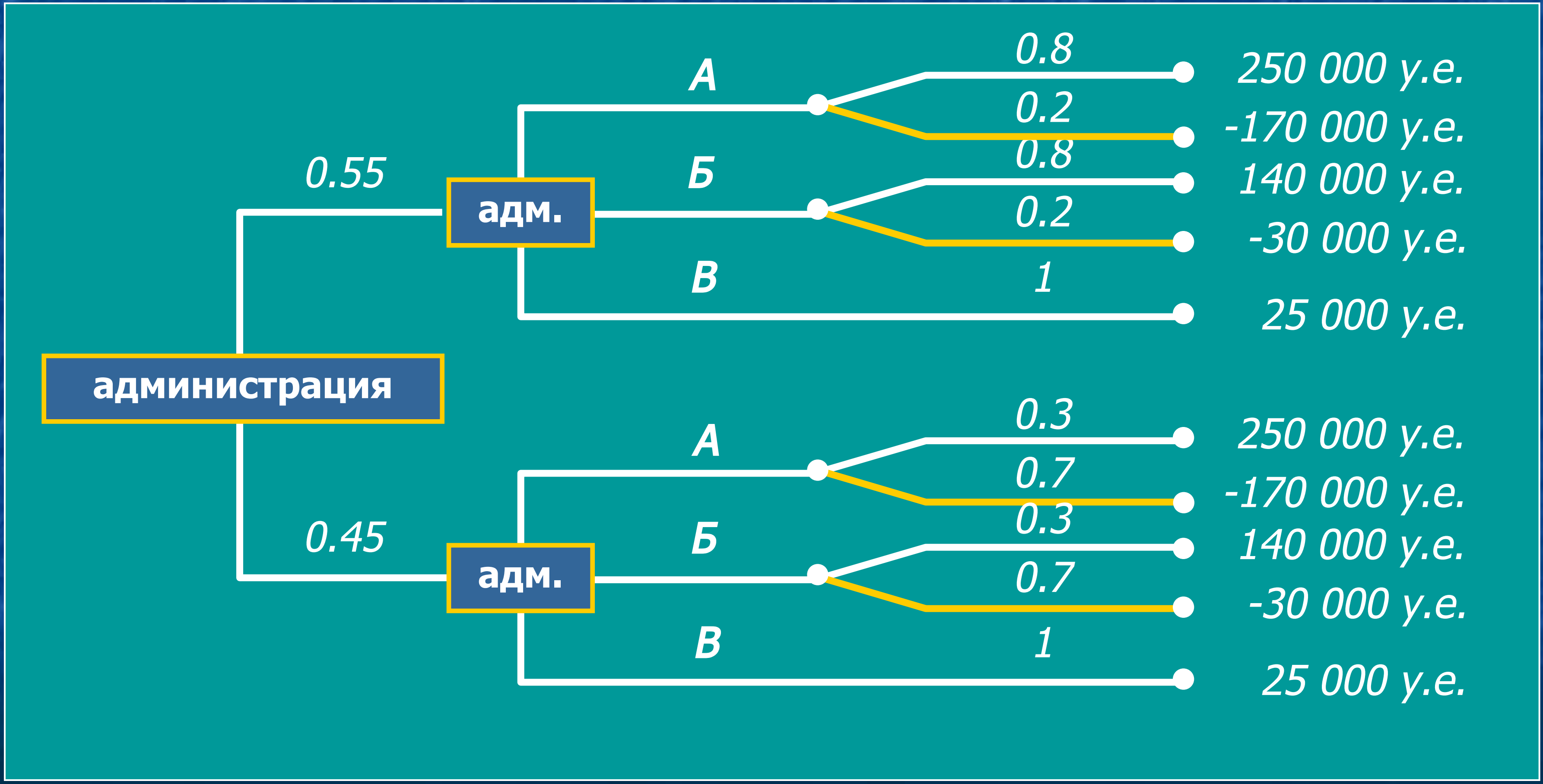
ВЫВОД: Если в качестве критерия выбора решения выбрать величину ожидаемой прибыли, то следует выбрать **проект** *Б*.

Принятие решения при уточнении исходных данных

Администрация компании решила потратить *10 000 у.е.* на уточнение информации (экспертиза, прогноз, конфиденциальные источники). Уточненная информацию заключается в следующем: вероятность благоприятного развития ситуации равна *0.55*, вероятность неблагоприятного развития равна *0.45*. Вероятности выигрышей для проектов *А* и *Б* составят в случае благоприятного развития ($p_1=0.8$, $p_2=0.2$) и в случае неблагоприятного развития – ($p_1=0.3$, $p_2=0.7$). Найти оптимальное решение в этом случае.

Уточнение принятия решения (продолжение)

Этап 4. Построение дерева решений



Уточнение принятия решения (окончание)

$$Pr\ f = \bar{S} = S_1 p_1 + S_2 p_2 - 10.0$$

Благоприятный прогноз

$$Pr\ f_A^1 = \bar{S}_A^1 = S_{A1}^1 p_{A1}^1 + S_{A2}^1 p_{A2}^1 - 10.0 = 250.0 \cdot 0.8 + (-170.0) \cdot 0.2 - 10.0 = 156.0\ \text{ò û ñ. ó.å.}$$

$$Pr\ f_Á^1 = \bar{S}_Á^1 = S_{Á1}^1 p_{Á1}^1 + S_{Á2}^1 p_{Á2}^1 - 10.0 = 140.0 \cdot 0.8 + (-30.0) \cdot 0.2 - 10.0 = 96.0\ \text{ò û ñ. ó.å.}$$

$$Pr\ f_B^1 = \bar{S}_B^1 = S_{B1}^1 p_B^1 - 10.0 = 25.0 \cdot 1 - 10.0 = 15.0\ \text{ò û ñ. ó.å.}$$

Неблагоприятный прогноз

$$Pr\ f_A^2 = \bar{S}_A^2 = S_{A1}^2 p_{A1}^2 + S_{A2}^2 p_{A2}^2 - 10.0 = 250.0 \cdot 0.3 + (-170.0) \cdot 0.7 - 10.0 = -54.0\ \text{ò û ñ. ó.å.}$$

$$Pr\ f_Á^2 = \bar{S}_Á^2 = S_{Á1}^2 p_{Á1}^2 + S_{Á2}^2 p_{Á2}^2 - 10.0 = 140.0 \cdot 0.3 + (-30.0) \cdot 0.7 - 10.0 = 11.0\ \text{ò û ñ. ó.å.}$$

$$Pr\ f_B^2 = \bar{S}_B^2 = S_{B1}^2 p_{B1} - 10.0 = 25.0 \cdot 1 - 10.0 = 15.0\ \text{ò û ñ. ó.å.}$$

ВЫВОД: Если администрация склоняется к тому, что ситуация будет благоприятной, то следует выбрать Проект *A* (*156.0 тыс. руб.*), если же предполагается неблагоприятная ситуация, то следует выбрать Проект *B* (гарантированная прибыль *15.0 тыс. руб.*).

Общая ожидаемая прибыль

$$Pr\ f_0 = S_1 p_1 + S_2 p_2 - 10.0 = 156.0 \cdot 0.55 + 15.0 \cdot 0.45 - 10.0 = 92.55\ \text{ò û ñ. ðóá.}$$

1.2. Мера риска

Риск – это угроза потери действующим финансовым лицом части своих ресурсов, либо появления дополнительных расходов в результате осуществления определенной финансовой политики.

Виды рассматриваемых рисков:

- риски, связанные с конкуренцией;
- риски, связанные с принятием финансовых решений;
- инвестиционные риски, связанные с возможным обесцениванием портфеля ценных бумаг.

Мера риска финансового решения – это среднее квадратическое отклонение σ основного показателя этого решения.

Оценка риска

Замечание 1: На практике для оценки риска используется безразмерная величина риска

$$\frac{\sigma}{\overline{S}}, \%$$

Замечание 2: При одинаковых или сравнимых по величине математических ожиданиях выигрыша выбирают то решение, при котором среднее квадратическое отклонение меньше.

Примечание. Для любого предпринимателя, в том числе и ЛПР, крайне нежелательна ситуация с резкими изменениями этих показателей от их среднего уровня, что означает угрозу утери контроля. Чем меньше стандартное отклонение от среднего значения, тем больше стабильность рыночной обстановки.

Замечание 3: Чем меньше среднее квадратическое отклонение от среднего значения, тем больше стабильность рыночной обстановки.

Пример оценки риска

Фирма производит продукцию с ограниченным сроком годности. Поставка ее производится контейнерами. Затраты на производство и транспортировку продукции в одном контейнере составляет *25.0 тыс. у.е*. Фирма продает каждый контейнер за *55.0 тыс. у.е*. Если в течение срока годности продукция не продается, то она портится и фирма не получает дохода. Вероятности спроса на продукцию в течение срока годности для различного количества контейнеров представлены в таблице.

Количество контейнеров	*5*	*6*	*7*	*8*
Вероятность реализации	*0.1*	*0.4*	*0.3*	*0.2*

Найти оптимальное количество контейнеров, которое нужно производить в течение срока годности.

Пример оценки риска (решение)

Прибыль от каждого проданного контейнера *55.0-25.0=30.0 у.е*.

Убыток от непроданного контейнера *25.0 тыс. у.е.*

Среднее значение ожидаемой прибыли

$$M\left(S\right) = \bar{S} = \sum_{k=1}^{4} p_k S_k$$

Дисперсия

$$D\left(S\right) = M\left(S^2\right) - \bar{S}^2$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D}$$

Прибыль для всех случаев продаж (окончание)

Спрос / Производство	5 *p=0.1*	6 *p=0.4*	7 *p=0.3*	8 *p=0.2*	*S*	*D*	*σ*	*σ/S*
5	*150*	*150*	*150*	*150*	*150*	*0*	*0*	*0*
6	*125*	*180*	*180*	*180*	*174*	*272*	*16.5*	*9.5*
7	*100*	*155*	*210*	*210*	*177*	*1331*	*36.5*	*20.5*
8	*75*	*130*	*185*	*240*	*163*	*2541*	*50.4*	*30.9*

ВЫВОД: Оптимальный выбор состоит в производстве ***6* контейнеров** продукции: средняя ожидаемая прибыль составит *174.0 тыс. у.е.* при стандартном отклонении *9.5%.* Если производство увеличить до *7* контейнеров, то прибыль увеличится незначительно (до *177.0 тыс. у.е.*), зато риск возрастает более чем в *2 раза* (до *20.5%*).

1.3. Основы портфельного анализа

Поскольку ценные бумаги различаются по доходности и надежности, то инвесторы вкладывают средства в приобретение ценных бумаг нескольких видов (формируют **инвестиционный портфель**), стремясь достичь наилучшего соотношения «риск – доходность».

Гарри МАРКОВИЦ (р. 1927)

Линии безразличия

Функция полезности – это функция, зависящая от ожидаемой доходности r_p инвестиционного портфеля и среднего квадратического отклонения σ_p (меры риска)

$$u = u\left(r_p,\ \sigma_p\right)$$

Замечание: Все инвестиционные портфели, лежащие на одной **линии безразличия** (**линии уровня**)

$$u\left(r_p,\ \sigma_p\right) = I\ = const,$$

являются равноценными с точки зрения инвестора.

Критерий выбора портфеля

ВЫВОД: Любой портфель, лежащий на линии безразличия выше и левее, является более привлекательным, чем портфель, лежащий на линии безразличия, которая ниже и правее.

Ожидаемая доходность портфеля

x_i – доля начальной стоимости портфеля, инвестированная в *i-тый* вид ценных бумаг;

r_i – ожидаемая доходность *i-того* вида ценных бумаг;

n – количество видов ценных бумаг в портфеле.

$$\boxed{r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i}$$

Дисперсия доходности портфеля

$$\boxed{D\left(r_p\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i x_j \mu_{ij}\sqrt{D\left(r_i\right)D\left(r_j\right)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i x_j \mu_{ij}\sigma_i\sigma_j}$$

$$-1 \le \mu_{ij} \le +1$$

Среднее квадратическое отклонение доходности портфеля

$$\boxed{\sigma\left(r_p\right)=\sqrt{D\left(r_p\right)}}$$

Пример расчета доходности и риска портфеля

Найти ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности портфеля, состоящего из *30%* акций компании *A* и *70%* акций компании *B*, если их доходности некоррелированы и составляют соответственно *25%* и *10%*, а их стандартные отклонения равны *10%* и *5%*.

$$\boxed{r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = 0.3 \cdot 25\% + 0.7 \cdot 10\% = 14.5\%}$$

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j \\ 1, & \text{если} \quad i = j \end{cases}$$

$$\boxed{\sigma\left(r_p\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \mu_{ij} \sigma_i \sigma_j} = \sqrt{\left(0.3 \cdot 10\%\right)^2 + \left(0.7 \cdot 5\%\right)^2} = 4.6\%}$$

Диверсификация инвестиционного портфеля

Свойство инвестиционного портфеля ценных бумаг обладать меньшим риском, чем некоторые его отдельные составляющие, называется **диверсификацией**.

ВЫВОД: Увеличение количества ценных бумаг при одновременном сокращении их долей в общей ожидаемой доходности **уменьшает риск** инвестиционного портфеля.

Пример диверсификации

Найти ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности портфеля, состоящего из *10 видов* ценных бумаг с некоррелироваными доходностями. Доли ценных бумаг x_i, их доходности r_i и стандартные отклонения σ_i приведены в таблице.

Параметры	Номера ценных бумаг, *i*									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x_i %	10	10	10	10	10	10	20	10	5	5
r_i %	15	15	18	12	25	20	10	28	35	50
σ_i %	8	8	10	7	12	10	5	15	20	25

Решение примера

Ожидаемая доходность

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i = 0.1\cdot 15 + 0.1\cdot 15 + 0.1\cdot 18 + 0.1\cdot 12 + 0.1\cdot 25 +$$

$$+0.1\cdot 20 + 0.2\cdot 10 + 0.1\cdot 28 + 0.05\cdot 35 + 0.05\cdot 50 = 19.55\%$$

Дисперсия доходности

$$D\left(r_p\right) = (0.1\cdot 8)^2 + (0.1\cdot 8)^2 + (0.1\cdot 10)^2 + (0.1\cdot 7)^2 + (0.1\cdot 12)^2 +$$

$$+(0.1\cdot 10)^2 + (0.2\cdot 5)^2 + (0.1\cdot 15)^2 + (0.05\cdot 20)^2 + (0.05\cdot 25)^2 = 11.02$$

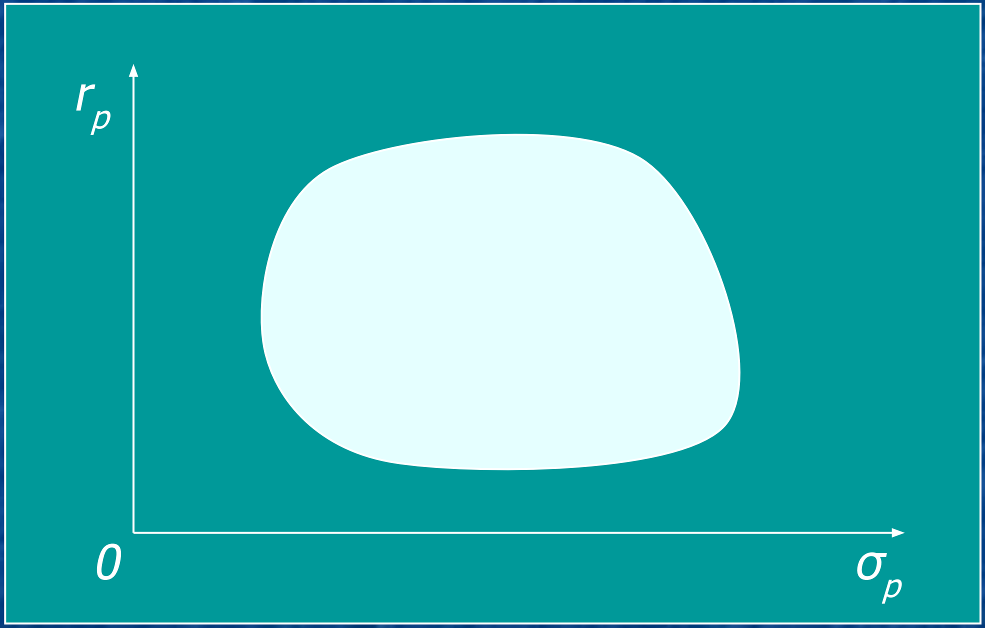
Стандартное отклонение

$$\sigma\left(r_p\right) = \sqrt{D\left(r_p\right)} = 3.3\%$$

ВЫВОД: Крупные инвестиции позволяют приобретать более диверсифицированные портфели. Тем самым инвестиционный риск в значительной степени **снижается**.

1.4. Выбор оптимального портфеля

Достижимое множество инвестиционных портфелей – это совокупность всех портфелей, которые можно составить из *n* видов ценных бумаг.

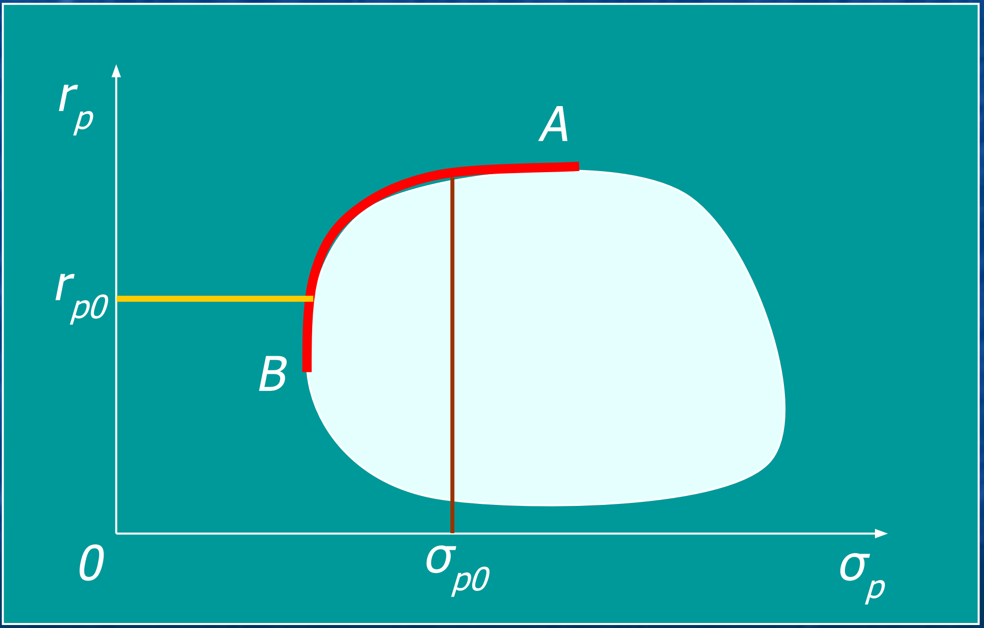


Теорема об эффективном множестве инвестиционных портфелей

Инвестор выбирает оптимальный портфель из такого множества портфеля, каждый из которых:

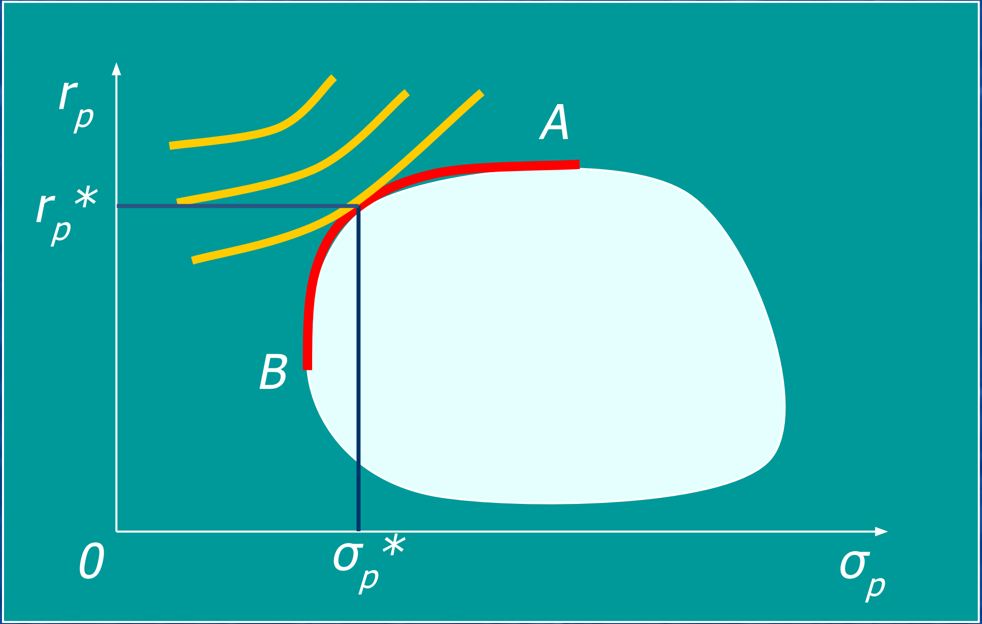
- максимизирует ожидаемую доходность для некоторого заданного уровня риска;
- минимизирует риск для некоторого уровня ожидаемой доходности.

ВЫВОД: Инвестор выбирает портфели, на верхней и левой границе достижимого множества портфелей. **Эффективное множество** портфелей представляет собой участок *AB*.



Выбор оптимального портфеля

Выбор оптимального портфеля заключается в совмещении линии безразличия инвестора с эффективным множеством портфелей.

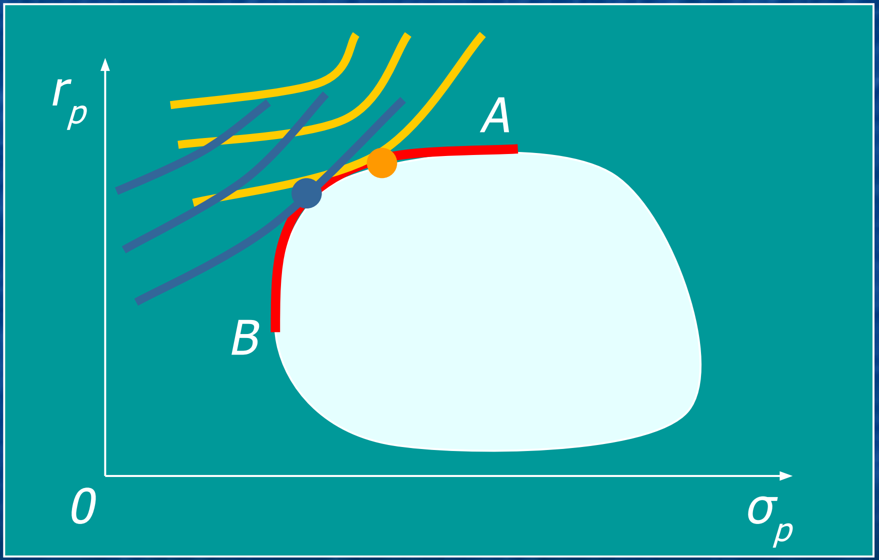


Зависимость формы линий безразличия от выбора стратегии инвестора

Замечание: Выбор оптимального портфеля существенно зависит от формы линий безразличия, которая зависит от функции полезности, в свою очередь являющейся характеристикой **стратегии** инвестора.

Функция полезности Неймана-Моргенштейна

- У **осторожного** инвестора, тяготеющего к уменьшению риска за счет снижения доходности линии безразличия менее выпуклы.
- **Повышение риска** для инвестора для получения более высокого уровня доходности выражается в том, что линии безразличия более выпуклы.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!