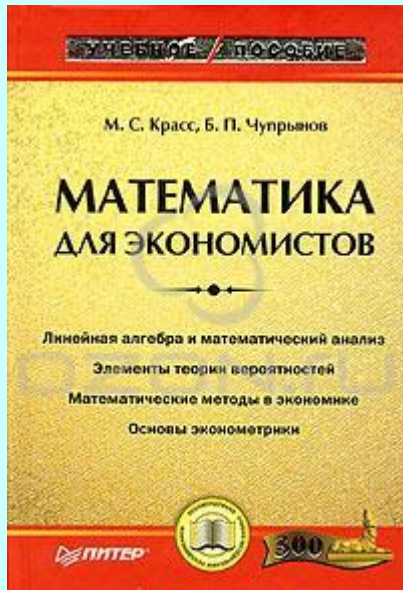


МАТЕМАТИКА 4

Математические методы в экономике

**Проф.
ВЕДЕНЯПИН
Евгений Николаевич**

Основная литература



Красс М.С., Чупрынов Б.П. «Математика для экономистов», СПб., Питер, 2007

Дополнительная литература

Четыркин Е.М. «Финансовая математика», М., Дело, 2000



1. Анализ рисков

Рассматриваемые вопросы:

- ❖ Выбор с помощью дерева решений
- ❖ Мера риска
- ❖ Основы портфельного анализа
- ❖ Выбор оптимального портфеля

1.1. Выбор с помощью дерева решений

Основные понятия методов анализа риска

Любая сфера человеческой деятельности, в особенности, экономика и бизнес, связаны с **принятием решений** в условиях **неполноты информации**.

Многие ситуации требуют принятия решения в результате анализа **последовательности** возможных решений в рыночной обстановке, когда одна совокупность решений лица, принимающего решения (ЛПР), и состояний рынка порождает другое состояние аналогичного типа. В момент такого перехода требуется принятие решения с оценкой возможных последствий.

Позиционные игры

Игры, в которых задается последовательность принятия решений игроками, называются **позиционными играми**.

Число игроков в позиционной игре может варьироваться от двух и более.

Игрок принимает свое решение, уже зная о решении партнера (соперника), т. е. в ответ на его решение.

Примеры позиционных игр двух игроков: шахматы, шашки.

Позиционные игры моделируют поведение фирм в условиях рынка. Потому этот класс игр широко используется в экономике.

Дерево решений

Позиционную игру наглядно представляет **дерево решений** (в общем случае — **граф решений**), приводящее игроков из исходной позиции в конечные.

Дерево решений – это метод, применяемый при многоходовом процессе анализа и осуществления управленческих решений. Ветви дерева изображают события, которые могут иметь место, а узлы и вершины – момент выбора направления действий.

Вершины дерева игры называются **позициями**.

Позиции, непосредственно следующие за некоторой позицией, называются **альтернативами**; позиции, не имеющие альтернатив, называются **окончательными**, а ведущие в них пути — **партиями**.

Часть дерева решений, описывающая игру из некоторой позиции (которая может считаться начальной), называют **подыгрой**.

Пример позиционной игры

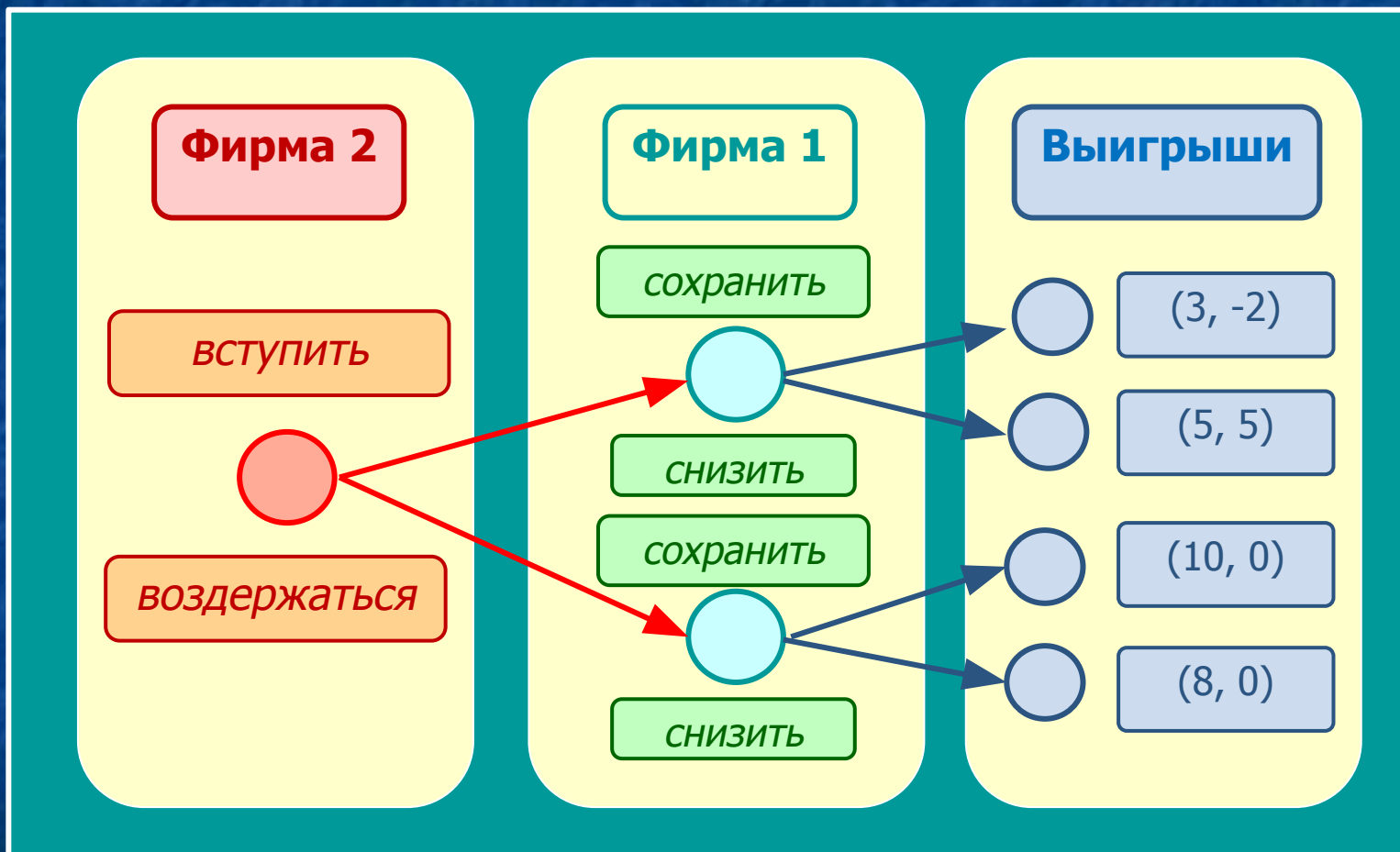
На рынке доминирует производитель — **фирма 1**, и монопольное положение приносит ей прибыль *10 млрд у.е.*

Фирма 2 решает вопрос о внедрении на этот рынок при следующих известных предпосылках.

В случае вступления **фирмы 2** на рынок **фирма 1** может отреагировать двояко: а) снизить объем своего производства и тогда поделить с **фирмой 2** свою прибыль по *5 млрд* на каждого конкурента; б) не уступать в объеме производства — тогда прибыль **фирмы 1** понизится до *3 млрд* вследствие снижения рыночной цены, а **фирма 2** понесет убытки в размере *2 млрд* тоже из-за падения рыночной цены на товар, а также из-за того, что предварительные затраты на проработку рынка и организацию производства не будут компенсированы.

Если же **фирма 2** воздерживается от вступления на рынок, то ее прибыль будет нулевой; в этом случае **за фирмой 1** остаются два варианта поведения: не снижать объем производства с прибылью *10 млрд* и снизить объем производства со снижением прибыли до *8 млрд у.е.*

Дерево решений для игры двух партнеров



Этапы процесса принятия решения

- 1. Формулировка задачи.** Состоит в формализации экономического объекта и выбора основных определяющих факторов. Включает в себя сбор информации, составление перечня возможных событий, которые могут произойти с определенными вероятностями, установление порядка следования событий с информацией об их исходах, установление последовательности возможных действий.
- 2. Оценка вероятности исхода** каждого события.
- 3. Установление выигрышей и проигрышей** для каждой возможной комбинации действий.
- 4. Построение дерева решений.**
- 5. Проведение расчетов и принятие решения** как движение от вершины дерева решения к его корням с анализом вариантов.

Пример проведения процедуры принятия решения

Администрация компании решает вопрос об инвестировании. Можно инвестировать средства в проект *A*, в проект *B* или в действующий торговый комплекс (проект *B*). С вероятностями 0.5 инвестиции в проекты *A* и *B* могут принести выигрыши S_1 и S_2 :

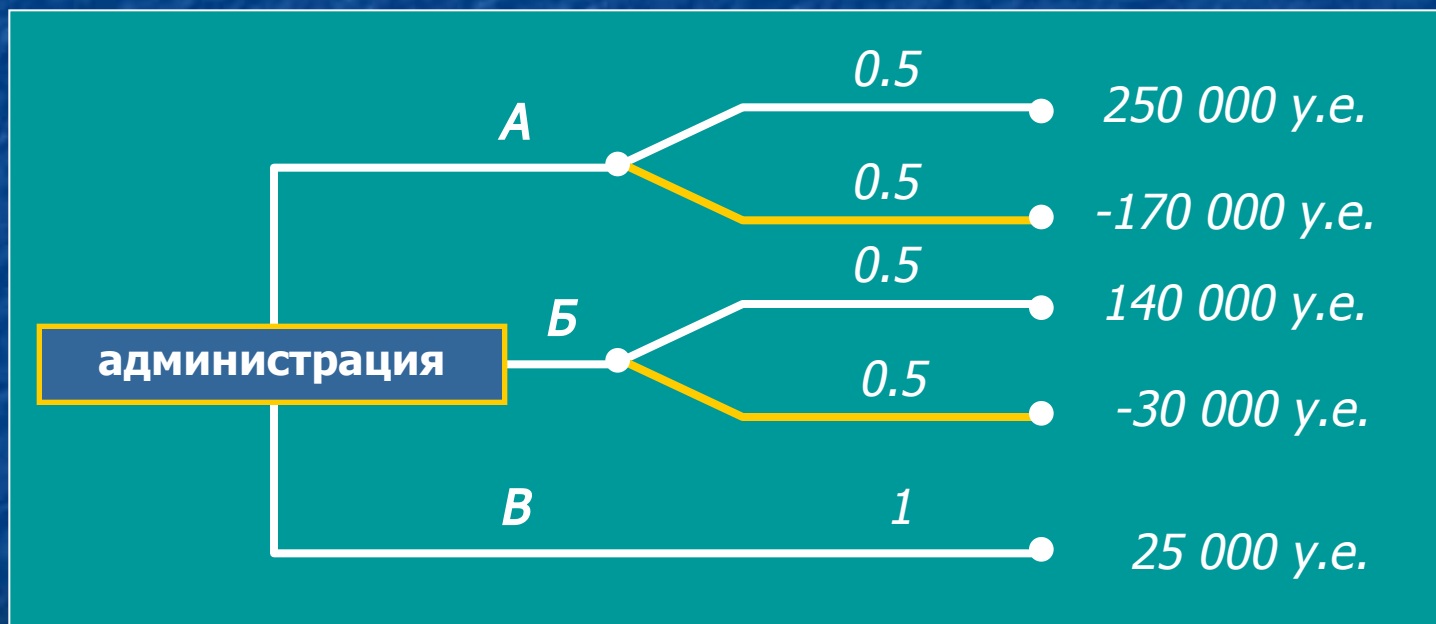
	Выигрыш, у.е.	Проигрыш, у.е.
Проект <i>A</i> , S_1	250 000	-170 000
Проект <i>B</i> , S_2	140 000	-30 000

Инвестирование торгового комплекса (проект *B*) принесет гарантированную прибыль 25 000 у.е. Найти оптимальное решение.

Пример проведения процедуры принятия решения (продолжение)

Этапы 1-3 выполнены.

Этап 4. Построение дерева решений



Пример проведения процедуры принятия решения (окончание)

Этап 5. Проведение расчетов

Ожидаемая прибыль – это **математическое ожидание** случайной величины

$$Pr f = \bar{S} = S_1 p_1 + S_2 p_2$$

$$Pr f. \bar{S}_A = S_{A1} p_{A1} + S_{A2} p_{A2} = 250.0 \cdot 0.5 + (-170.0) \cdot 0.5 = 40.0$$

$$Pr f. \bar{S}_B = S_{B1} p_{B1} + S_{B2} p_{B2} = 140.0 \cdot 0.5 + (-30.0) \cdot 0.5 = 55.0$$

$$Pr f. \bar{S}_B = S_{B1} p_{B1} = 25.0 \cdot 1 = 25.0$$

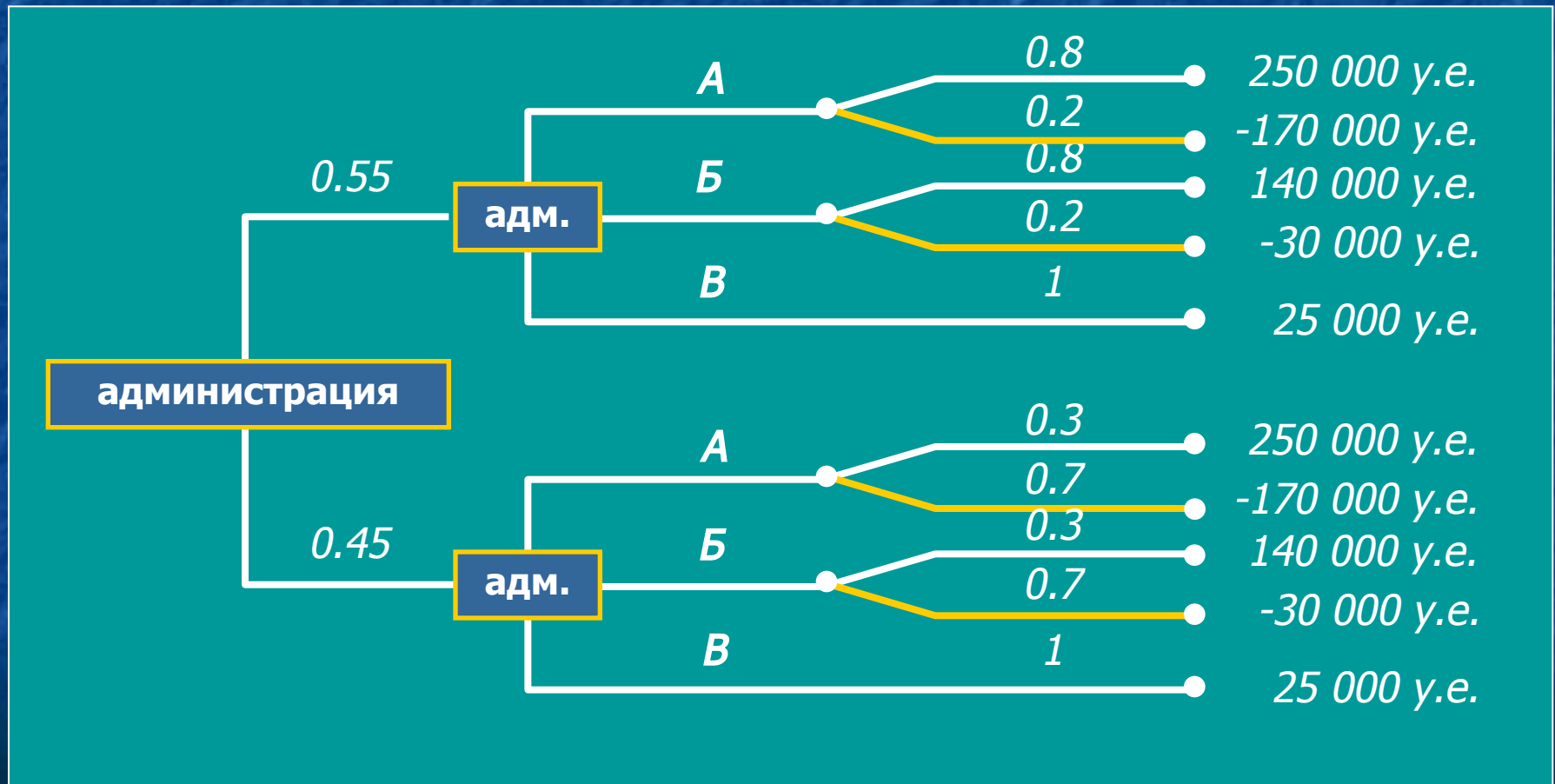
ВЫВОД: Если в качестве критерия выбора решения выбрать величину ожидаемой прибыли, то следует выбрать **проект Б**.

Принятие решения при уточнении исходных данных

Администрация компании решила потратить $10\ 000$ у.е. на уточнение информации (экспертиза, прогноз, конфиденциальные источники). Уточненная информация заключается в следующем: вероятность благоприятного развития ситуации равна 0.55 , вероятность неблагоприятного развития равна 0.45 . Вероятности выигрышей для проектов А и Б составят в случае благоприятного развития $(p_1=0.8, p_2=0.2)$ и в случае неблагоприятного развития – $(p_1=0.3, p_2=0.7)$. Найти оптимальное решение в этом случае.

Уточнение принятия решения (продолжение)

Этап 4. Построение дерева решений



Уточнение принятия решения (окончание)

$$Pr f = \bar{S} = S_1 p_1 + S_2 p_2 - 10.0$$

Благоприятный прогноз

$$Pr f_A^1 = \bar{S}_A^1 = S_{A1}^1 p_{A1}^1 + S_{A2}^1 p_{A2}^1 - 10.0 = 250.0 \cdot 0.8 + (-170.0) \cdot 0.2 - 10.0 = 156.0 \text{ ò û ñ. ó.å.}$$

$$Pr f_A^1 = \bar{S}_A^1 = S_{A1}^1 p_{A1}^1 + S_{A2}^1 p_{A2}^1 - 10.0 = 140.0 \cdot 0.8 + (-30.0) \cdot 0.2 - 10.0 = 96.0 \text{ ò û ñ. ó.å.}$$

$$Pr f_B^1 = \bar{S}_B^1 = S_{B1}^1 p_{B1}^1 - 10.0 = 25.0 \cdot 1 - 10.0 = 15.0 \text{ ò û ñ. ó.å.}$$

Неблагоприятный прогноз

$$Pr f_A^2 = \bar{S}_A^2 = S_{A1}^2 p_{A1}^2 + S_{A2}^2 p_{A2}^2 - 10.0 = 250.0 \cdot 0.3 + (-170.0) \cdot 0.7 - 10.0 = -54.0 \text{ ò û ñ. ó.å.}$$

$$Pr f_A^2 = \bar{S}_A^2 = S_{A1}^2 p_{A1}^2 + S_{A2}^2 p_{A2}^2 - 10.0 = 140.0 \cdot 0.3 + (-30.0) \cdot 0.7 - 10.0 = 11.0 \text{ ò û ñ. ó.å.}$$

$$Pr f_B^2 = \bar{S}_B^2 = S_{B1}^2 p_{B1}^2 - 10.0 = 25.0 \cdot 1 - 10.0 = 15.0 \text{ ò û ñ. ó.å.}$$

Вывод: Если администрация склоняется к тому, что ситуация будет благоприятной, то следует выбрать Проект А (156.0 тыс. руб.), если же предполагается неблагоприятная ситуация, то следует выбрать Проект В (гарантированная прибыль 15.0 тыс. руб.).

Общая ожидаемая прибыль

$$Pr f_0 = S_1 p_1 + S_2 p_2 - 10.0 = 156.0 \cdot 0.55 + 15.0 \cdot 0.45 - 10.0 = 92.55 \text{ ò û ñ. ó.å.}$$

1.2. Мера риска

Риск – это угроза потери действующим финансовым лицом части своих ресурсов, либо появления дополнительных расходов в результате осуществления определенной финансовой политики.

Виды рассматриваемых рисков:

- ❖ риски, связанные с конкуренцией;
- ❖ риски, связанные с принятием финансовых решений;
- ❖ инвестиционные риски, связанные с возможным обесцениванием портфеля ценных бумаг.

Мера риска финансового решения – это среднее квадратическое отклонение σ основного показателя этого решения.

Оценка риска

Замечание 1: На практике для оценки риска используется безразмерная величина риска

$$\frac{\sigma}{S}, \%$$

Замечание 2: При одинаковых или сравнимых по величине математических ожиданиях выигрыша выбирают то решение, при котором среднее квадратическое отклонение меньше.

Примечание. Для любого предпринимателя, в том числе и ЛПР, крайне нежелательна ситуация с резкими изменениями этих показателей от их среднего уровня, что означает угрозу утери контроля. Чем меньше стандартное отклонение от среднего значения, тем больше стабильность рыночной обстановки.

Замечание 3: Чем меньше среднее квадратическое отклонение от среднего значения, тем больше стабильность рыночной обстановки.

Пример оценки риска

Фирма производит продукцию с ограниченным сроком годности. Поставка ее производится контейнерами. Затраты на производство и транспортировку продукции в одном контейнере составляет *25.0 тыс. у.е.* Фирма продает каждый контейнер за *55.0 тыс. у.е.* Если в течение срока годности продукция не продается, то она портится и фирма не получает дохода. Вероятности спроса на продукцию в течение срока годности для различного количества контейнеров представлены в таблице.

Количество контейнеров	5	6	7	8
Вероятность реализации	0.1	0.4	0.3	0.2

Найти оптимальное количество контейнеров, которое нужно производить в течение срока годности.

Пример оценки риска (решение)

Прибыль от каждого проданного контейнера $55.0 - 25.0 = 30.0$ у.е.

Убыток от непроданного контейнера 25.0 тыс. у.е.

Среднее значение ожидаемой прибыли

$$M(S) = \bar{S} = \sum_{k=1}^4 p_k S_k$$

Дисперсия

$$D(S) = M(S^2) - \bar{S}^2$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D}$$

Прибыль для всех случаев продаж (окончание)

Спрос Производство	5 $p=0.1$	6 $p=0.4$	7 $p=0.3$	8 $p=0.2$	S	D	σ	σ/S
5	150	150	150	150	150	0	0	0
6	125	180	180	180	174	272	16.5	9.5
7	100	155	210	210	177	1331	36.5	20.5
8	75	130	185	240	163	2541	50.4	30.9

Вывод: Оптимальный выбор состоит в производстве **6 контейнеров** продукции: средняя ожидаемая прибыль составит *174.0 тыс. у.е.* при стандартном отклонении *9.5%*. Если производство увеличить до 7 контейнеров, то прибыль увеличится незначительно (до *177.0 тыс. у.е.*), зато риск возрастает более чем в *2 раза* (до *20.5%*).

1.3. Основы портфельного анализа

Поскольку ценные бумаги различаются по доходности и надежности, то инвесторы вкладывают средства в приобретение ценных бумаг нескольких видов (формируют **инвестиционный портфель**), стремясь достичь наилучшего соотношения «риск – доходность».



Гарри
МАРКОВИЦ
(р. 1927)

Линии безразличия

Функция полезности – это функция, зависящая от ожидаемой доходности r_p инвестиционного портфеля и среднего квадратического отклонения σ_p (меры риска)

$$u = u(r_p, \sigma_p)$$

Замечание: Все инвестиционные портфели, лежащие на одной **линии безразличия (линии уровня)**

$$u(r_p, \sigma_p) = I = const,$$

являются равноценными с точки зрения инвестора.

Критерий выбора портфеля



Вывод: Любой портфель, лежащий на линии безразличия выше и левее, является более привлекательным, чем портфель, лежащий на линии безразличия, которая ниже и правее.

Ожидаемая доходность портфеля

x_i – доля начальной стоимости портфеля, инвестированная в *i*-тый вид ценных бумаг;

r_i – ожидаемая доходность *i*-того вида ценных бумаг;

n – количество видов ценных бумаг в портфеле.

$$r_p = \sum_{i=1}^n x_i r_i$$

Дисперсия доходности портфеля

$$D(r_p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \mu_{ij} \sqrt{D(r_i) D(r_j)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \mu_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

$$-1 \leq \mu_{ij} \leq +1$$

Среднее квадратическое отклонение доходности портфеля

$$\sigma(r_p) = \sqrt{D(r_p)}$$

Пример расчета доходности и риска портфеля

Найти ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности портфеля, состоящего из 30% акций компании A и 70% акций компании B, если их доходности некоррелированы и составляют соответственно 25% и 10%, а их стандартные отклонения равны 10% и 5%.

$$r_p = \sum_{i=1}^n x_i r_i = 0.3 \cdot 25\% + 0.7 \cdot 10\% = 14.5\%$$

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j \\ 1, & \text{если } i = j \end{cases}$$

$$\sigma(r_p) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \mu_{ij} \sigma_i \sigma_j} = \sqrt{(0.3 \cdot 10\%)^2 + (0.7 \cdot 5\%)^2} = 4.6\%$$

Диверсификация инвестиционного портфеля

Свойство инвестиционного портфеля ценных бумаг обладать меньшим риском, чем некоторые его отдельные составляющие, называется **диверсификацией**.

ВЫВОД: Увеличение количества ценных бумаг при одновременном сокращении их долей в общей ожидаемой доходности **уменьшает риск** инвестиционного портфеля.

Пример диверсификации

Найти ожидаемую доходность и стандартное отклонение доходности портфеля, состоящего из *10 видов* ценных бумаг с некоррелированными доходностями. Доли ценных бумаг x_i , их доходности r_i и стандартные отклонения σ_i приведены в таблице.

Параметры	Номера ценных бумаг, i									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i %	10	10	10	10	10	10	20	10	5	5
r_i %	15	15	18	12	25	20	10	28	35	50
σ_i %	8	8	10	7	12	10	5	15	20	25

Решение примера

Ожидаемая доходность

$$r_p = \sum_{i=1}^n x_i r_i = 0.1 \cdot 15 + 0.1 \cdot 15 + 0.1 \cdot 18 + 0.1 \cdot 12 + 0.1 \cdot 25 + \\ + 0.1 \cdot 20 + 0.2 \cdot 10 + 0.1 \cdot 28 + 0.05 \cdot 35 + 0.05 \cdot 50 = 19.55\%$$

Дисперсия доходности

$$D(r_p) = (0.1 \cdot 8)^2 + (0.1 \cdot 8)^2 + (0.1 \cdot 10)^2 + (0.1 \cdot 7)^2 + (0.1 \cdot 12)^2 + \\ + (0.1 \cdot 10)^2 + (0.2 \cdot 5)^2 + (0.1 \cdot 15)^2 + (0.05 \cdot 20)^2 + (0.05 \cdot 25)^2 = 11.02$$

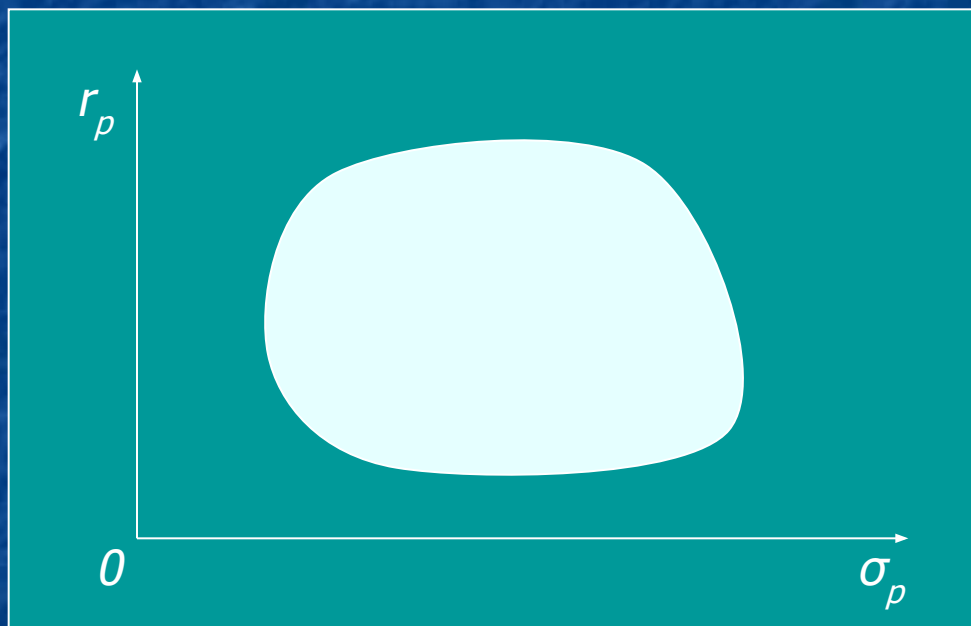
Стандартное отклонение

$$\sigma(r_p) = \sqrt{D(r_p)} = 3.3\%$$

Вывод: Крупные инвестиции позволяют приобретать более диверсифицированные портфели. Тем самым инвестиционный риск в значительной степени **снижается**.

1.4. Выбор оптимального портфеля

Достижимое множество инвестиционных портфелей – это совокупность всех портфелей, которые можно составить из n видов ценных бумаг.

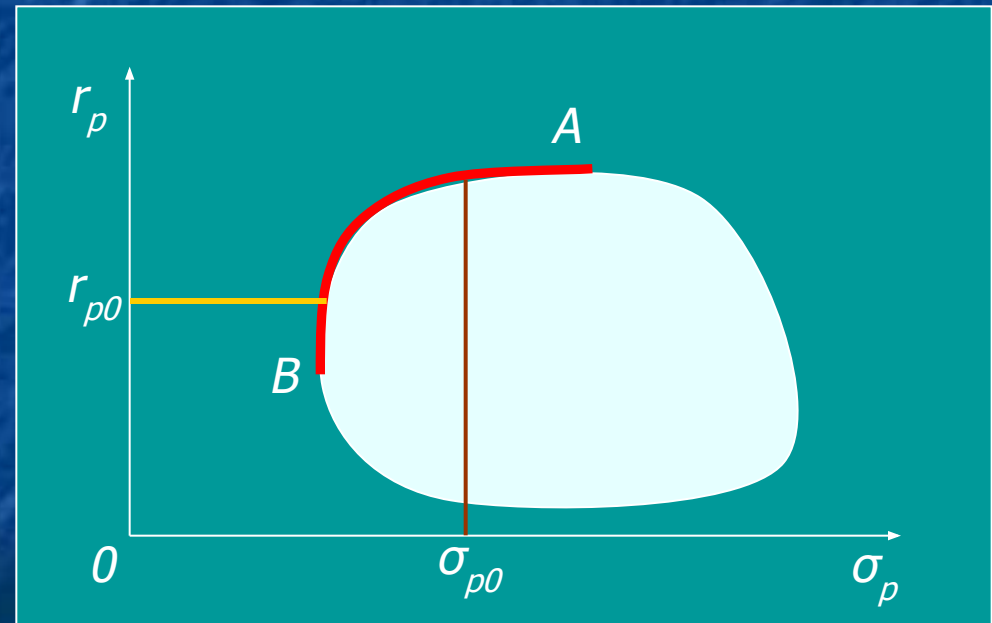


Теорема об эффективном множестве инвестиционных портфелей

Инвестор выбирает оптимальный портфель из такого множества портфеля, каждый из которых:

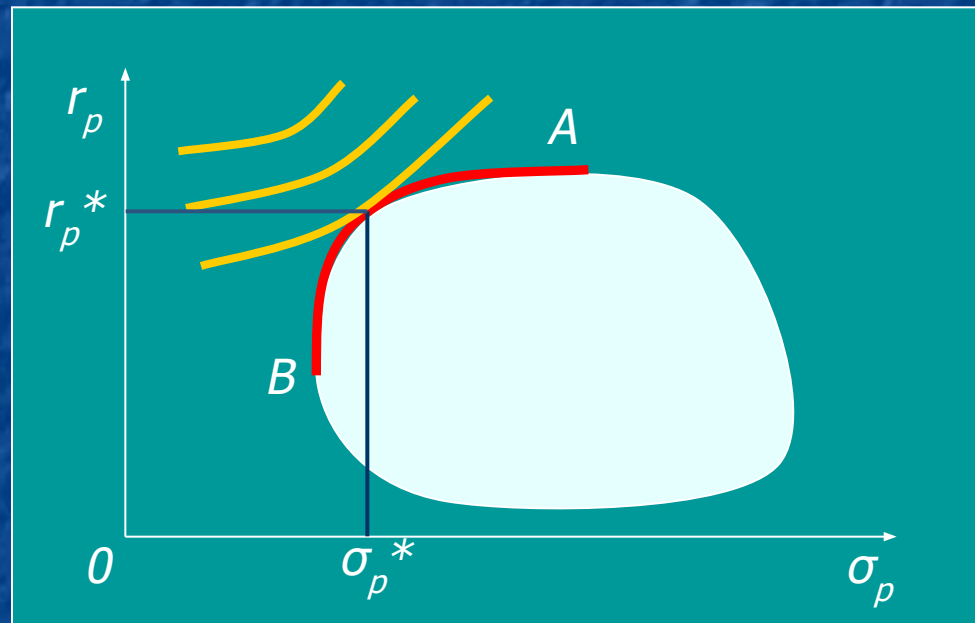
- ❖ максимизирует ожидаемую доходность для некоторого заданного уровня риска;
- ❖ минимизирует риск для некоторого уровня ожидаемой доходности.

Вывод: Инвестор выбирает портфели, на верхней и левой границе достижимого множества портфелей. **Эффективное множество** портфелей представляет собой участок AB .



Выбор оптимального портфеля

Выбор оптимального портфеля заключается в совмещении линии безразличия инвестора с эффективным множеством портфелей.

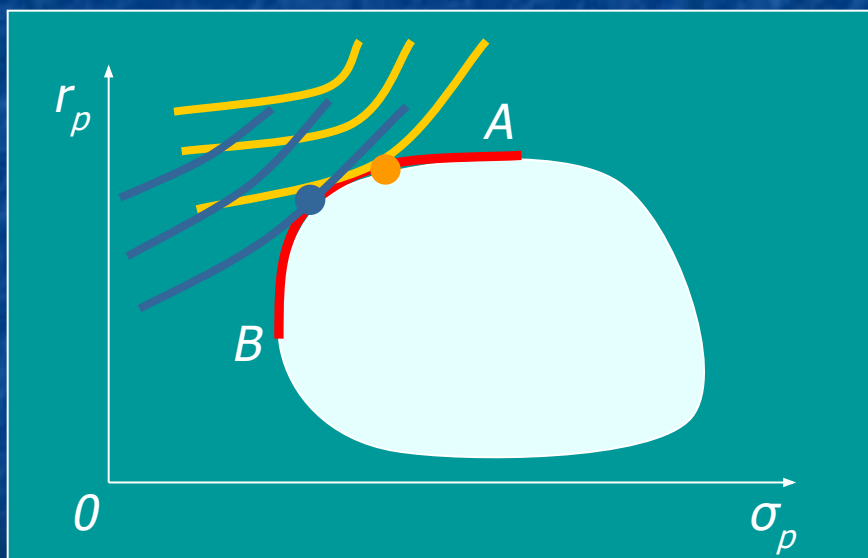


Зависимость формы линий безразличия от выбора стратегии инвестора

Замечание: Выбор оптимального портфеля существенно зависит от формы линий безразличия, которая зависит от функции полезности, в свою очередь являющейся характеристикой **стратегии** инвестора.

Функция полезности Неймана-Моргенштейна

- ❖ У **осторожного** инвестора, тяготеющего к уменьшению риска за счет снижения доходности линии безразличия менее выпуклы.
- ❖ **Повышение риска** для инвестора для получения более высокого уровня доходности выражается в том, что линии безразличия более выпуклы.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!