Раздел 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ТЕМА 4. ПРЕДЕЛЫ

Лекция 4.1. Функция. Числовая последовательность.

Вопросы

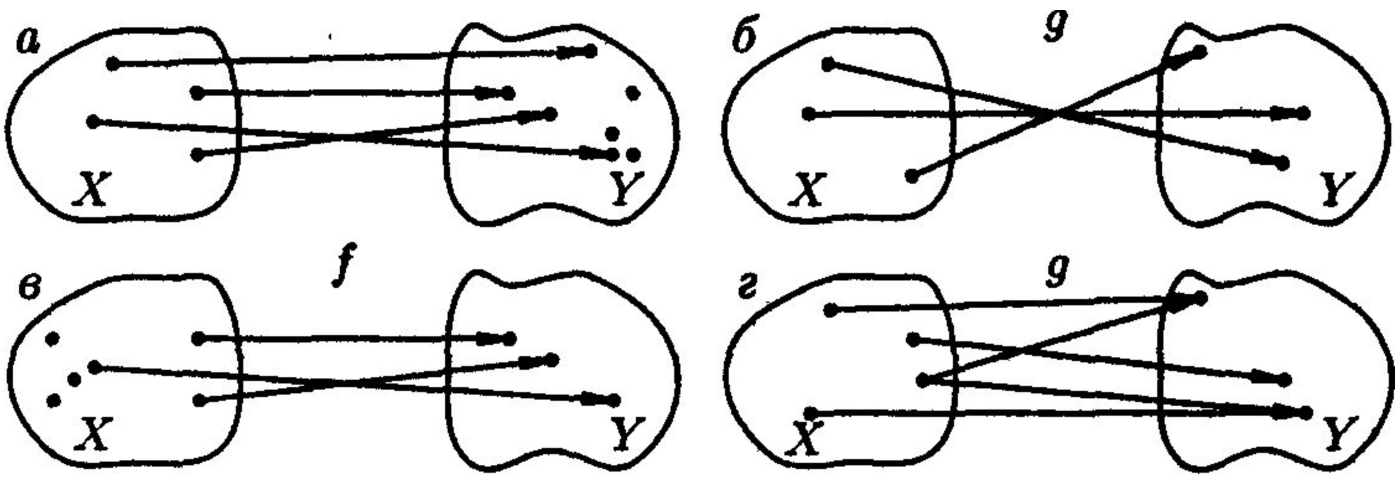
1. **Функция.**
2. **Основные элементарные функции и их графики.**
3. **Числовая последовательность и ее предел.**
4. **Свойства пределов последовательностей.**

1. Функция

Опр. Заданы два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу x $\in$ X сопоставляет один и только один элемент y $\in$ Y, называется *функцией* и записывается $y = f(x)$, x $\in$ X или

f: X $\to$ Y.

Говорят еще, что функция f ***отображает*** множество X на множество Y.



Например, соответствия f и g, изображенные на рисунке 1 *а* и *б*, являются функциями, а *в* и *г* - нет. В случае *в* — не каждому элементу x $\in$ X соответствует элемент y $\in$Y. В случае *г* не соблюдается условие однозначности

Переменная x называется при этом *аргументом* или независимой переменной, а y — *функцией* или *зависимой переменной* (от x). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости*.

$y = y(x)$ *или* $y = f(x)$

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывают так: f(a). Например, если $f(x) = 2x^2 - 3$, то $f(0) = -3$, $f(2) = 5$.

Опр. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

Три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.
Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений

Графический способ: задается график функции.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.

Основные характеристики функции

- 1. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D, называется **четной,** если $\forall x \in D$ выполняются условия

  $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$;

  нечетной, если $\forall x \in D$ выполняются условия

  $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

  График четной функции симметричен относительно оси Oy, а нечетной — относительно начала координат.

• 2. Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве D. Если для $\forall$ $(x_1, x_2) \in D$

из $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, то ф-я наз *возрастающей* на множестве D;

из $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, то ф-я наз *неубывающей*;

из $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, то ф-я наз *убывающей;*

из $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, то ф-я наз ***невозрастающей*** .

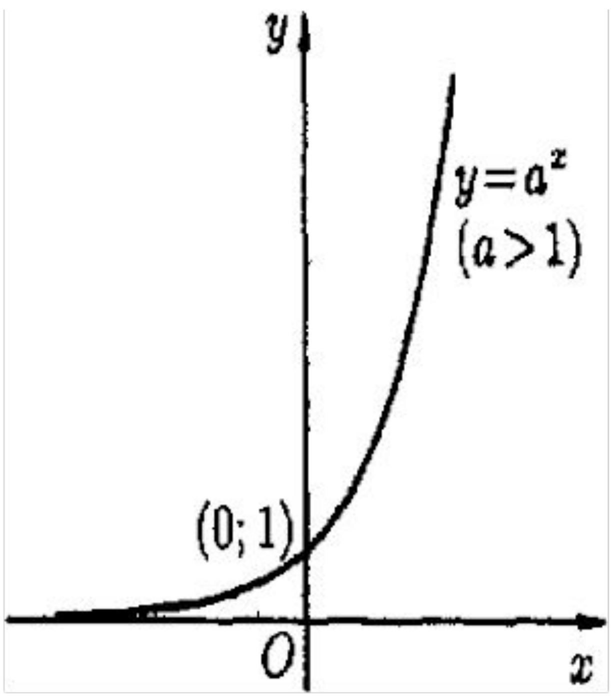
Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D называются ***монотонными*** на этом множестве, а возрастающие и убывающие — ***строго монотонными.***

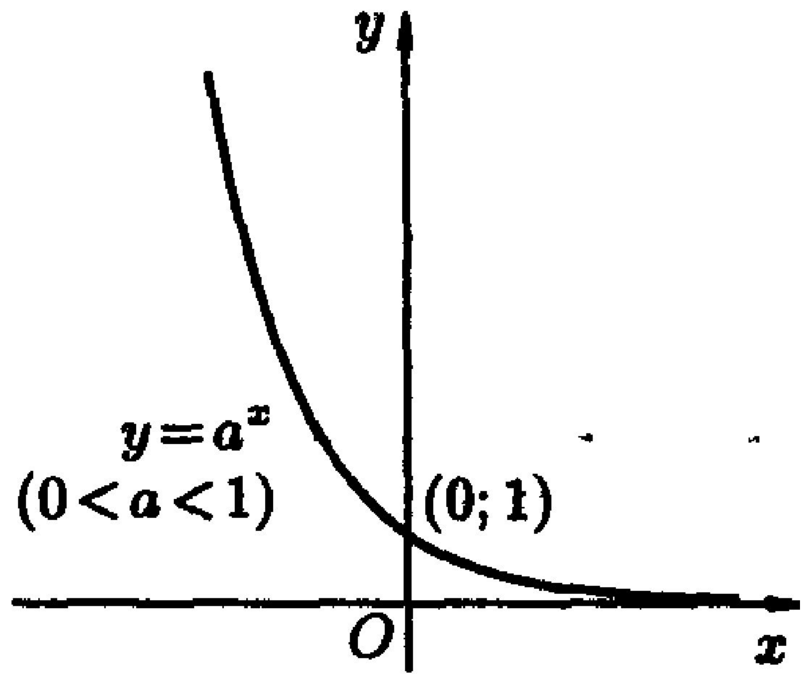
- 3. Функцию $y = f(x)$, $x \in D$, называется ограниченной на D, если $\exists M>0$: $\forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \le M$. Отсюда следует, что график ограниченной функции лежит между прямыми $y = -M$ и $y = M$ (см. рис.).

- 4. Функция $y = f(x)$, определенная на D, называется *периодической* на этом множестве, если $\exists\ T > O$, что при каждом $x \in D$ значение $(x+T) \in D$ и $f(x+T) = f(x)$. При этом число T называется *периодом* функции.

2.

1) *Показательная* функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.





2) *Степенная* $y = x^{\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

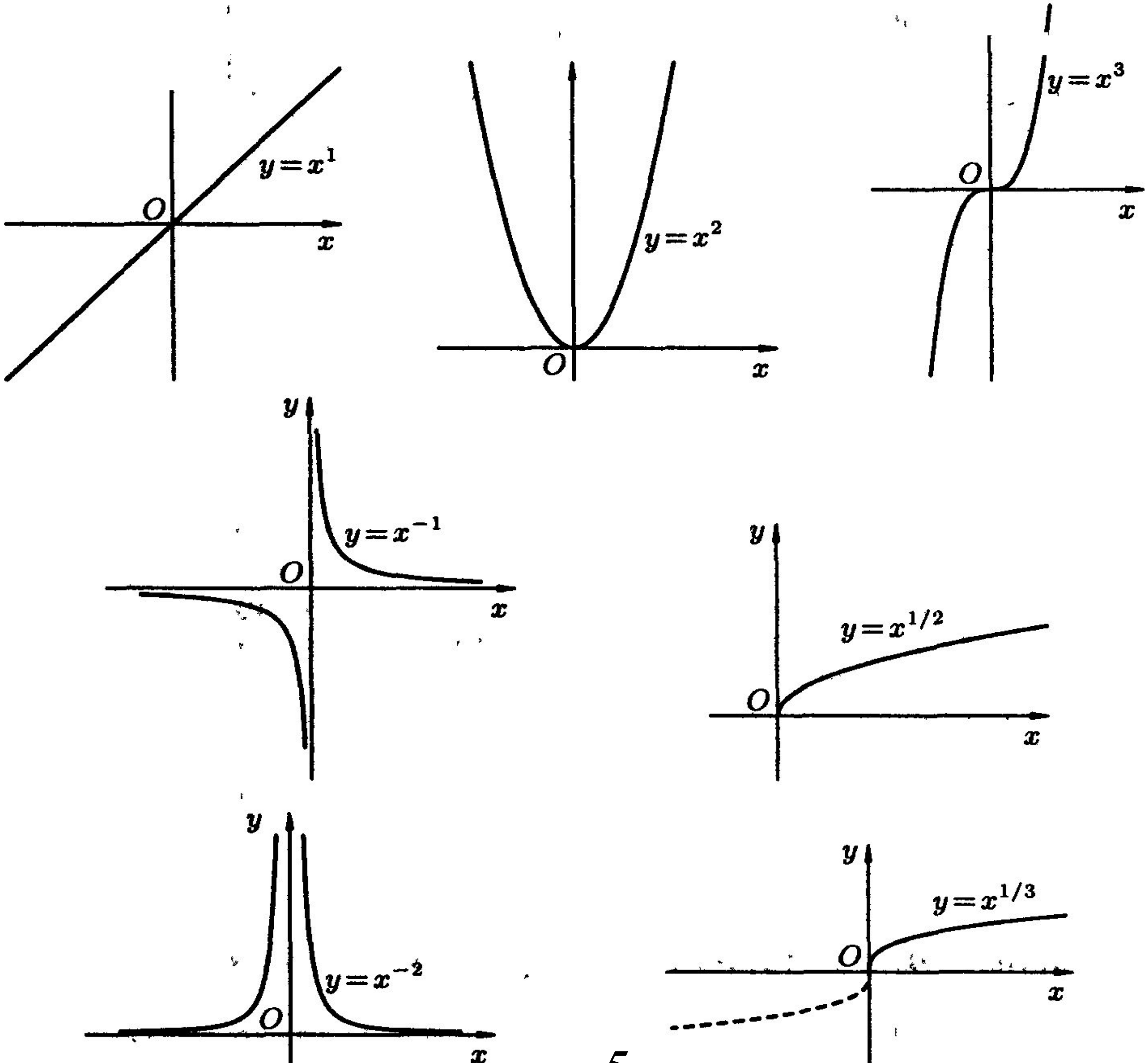
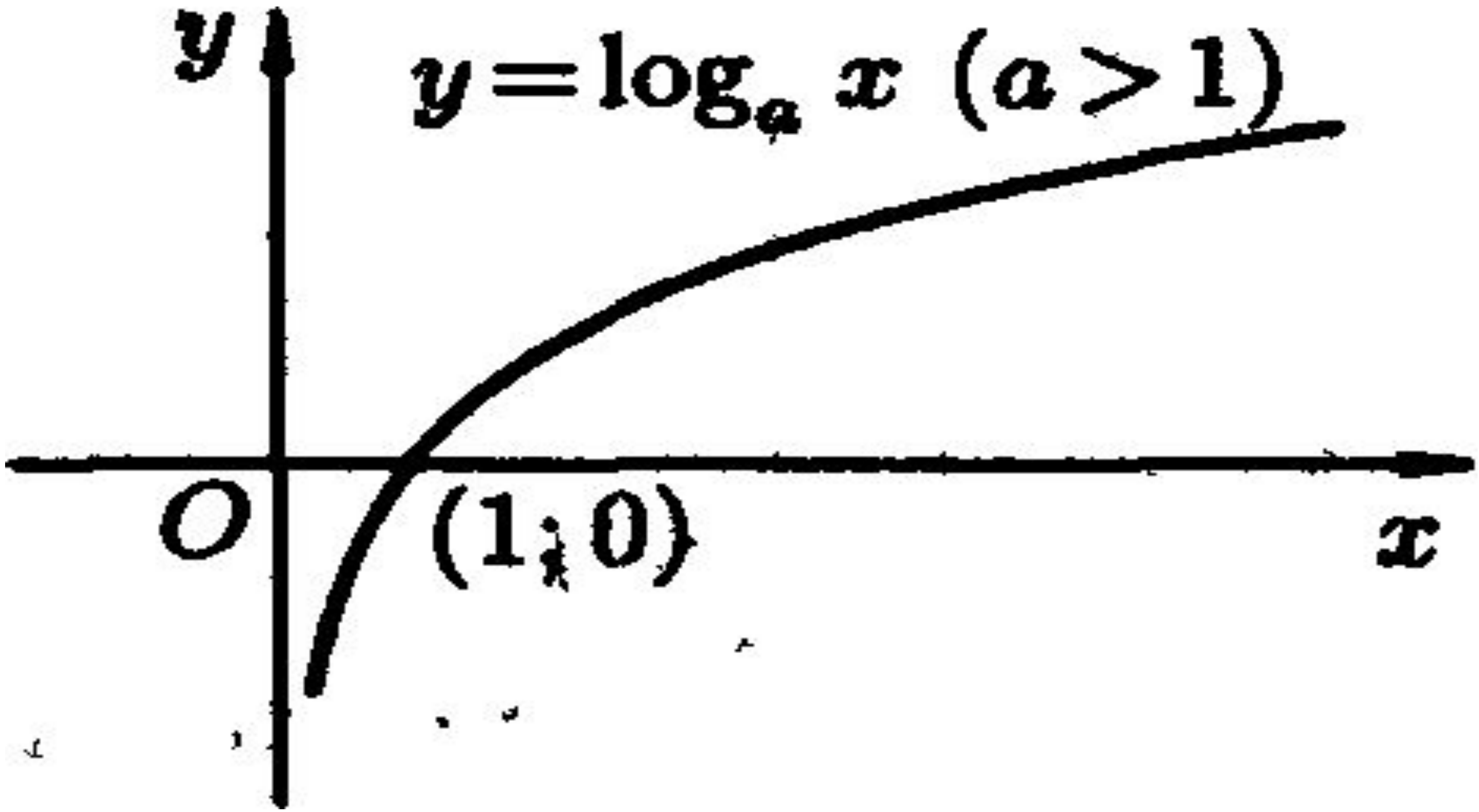
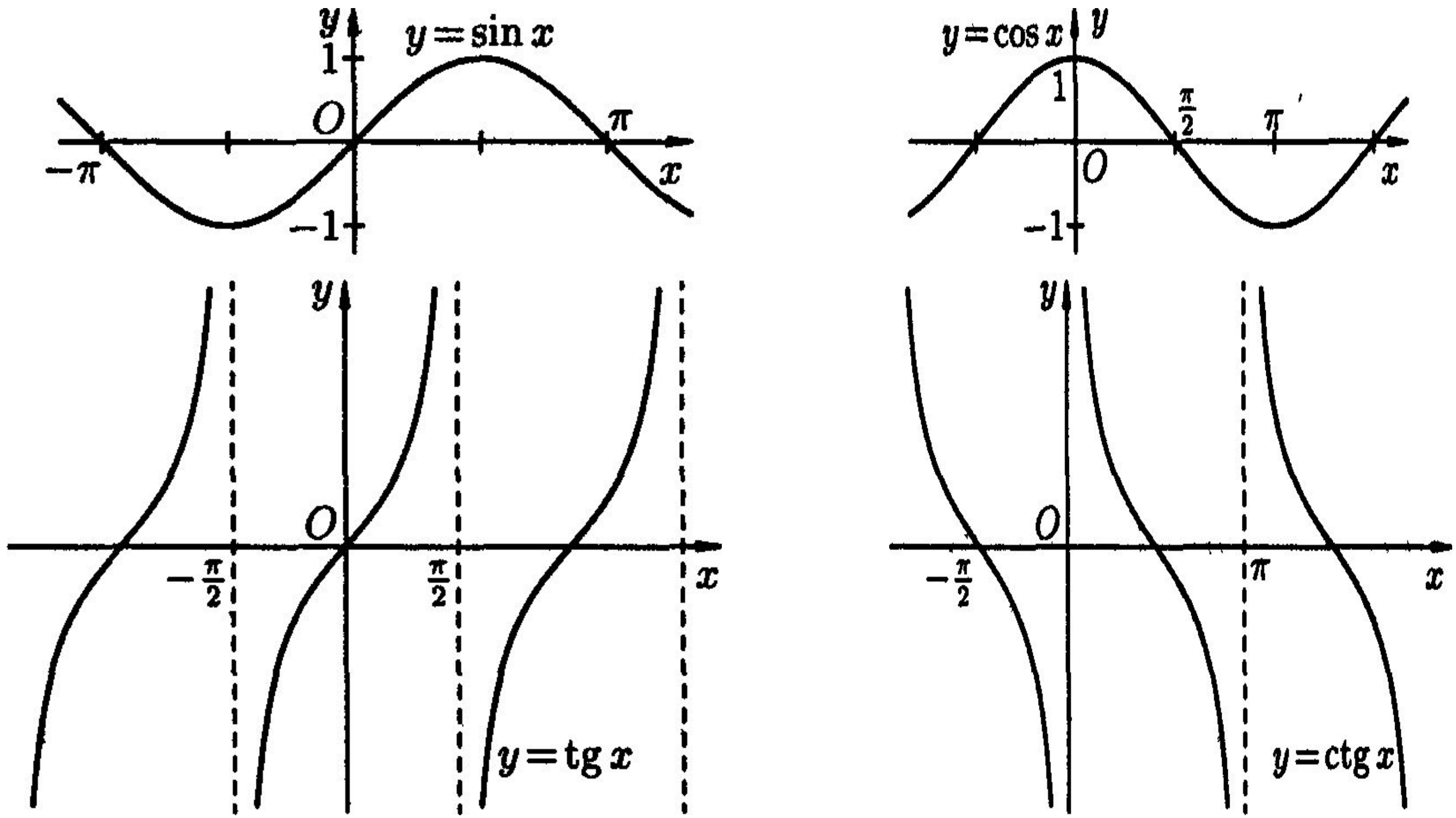


Рис. 105

3) *Логарифмическая* $y = log_a x$, $\neq 1$



4) *Тригонометрические* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $\text{ctg}\, x$.



3. Числовая последовательность и ее предел

Опр. Под ***числовой последовательностью*** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ понимается функция

$$x_n = f(n),$$

заданная на множестве N натуральных чисел.

def: $\{x_n\}$ или x_n, $n \in N$.

Число x_1 называется первым членом (элементом) последовательности, x_2 — вторым,..., x_n — ***общим*** или ***n-м членом последовательности.***

$\upsilon_n = n^2 + 1$, $z_n = -1^{n} \cdot n$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, $u_n = \dfrac{n-1}{n}$, $n \in N$

задают соответственно последовательности

$\upsilon_n = \{2, 5, 10, ..., n^2 + 1, ...\}$; $z_n = \{-1, 2, -3, 4, ..., -1^{n} \cdot n, ...\}$;

$y_n = \{1,,,,\ldots,,\ldots\}$ $u_n = \{0,,,,,,\ldots,,\ldots\}$

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной,*** если $\exists M > 0$ т. ч. $\forall n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \le M$.

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (***неубывающей***), если для $\forall m$ выполняется неравенство $a_{m+1} > a_m$ ($a_{m+1} \ge a_m$).

Опр. Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Коротко определение предела можно записать так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim x_n = a$$

Пример Доказать, что $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$

Решение: По определению, число 1 будет пределом последовательности $x_n=\frac{n-1}{n}$, n $\in$ N, если $\forall$ε > 0 *найдется* натуральное число *N,* такое, что для всех n > *N* выполняется неравенство $\left|\frac{n-1}{n}-1\right|<$ ε, т.е. $\frac{1}{n}<$ ε. Оно справедливо для всех *n* > , $\frac{1}{\varepsilon}$ т. е. для всех n > *N* =[$\frac{1}{\varepsilon}$] *,* где [$\frac{1}{\varepsilon}$] — целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$ (целая часть числа *x,* обозначаемая [*x*]*,* есть наибольшее целое число, не превосходящее *x;* так [3] = 3, [5, 2] = 5).

Если *ε* > 1, то в качестве *N* можно взять [$\frac{1}{\varepsilon}$] + *1.*

Итак, $\forall$*ε > 0 указано соответствующее значение N.* Это и доказывает, что $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$

Выясним геометрический смысл определения предела последовательности.

Неравенство (2) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$ или $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$, которые показывают, что элемент x_n находится в ε-окрестности точки a.

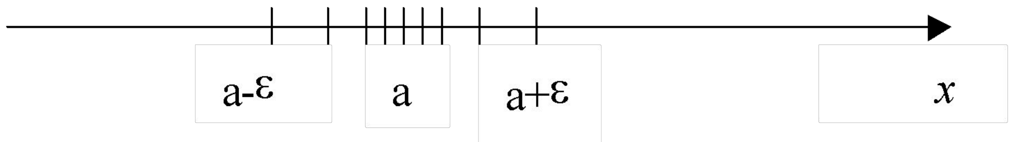


Рис.

Опр. предела последовательности геометрически формулируется: число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε-окрестность точки a (см. рис.).

Чем меньше ε, тем больше число N, но в любом случае внутри ε-окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее может быть лишь конечное их число.

Отсюда следует, что ***сходящаяся последовательность*** **имеет только один предел**.

Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся***.

Теорема: Сумма сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема: Разность сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен разности пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема: Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема: Частное сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, при условии что предел $\{y_n\}$ отличен от нуля, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \le y_n$, то $a \le b$.

Теорема (Вейерштрасс). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел