

Раздел 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ТЕМА 4. ПРЕДЕЛЫ

Лекция 4.1. Функция. Числовая последовательность.

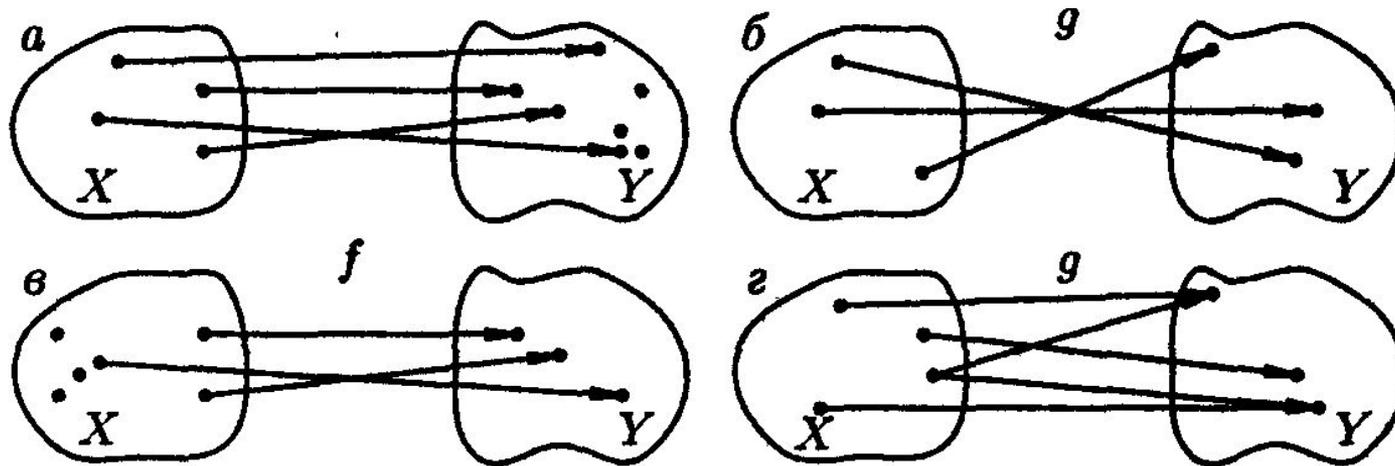
Вопросы

- 1. Функция.**
- 2. Основные элементарные функции и их графики.**
- 3. Числовая последовательность и ее предел.**
- 4. Свойства пределов последовательностей.**

1. Функция

Опр. Заданы два непустых множества X и Y . Соответствие f , которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется *функцией* и записывается $y = f(x)$, $x \in X$ или $f: X \rightarrow Y$.

Говорят еще, что функция f *отображает* множество X на множество Y .



Например, соответствия f и g , изображенные на рисунке 1 *a* и *б*, являются функциями, а *в* и *г* - нет. В случае *в* — не каждому элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$. В случае *г* не соблюдается условие однозначности

Переменная x называется при этом *аргументом* или *независимой переменной*, а y — *функцией* или *зависимой переменной* (от x). Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в *функциональной зависимости*.

$$y = y(x) \text{ или } y = f(x)$$

Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывают так: $f(a)$. Например, если $f(x) = 2x^2 - 3$, то $f(0) = -3$, $f(2) = 5$.

Опр. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy , для каждой из которых x является значением аргумента, а y — соответствующим значением функции.

Три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений

Графический способ: задается график функции.

Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.

Основные характеристики функции

- 1. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве D , называется **четной**, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$;
нечетной, если $\forall x \in D$ выполняются условия $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy , а нечетной — относительно начала координат.

• 2. Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве D .
Если для $\forall (x_1, x_2) \in D$
из $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, то ф-я наз *возрастающей* на
множестве D ;

из $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, то ф-я наз *неубывающей*;

из $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, то ф-я наз *убывающей*;

из $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, то ф-я наз *невозрастающей* .

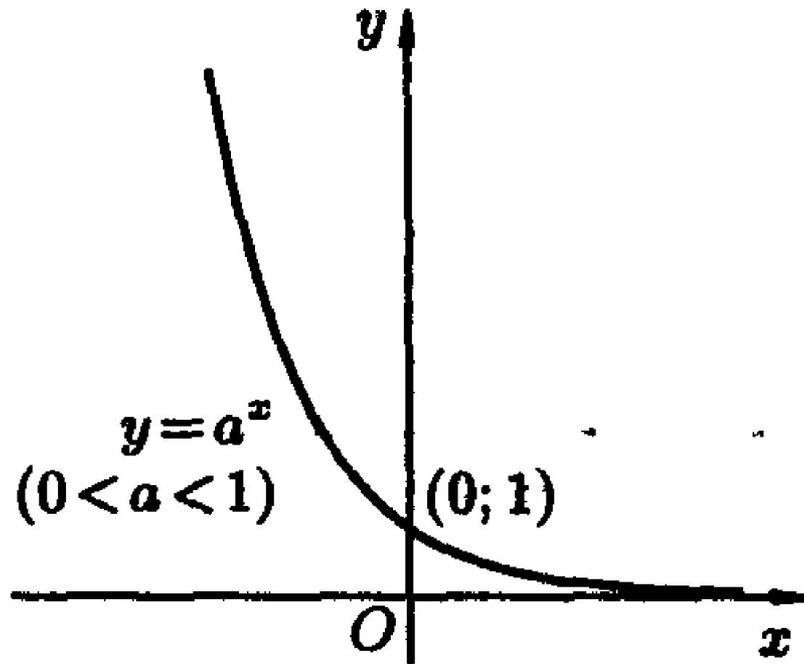
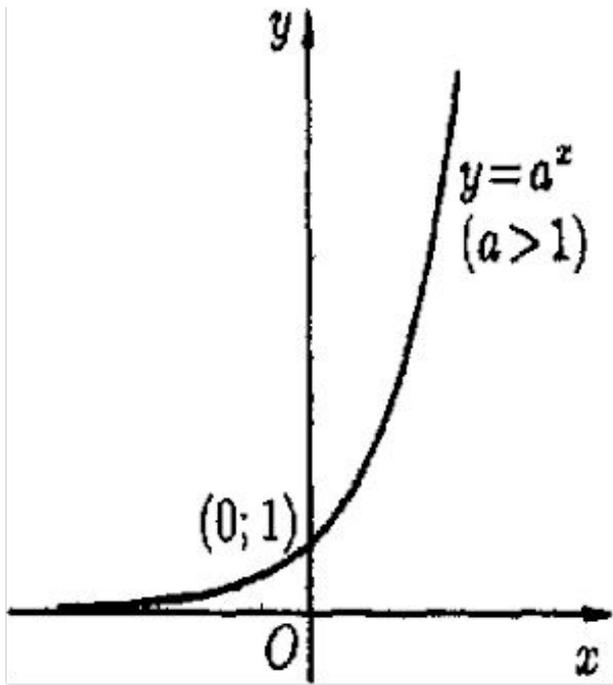
Возрастающие, невозрастающие, убывающие и
неубывающие функции на множестве D называются
монотонными на этом множестве, а возрастающие и
убывающие — *строго монотонными*.

• 3. Функцию $y = f(x)$, $x \in D$, называется ограниченной на D , если $\exists M > 0: \forall x \in D \Rightarrow |f(x)| \leq M$. Отсюда следует, что график ограниченной функции лежит между прямыми $y = -M$ и $y = M$ (см. рис.).

• 4. Функция $y = f(x)$, определенная на D , называется *периодической* на этом множестве, если $\exists T > 0$, что при каждом $x \in D$ значение $(x + T) \in D$ и $f(x + T) = f(x)$. При этом число T называется *периодом* функции.

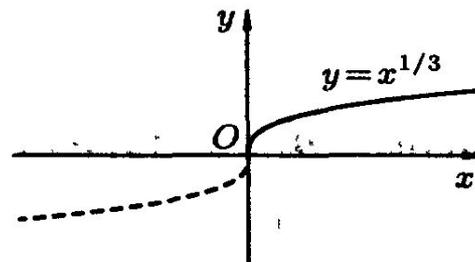
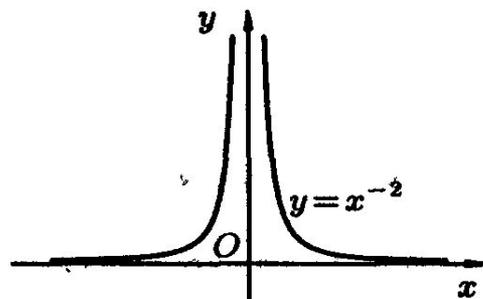
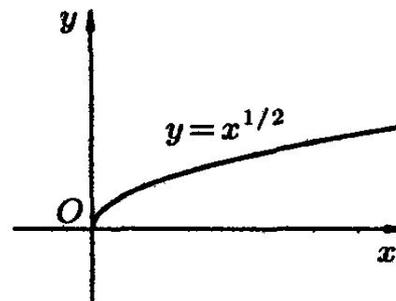
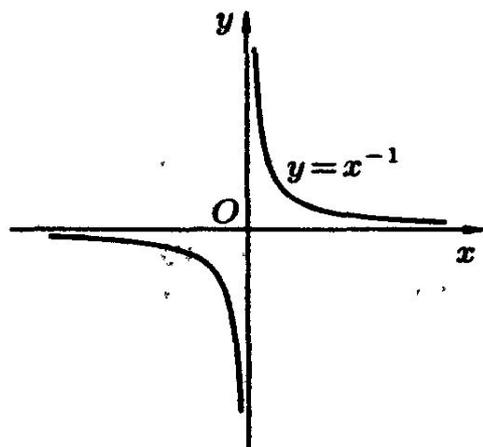
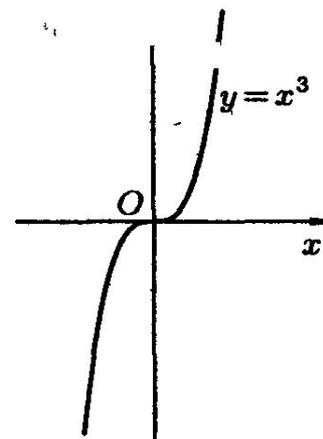
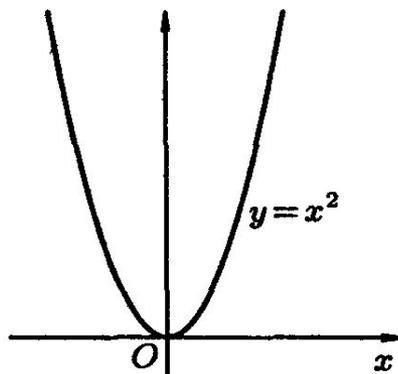
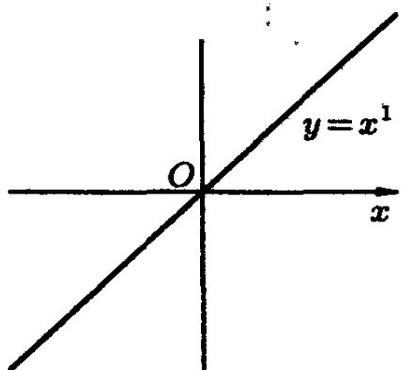
2.

1) Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.



2) Степенная

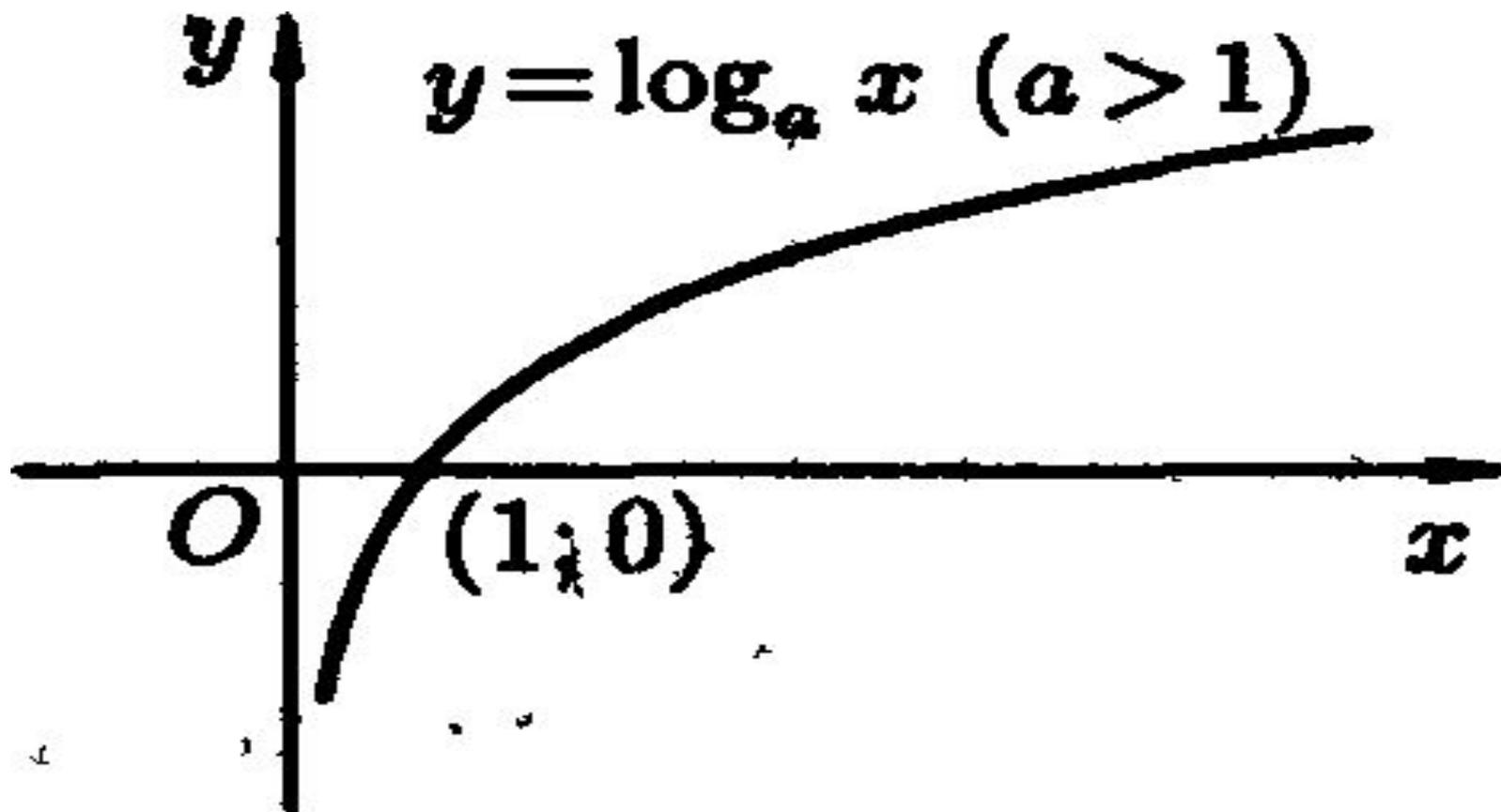
$$y = x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$



3) Логарифмическая

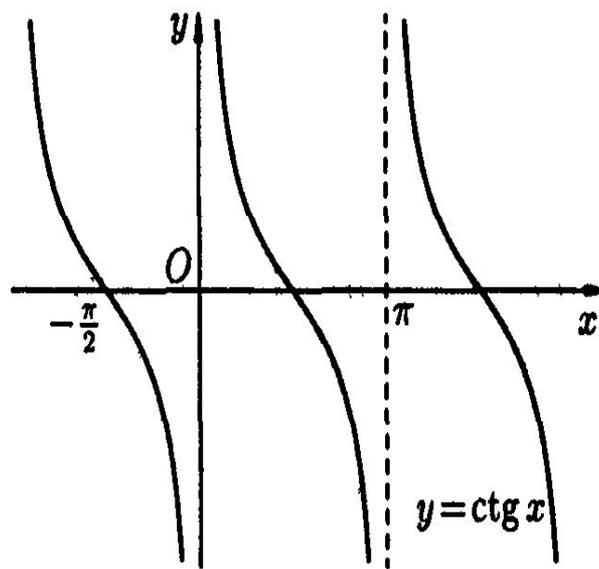
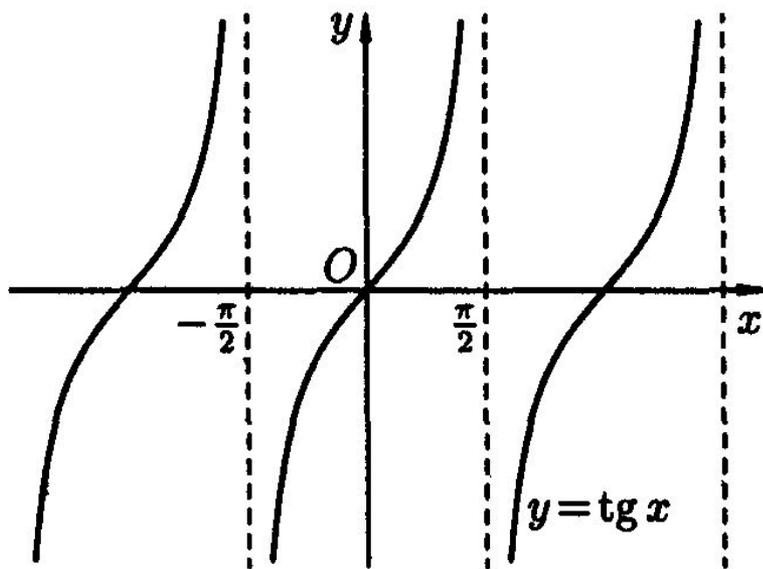
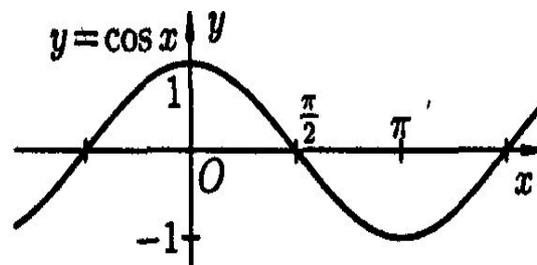
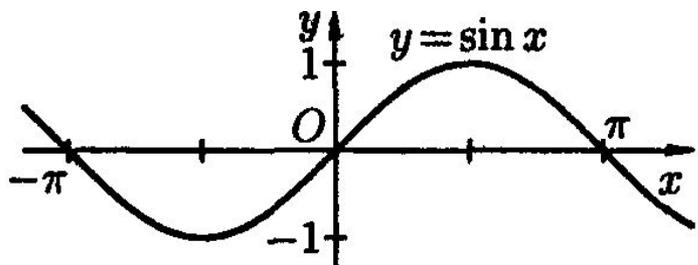
$$y = \log_a x,$$

$\neq 1$



4) Тригонометрические

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.



3. Числовая последовательность и ее предел

Опр. Под **числовой последовательностью** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ понимается функция

$$x_n = f(n),$$

заданная на множестве \mathbb{N} натуральных чисел.

def: $\{x_n\}$ или $x_n, n \in \mathbb{N}$.

Число x_1 называется **первым членом** (элементом) последовательности, x_2 — **вторым**, ..., x_n — **общим** или ***n*-м членом последовательности**.

$$v_n = n^2 + 1, \quad z_n = -1^n \cdot n, \quad y_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

задают соответственно последовательности

$$v_n = \{2, 5, 10, \dots, n^2 + 1, \dots\}; \quad z_n = \{-1, 2, -3, 4, \dots, -1^n \cdot n, \dots\};$$

$$y_n = \{1, \dots, \dots\} \quad u_n = \{0, \dots, \dots\}$$

Опр. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**,
 $\exists M > 0$ т. ч. $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leq M$ если

Опр. Последовательность $\{a_m\}$ называется **возрастающей**
 (a_m), $\forall m$ выполняется неравенство $a_{m+1} > a_m$ ($a_{m+1} \geq a_m$).
неубывающей если для $\forall m$ выполняется неравенство

Опр. Число a называется *пределом* *последовательности* $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Коротко определение предела можно записать так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon: \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim x_n = a$$

Пример Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$

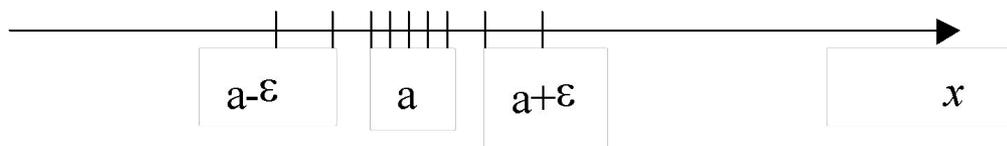
Решение: По определению, число 1 будет пределом последовательности $x_n = \frac{n-1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется натуральное число N , такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|\frac{n-1}{n} - 1| < \varepsilon$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Оно справедливо для всех $n > \frac{1}{\varepsilon}$. е. для всех $n > N = [\frac{1}{\varepsilon}]$, где $[\frac{1}{\varepsilon}]$ — целая часть числа $\frac{1}{\varepsilon}$ (целая часть числа x , обозначаемая $[x]$, есть наибольшее целое число, не превосходящее x ; так $[3] = 3$, $[5, 2] = 5$).

Если $\varepsilon > 1$, то в качестве N можно взять $[\frac{1}{\varepsilon}] + 1$.

Итак, $\forall \varepsilon > 0$ указано соответствующее значение N . Это и доказывает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$

Выясним геометрический смысл определения предела последовательности.

Неравенство (2) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x^n < a + \varepsilon$, которые показывают, что элемент x^n находится в ε -окрестности точки a .



Опр. _{рис.} предела последовательности геометрически формулируется: число a называется пределом последовательности $\{x^n\}$, если для любой ε -окрестности точки a найдется натуральное число N , что все значения x^n , $n > N$, попадут в ε -окрестность точки a (см. рис.). Чем меньше ε , тем больше число N , но в любом случае внутри ε -окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее может быть лишь конечное их число.

Отсюда следует, что *сходящаяся последовательность* имеет только один предел.
ваится *расходящейся* Последовательность, не имеющая предела, назы-

Теорема:

Сумма сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема:

Разность сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен разности пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема:

Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема:

Частное сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, при условии что предел $\{y_n\}$ отличен от нуля, есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Теорема Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $x_n \leq y_n$, то $a \leq b$.

Теорема (Вейерштрасс). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел