Лекция 5.4.

Интегрирование рациональных дробей, некоторых иррациональных и трансцендентных функций.

- Разложение правильной рациональной дроби в сумму простых дробей.
- Интегрирование простых дробей.
- Понятие рациональной функции от нескольких переменных.
- Интегрирование некоторых тригонометрических и гиперболических функций.
- Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Разложение правильной рациональной дроби в сумму простых дробей.

Функция вида

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно, называется дробно-рациональной функцией, или рациональной дробью.

Если $n < m$, то дробь называется правильной, в противном случае – неправильной. Если дробь неправильная – выделим ее целую часть:

где $S_{n-m}(x)$, $R_k(x)$ – многочлены степени $(n – m)$ и k соответственно, причем $k < m$.

Пусть x_1 - действительный корень знаменателя кратности r. Простыми (элементарными) дробями, соответствующими этому корню, называются дроби вида

где $A_1, A_2, ..., A_r$ – действительные числа.

Пусть $\alpha \pm i\beta$ – пара комплексно сопряженных корней знаменателя кратности s, причем

$$(x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) = x^2 + px + q, \text{ где } D < 0.$$

Простыми дробями, соответствующими этой паре корней, называются дроби вида

где $M_j x + N_j$ ($j = 1, 2, \ldots, s$) – многочлены первой степени с действительными коэффициентами.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – все действительные корни многочлена $Q_m(x)$ в знаменателе, кратности которых соответственно равны $r_1, r_2, \ldots, r_k$; , …, –
все пары комплексно сопряженных корней этого же многочлена кратности $s_1, s_2, \ldots, s_l$ соответственно.
Напомним, что многочлен в этом случае может быть разложен на множители, то есть представлен в виде

где

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_l) = m.$$

ТЕОРЕМА.

Всякая правильная дробь может быть единственным образом представлена в виде суммы элементарных дробей, соответствующих всем корням знаменателя.

При выполнении разложения правильной рациональной дроби

в сумму простых дробей обычно используют так называемый ***метод неопределенных коэффициентов***. Он состоит в следующем:

- Для данной дроби пишется разложение, коэффициенты которого считаются неизвестными.
- После этого обе части полученного равенства приводятся к общему знаменателю.
- У получившихся в числителе многочленов приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях переменной.
- В результате получается система m линейных уравнений с m неизвестными, которая в данном случае имеет единственное решение.

ПРИМЕР 1.

$\Rightarrow$

$$x^2 + x + 7 \equiv A(x + 2)^2 + B(x + 2)(x - 1) + C(x - 1).$$

Для определения коэффициентов *A, B, C* получаем систему:

$\Rightarrow$

Итак, искомое разложение имеет вид

ПРИМЕР 2.

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

Итак, искомое разложение имеет вид

Интегрирование простых дробей.

Задача интегрирования рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена, интеграл от которого является табличным, и правильной рациональной дроби, что приводит к нахождению интегралов следующих четырех типов:

При этом многочлен $x^2 + px + q$ не имеет вещественных корней, т.е. $D = p^2 - 4q < 0$.

Выделим полный квадрат по x в знаменателях двух последних дробей и сделаем замену переменной, полагая

В результате получим интегралы вида

Здесь

- вычисляется по рекуррентной формуле, полученной интегрированием по частям.

Понятие рациональной функции от нескольких переменных.

Под рациональной функцией двух переменных *u* и *v* понимается функция $R(u, v)$, представимая в виде

где *P* и *Q* – многочлены относительно *u*, коэффициенты которых являются многочленами относительно *v*.

Например

Если переменные *u* и *v*, в свою очередь, являются функциями переменной *x*, то функция $R(u(x),v(x))$ называется рациональной функцией от $u(x)$, $v(x)$.

Например

Аналогично можно ввести понятие рациональной функции от *m* переменных.

Интегрирование некоторых тригонометрических и гиперболических функций

- **Интегралы вида**

Так называемая *универсальная тригонометрическая подстановка*

сводит данный интеграл к интегралу от рациональной дроби, так как

ПРИМЕР 3.

Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким вычислениям. Вместе с тем другие методы иногда позволяют вычислить данный интеграл значительно быстрее. В частности, подстановки вида

- $t = \cos x$, $x \in (0, \pi)$;
- $t = \sin x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$;
- $t = \mathrm{tq}\, x$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

ПРИМЕР 4.

ПРИМЕР 5.

ПРИМЕР 6.

- **Интегралы вида**

  Рассмотрим некоторые случаи, когда когда *m* и *n* целые (не обязательно положительные) числа. Например

Если оба показателя m и n положительны и четны (или один из них равен 0), то целесообразно применять формулы понижения степени

ПРИМЕР 7.

- **Интегралы вида**

Интегралы этого типа непосредственно вычисляются, если в них подинтегральные функции преобразовать согласно формулам

ПРИМЕР 8.

- **Интегралы вида**

Подстановка

сводит данный интеграл к интегралу от рациональной дроби, так как

Иногда при вычислении интегралов данного типа более эффективными являются подстановки $t = \mathrm{ch}x$, $t = \mathrm{sh}x$, $t = \mathrm{th}x$, $t = \mathrm{ch}2x$ или метод интегрирования по частям.

ПРИМЕР 9.

Интегрирование некоторых иррациональных функций.

- **Интегралы вида**

где $r_k \in \boldsymbol{Q}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$, $ad - bc \neq 0$, подстановкой

(p – общий знаменатель рациональных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$) приводятся к интегралу от рациональной функции одной переменной t.

ПРИМЕР 10.

- **Интегралы вида**

После выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и замены переменной интеграл может быть сведен к интегралам от функций следующих трех видов, каждый из которых может быть вычислен с помощью соответствующей тригонометрической подстановки:

1) – подстановка $u = a\cos t$ или $u = a\sin t$;

2) – подстановка $u = a\,\mathrm{tg}\,t$ или $u = a\,\mathrm{ctg}\,t$;

3) – подстановка или

ПРИМЕР 11.

Итак, искомый интеграл мы свели к интегралу от рациональной дроби.

Рассмотрим часто встречающийся на практике интеграл

Для его вычисления предварительно выделим в числителе производную подкоренного выражения в знаменателе

В результате интеграл сводится к линейной комбинации интегралов

Интеграл

сводится к предыдущему подстановкой

Спасибо за внимание!