МЕТОДИ АНАЛІЗУ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ У ГАРМОНІЧНОМУ РЕЖИМІ

- **Символічний метод аналізу.**
- **Закони Кірхгофа у символічній формі.**
- **Метод еквівалентних перетворень**

Символічний метод аналізу гармонічних режимів

- Символічний метод ґрунтується на переході від опису гармонічних сигналів косинусними або синусними тригонометричними функціями часу комплексними еквівалентами: комплексними миттєвими значеннями (фазорними або символічними зображеннями).

$$A_m \cos(\omega t + \alpha) \Rightarrow \dot{s}(t) = A_m e^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{A}_m e^{j\omega t}$$

$$i(t) \to \dot{i}(t) = \dot{I}_m e^{j\omega t}, \quad \dot{I}_m = I_m e^{j\alpha_i};$$

$$u(t) \to \dot{u}(t) = \dot{U}_m e^{j\omega t}, \quad \dot{U}_m = U_m e^{j\alpha_u}.$$

Описи узагальненого двополюсника

$$a_n \frac{d^n i(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{di(t)}{dt} + a_0 i(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t),$$

$$\dot{U}_m e^{j\omega t} = \frac{a_n (j\omega)^n + \ldots + a_1 j\omega + a_0}{b_m (j\omega)^m + \ldots + b_1 j\omega + b_0} \dot{I}_m e^{j\omega t} = \underline{Z} \dot{I}_m e^{j\omega t}$$

$$\dot{U}_m = \underline{Z} \dot{I}_m; \;\; \dot{U} = \underline{Z} \dot{I}; \;\; \dot{I}_m = \underline{Y} \dot{U}_m; \;\; \dot{I} = \underline{Y} \dot{U}.$$

Відповідно до символічного методу аналіз гармонічного режиму лінійного електричного кола зводиться до дослідження його лінійного резистивного еквівалента в базисі комплексних миттєвих значень, який називають ***комплексною схемою заміщення***.

$$u(t) = R\,i(t); \quad \dot{U}_{m\mathrm{R}} e^{j\omega t} = R\dot{I}_{m\mathrm{R}} e^{j\omega t};$$

$$\dot{U}_{m\mathrm{R}} = R\dot{I}_{m\mathrm{R}}; \quad \dot{I}_{m\mathrm{R}} = G\dot{U}_{m\mathrm{R}}.$$

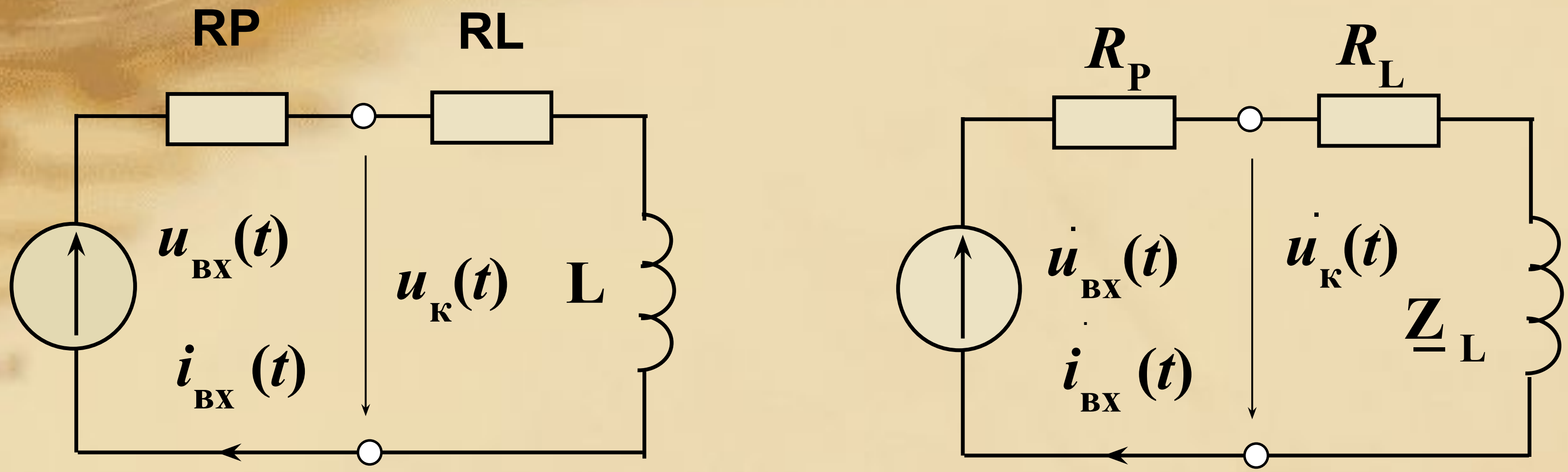
$$\dot{U}_{m\mathrm{C}} e^{j\omega t} = (1/\,j\omega C)\dot{I}_{m\mathrm{C}}\, e^{j\omega t};$$

$$\dot{U}_{m\mathrm{C}} = (1/\,j\omega C)\dot{I}_{m\mathrm{C}} \Rightarrow \dot{U}_{\mathrm{C}} = (1/\,j\omega C)\dot{I}_{\mathrm{C}}$$

- **Будь-яке лінійне пасивне двополюсне електричне коло, гілку або окремий двополюсник у частотній області при зображенні гармонічних коливань комплексними миттєвими значеннями, комплексними діючими значеннями чи комплексними амплітудами можна характеризувати *комплексним опором* або *комплексною провідністю*, а також їх складовими: *повним опором* чи *провідністю*, *активним опором* чи *провідністю*, *аргументами комплексної***

Основні етапи аналізу гармонічного режиму символічним методом

- Будують комплексну схему заміщення заданого для аналізу кола заміною її елементів певним частотним еквівалентом із відповідними комплексними параметрами.
- Гармонічні струм і напругу на елементах кола подають їхніми символічними зображеннями із збереженням додатних напрямів відліку.
- Аналізують комплексну схему заміщення відносно комплексних миттєвих значень методами аналізу резистивних кіл.
- За потреби, комплексні миттєві значення до



а *б*

Електричне коло (*а*) та його комплексна схема заміщення (*б*).

$U_{вх} = 12$ В $f_{вх} = 50$ Гц $\alpha_{\hat{a}\tilde{o}} = 0$ $R_L = 3$ Ом

$R_р = 10$ Ом $L = 25$ мГн

$$\dot{i}_{\text{âõ}}(t)=\frac{\dot{u}_{\text{âõ}}(t)}{\underline{Z}_{\text{âõ}}}=\frac{\dot{u}_{\text{âõ}}(t)}{\underline{Z}_{\text{ê}}+\underline{Z}_{\mathrm{R_p}}}=\frac{12e^{j{}^\circ}e^{j\omega_{\text{âõ}}t}}{R_{\mathrm{L}}+j\omega_{\text{âõ}}L+R_{\mathrm{p}}}=\frac{12e^{j\omega_{\text{âõ}}t}}{13+j7{,}85}=$$

$$=12e^{j\omega_{\text{âõ}}t}/15e^{j31^\circ}=0{,}79e^{-j31^\circ}e^{j\omega_{\text{âõ}}t}.$$

$$\dot{U}_{\text{ê}}=\dot{I}_{\text{âõ}}\underline{Z}_{\text{ê}}=0{,}79e^{-j31^\circ}(3+j7{,}85)=0{,}79e^{-j31^\circ}8{,}4e^{j69^\circ}=$$

$$=6{,}64e^{j38^\circ}\ \text{В}$$

$$P_{\text{ак}}=\mathrm{Re}[\dot{P}_{s\text{к}}]=\mathrm{Re}[\dot{U}_{\text{к}}I^{*}_{\text{к}}]=\mathrm{Re}[6{,}64e^{j38^\circ}\,0{,}79e^{j31^\circ}]=$$

$$\mathrm{Re}[52{,}5e^{j69^\circ}]=5{,}25\cos 69^\circ=1{,}87\ \text{Вт.}$$

$$P_{\text{ак}}=I^{2}_{\text{к}}R_{\mathrm{L}}=0{,}79^{2}\cdot 3=0{,}6243=1{,}87\ \text{Вт.}$$

Закони Кірхгофа у символічній формі

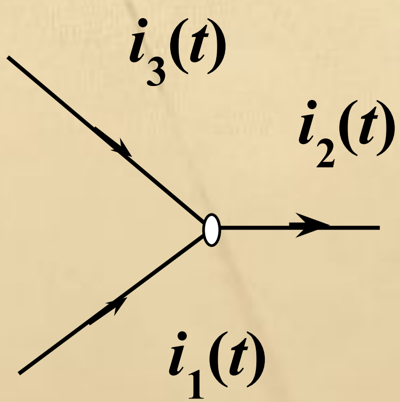
- При переході до символічних зображень їх частотні еквіваленти мають стільки ж зовнішніх виводів, що і самі елементи. В комплексних моделях багатополюсників можуть додатково з'явитися «внутрішні» вузли, проте на кількість «зовнішіх» вони не впливають.
- Для символічних зображень зберігається та сама система напрямів відліку, яка була визначена для гармонічних напруг і струмів. Усе це дає змогу поширити закони Кірхгофа і

$$\sum_{k=1}^{q} \dot{i}(t) = \sum_{k=1}^{q} \dot{I}_{mk} e^{j\omega t} = 0. \qquad \sum_{k=1}^{q} \dot{I}_{mk} = \sum_{k=1}^{q} I_{mk} e^{j\alpha_{ik}} = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{q} \dot{u}(t) = \sum_{k=1}^{q} \dot{U}_{mk} e^{j\omega t} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{q} \dot{U}_{mk} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{q} \dot{U}_{k} = 0.$$

До вузла електричного кола підключені три гілки (див. рис.). Струм першої $i_1(t)=10\sqrt{2}\sin(\omega t-61^\circ)$, ***другої*** $i_2(t)=14{,}1\sin(\omega t-151^\circ)$, ***а третьої*** $i_3(t)=20\sin(\omega t+164^\circ)$***. Перевірити виконання першого закону Кірхгофа для комплесних миттєвих значень.***

$$-i_3(t)+i_2(t)-i_1(t)=0$$



$$-\dot{I}_{m3}e^{j\omega t}+\dot{I}_{m2}e^{j\omega t}-\dot{I}_{m1}e^{j\omega t}=$$

$$=(-20e^{j164^\circ}+14{,}1e^{-j151^\circ}-10\sqrt{2}e^{-j61^\circ})e^{j\omega t}=$$

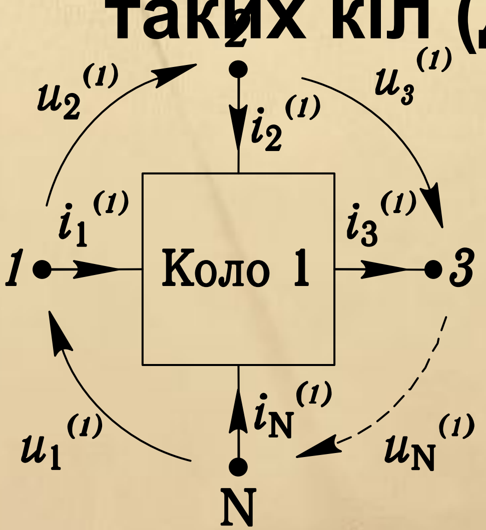
$$=[-20\cos 164^\circ-j20\sin 164^\circ+14{,}1\cos(-151^\circ)-$$

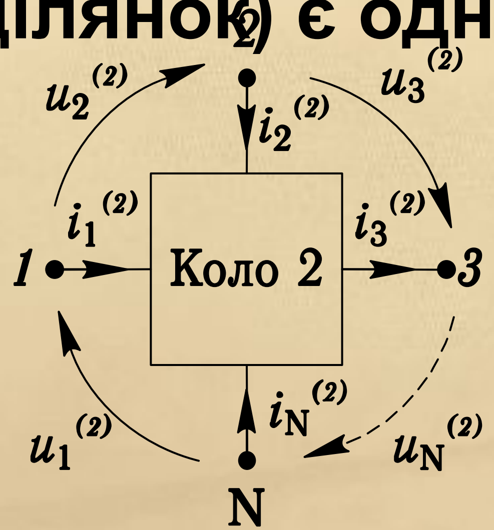
$$j14{,}1\sin 151^\circ-10\sqrt{2}\cos(-61^\circ)+j10\sqrt{2}\sin 61^\circ]e^{j\omega t}=$$

$$=[19{,}2-j5{,}52-12{,}3-j6{,}78-6{,}89+j12{,}3]\approx 0.$$

Метод еквівалентних перетворень

- **Основою цього методу є *теорема про еквівалентність перетворень*, згідно з якою коло (його ділянка) еквівалентне іншому колу (ділянці), якщо миттєві значення струмів і напруг на відповідних зовнішніх виводах таких кіл (ділянок) є однакові.**





Графічна ілюстрація теореми про еквівалентні перетворення.

$$\begin{cases} i_1^{(1)} = i_1^{(2)};\ i_2^{(1)} = i_2^{(2)};\ldots \\ i_N^{(1)} = i_N^{(2)}; \\ u_1^{(1)} = u_1^{(2)};\ u_2^{(1)} = u_2^{(2)};\ldots \\ u_N^{(1)} = u_N^{(2)}. \end{cases}$$

Первинні та вторинні параметри електричних кіл

Шукані струм та напругу (реакції) електричних кіл називають *первинними параметрами*, а відношення реакції (напруга чи струм) та дії (ототожнюється також з напругою чи струмом), що її спричинює, *вторинними параметрами* або *функціями кола* чи *системи*.

Поняттям «*вторинний параметр*» чи «*функція кола* або *системи*» оперують при дослідженні лінійних чотириполюсних чи двополюсних кіл.

$$Z_{\text{вх}} = R_{\text{вх}} = u_{\text{вх}} / i_{\text{вх}} = u_1 / i_1.$$

$$Y_{\text{вх}} = 1 / Z_{\text{вх}} = 1 / R_{\text{вх}} = i_{\text{вх}} / u_{\text{вх}} = i_1 / u_1.$$

$$K = K_u = u_{\text{вих}} / u_{\text{вх}} = u_2 / u_1$$

$$K = K_i = i_{\text{вих}} / i_{\text{вх}} = i_2 / i_1.$$

$$K = Y_{\text{пер.вх}} = i_{\text{вих}} / u_{\text{вх}} = i_2 / u_1,$$

$$K = Z_{\text{пер.вх}} = u_{\text{вих}} / i_{\text{вх}} = u_2 / i_1.$$

$$Z_{\text{вих}} = u_{\text{вих}} / i_{\text{вих}} = u_2 / i_2.$$

$$Y_{\text{вих}} = i_{\text{вих}} / u_{\text{вих}} = i_2 / u_2.$$

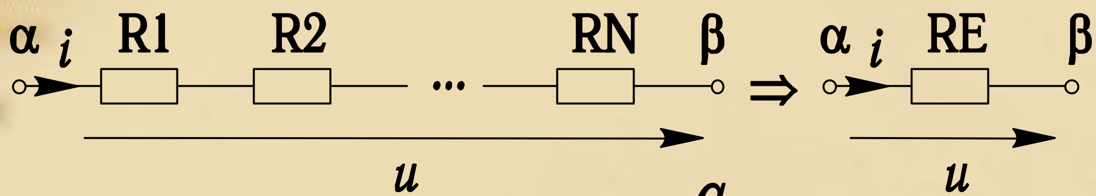
$$Z_{\text{пер.вх}} = \frac{u_{\text{вих}}}{i_{\text{вх}}} \neq \frac{1}{Y_{\text{пер.вх}}} = \frac{1}{i_{\text{вих}} / u_{\text{вх}}} = \frac{u_{\text{вх}}}{i_{\text{вих}}}.$$

$$Y_{\text{вих}} = 1 / Z_{\text{вих}}; \;\; Z_{\text{вих}} = 1 / Y_{\text{вих}}.$$

Найхарактерніші види еквівалентних перетворень

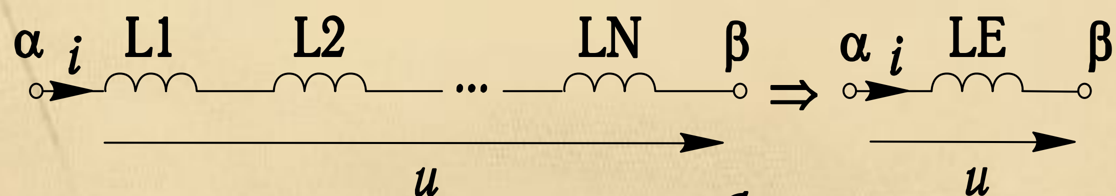
- ***послідовного та паралельного з’єднань;***
- ***з’єднання зірки на трикутник та навпаки;***
- ***джерел;***
- ***на основі принципу суперпозиції, теореми про еквівалентне джерело (генератор), теореми заміщення чи компенсації, теореми взаємності або оборотності.***

Послідовне з’єднання



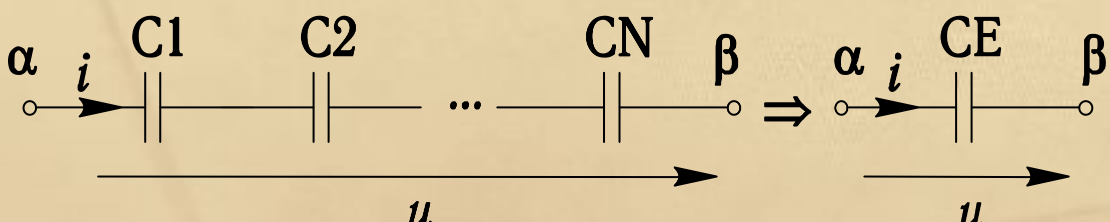
а

$$R_E = \sum_{i=1}^{n} R_i$$



б

$$L_E = \sum_{i=1}^{n} L_i$$



в

$$\frac{1}{C_E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Подільник напруги

$\dot{I}$

$\underline{Z}_1$ $\dot{U}_1$

$\dot{I}_1$ $\dot{U}$

$\underline{Z}_2$ $\dot{U}_2$

$\dot{I}_2$

Двоелементні подільники напруги

$$\dot{I} = \dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{U} / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \Rightarrow \dot{I} = \dot{U} / \underline{Z}_E \Rightarrow \underline{Z}_E = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

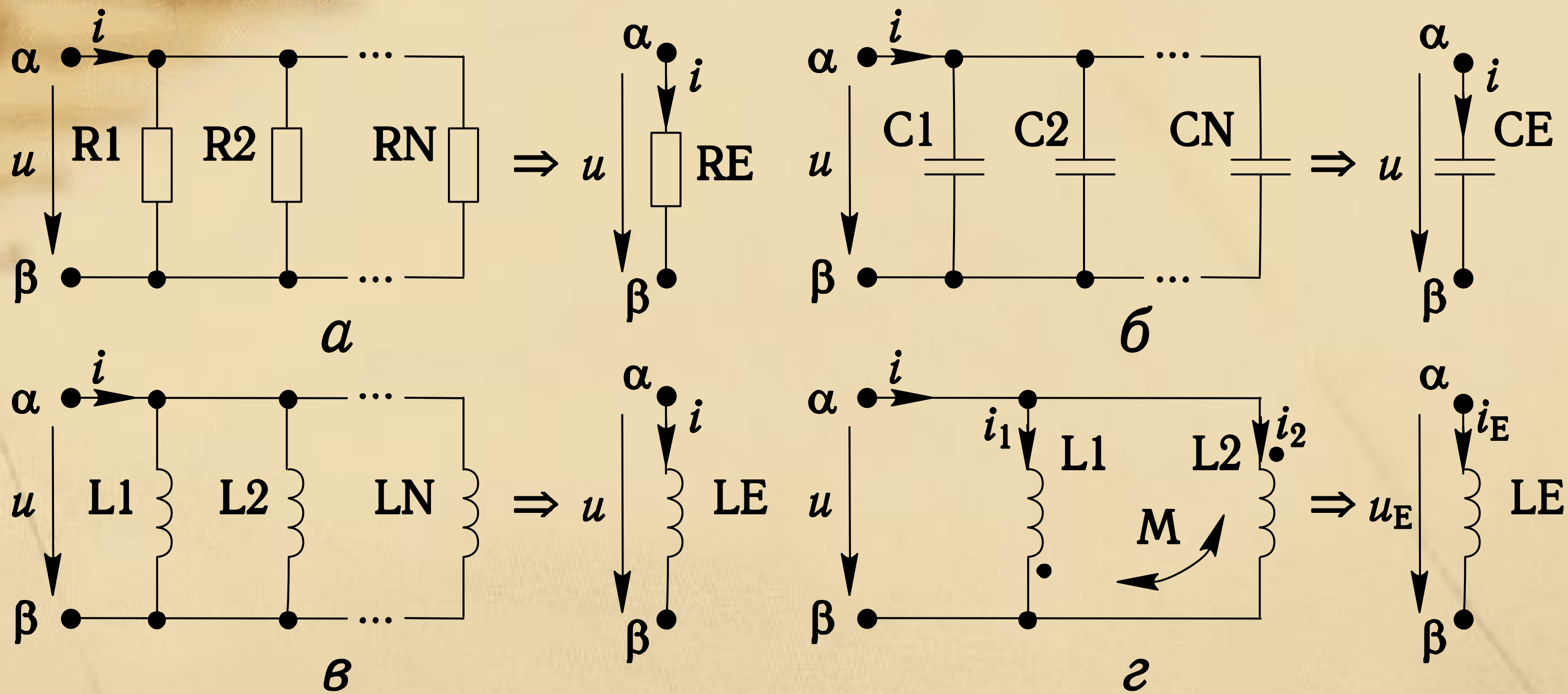
$$K_{u1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \quad K_{u2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

$$\dot{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \dot{U} = K_{u1} \dot{U}; \quad \dot{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \dot{U} = K_{u2} \dot{U}.$$

Основні властивості подільника напруги

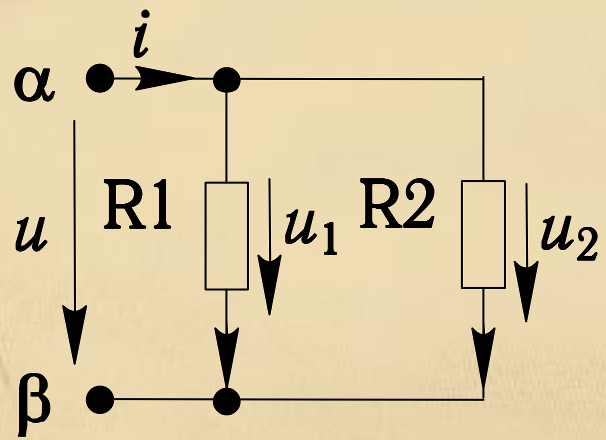
- ***загальна (вхідна) напруга ділиться між елементами пропорційно опору;***
- ***коефіцієнт пропорційності між напругою елемента та загальною напругою є коефіцієнтом передачі (поділу) напруги і для резистивного подільника завжди менший від одиниці;***
- ***загальний опір подільника напруги (вхідний опір) дорівнює сумі опорів його елементів;***
- ***коефіцієнт передачі напруги від входу до s-го***

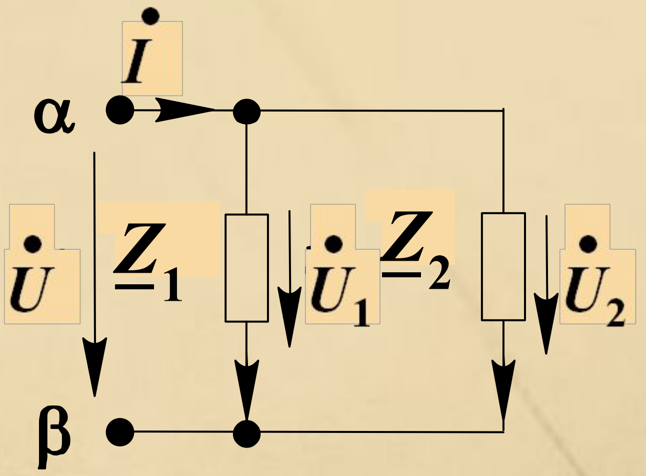
Паралельне з’єднання



$$\frac{1}{R_{\mathrm{E}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{R_k}\Leftrightarrow G_{\mathrm{E}}=\sum_{k=1}^{n}G_k;\qquad \frac{1}{L_{\mathrm{E}}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{L_k};\qquad C_{\mathrm{E}}=\sum_{k=1}^{n}C_k.$$

Подільник струму





Двоелементні подільники струму

$$\dot{I} = \dot{U}\,\underline{Y}_\text{E} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{U}\,\underline{Y}_1 + \dot{U}\,\underline{Y}_2 \quad \Rightarrow \underline{Y}_\text{E} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

$$K_{i1} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}; \quad K_{i2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}} = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}$$

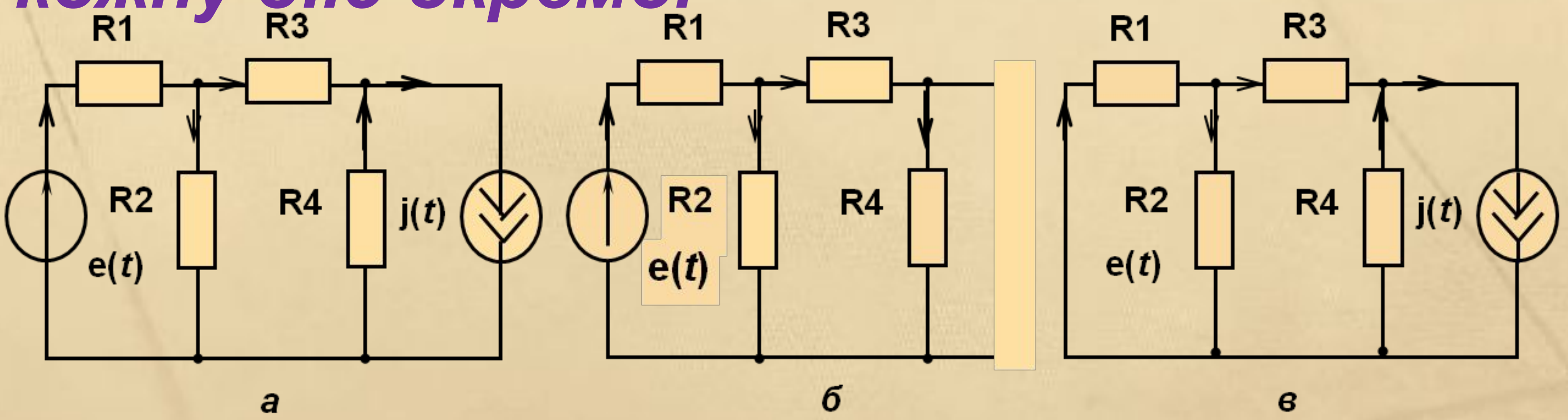
$$\dot{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\dot{I} = K_{i1}\dot{I}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\dot{I} = K_{i2}\dot{I}.$$

Основні властивості подільника струму

- ***загальний (вхідний) струм ділиться між елементами пропорційно провідності або обернено пропорційно опору;***
- ***коефіцієнт пропорційності між струмом елемента та загальним струмом є коефіцієнтом передачі (поділу) струму і для резистивного подільника завжди менший від одиниці;***
- ***загальна (вхідна) провідність подільника струму дорівнює сумі провідностей його елементів;***

Теорема суперпозиції (накладання)

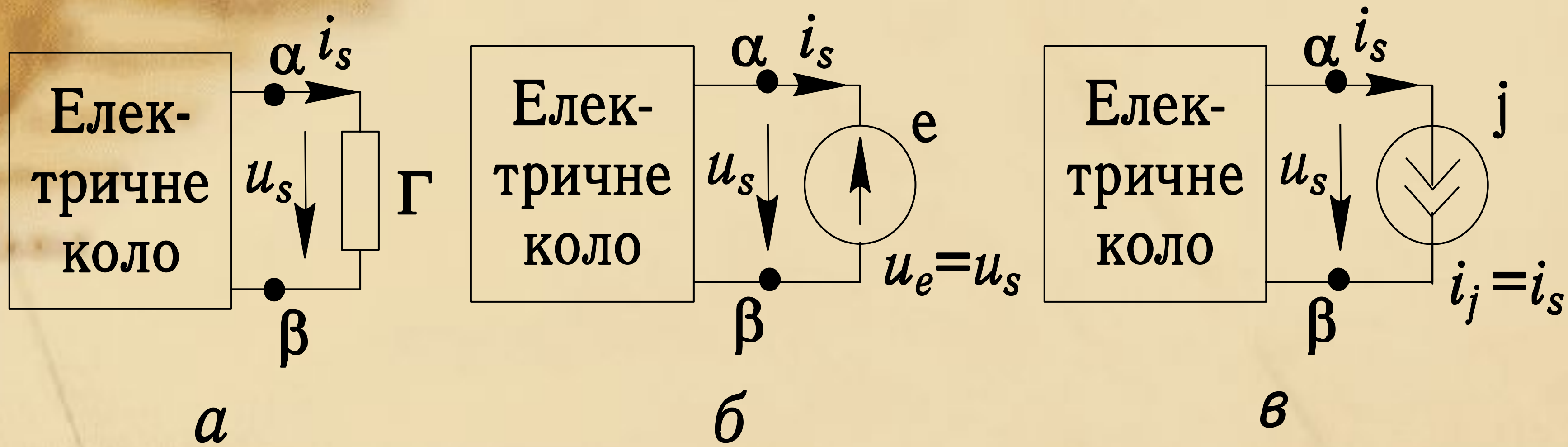
- ***Реакція лінійного (у тому числі і параметричного) кола на суму незалежних дій дорівнює алгебраїчній сумі реакцій на кожну дію окремо.***



$$\dot{i}_{\mathrm{R1}} = \dot{i}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{R1}} + \dot{i}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{R1}};\ \dot{i}_{\mathrm{R2}} = \dot{i}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{R2}} + \dot{i}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{R2}};\ \dot{i}_{\mathrm{R3}} = \dot{i}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{R3}} + \dot{i}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{R3}};\ \dot{i}_{\mathrm{R4}} = \dot{i}^{\mathrm{j}}_{\mathrm{R4}} - \dot{i}^{\mathrm{e}}_{\mathrm{R4}}.$$

Теорема компенсації або заміщення

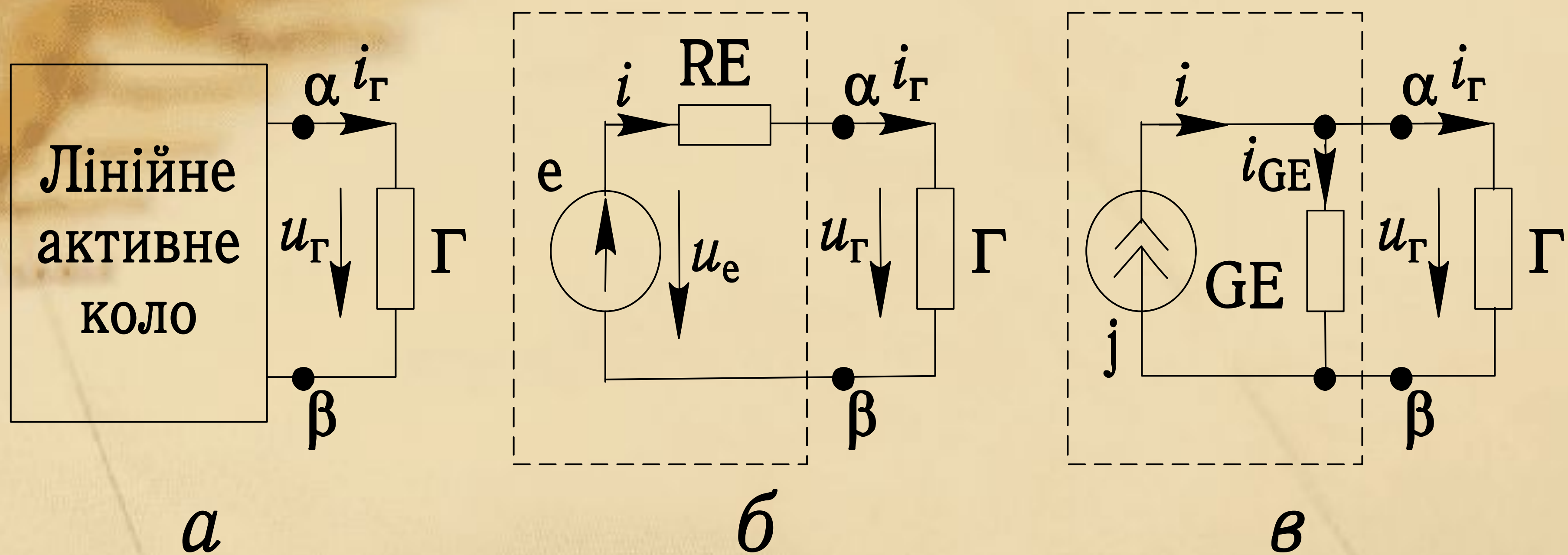
- Будь-яку (не обов'язково лінійну) кондуктивно зв'язану з іншими частинами кола гілку з відомим струмом i_s чи напругою u_s можна еквівалентно замінити відповідно незалежним джерелом струму, задавальний струм якого дорівнює i_s, чи незалежним джерелом напруги із задавальною напругою u_s без зміни електричного стану інших ділянок кола. Напрям джерела струму збігається з додатним напрямом струму i_s гілки, а напрям джерела напруги протилежний



До теореми компенсації: ***а*** **– початкове коло з виділеною гілкою;** ***б*** **– заміна гілки на джерело напруги;**
в **– заміна гілки на джерело струму.**

Теорема про еквівалентний генератор або активний двополюсник

- **Будь-яке лінійне активне електричне коло відносно його деякого двополюсного пасивного елемента чи пасивної гілки (лінійних або нелінійних) можна еквівалентно замінити послідовним з'єднанням ідеального незалежного джерела напруги (відповідно до теореми Тевенена) чи паралельним з'єднанням ідеального незалежного джерела струму (згідно з теоремою Нортона) і пасивного двополюсника. Задавальна напруга еквівалентного джерела напруги та задавальний струм еквівалентного джерела струму визначаються відповідно напругою в режимі холостого ходу (*напругою холостого ходу* $u_{х.х}$) та струмом у режимі короткого замикання (*струмом короткого замикання* $i_{к.з}$), виділених відносно лінійного активного кола елемента чи гілки, а опір пасивного**



Графічна ілюстрація теореми про активний двополюсник:
а **– навантажений активний двополюсник;**
б **– коло Тевенена;** ***в*** **– коло Нортона.**

Основні співвідношення до теореми про еквівалентний генератор

$$\dot{U}_{\text{x.x}} / \dot{I}_{\text{ê.ç}} = \underline{Z}_{\text{E}}\,. \qquad u_{\text{x.x}} / i_{\text{к.з}} = R_{\text{E}}\,.$$

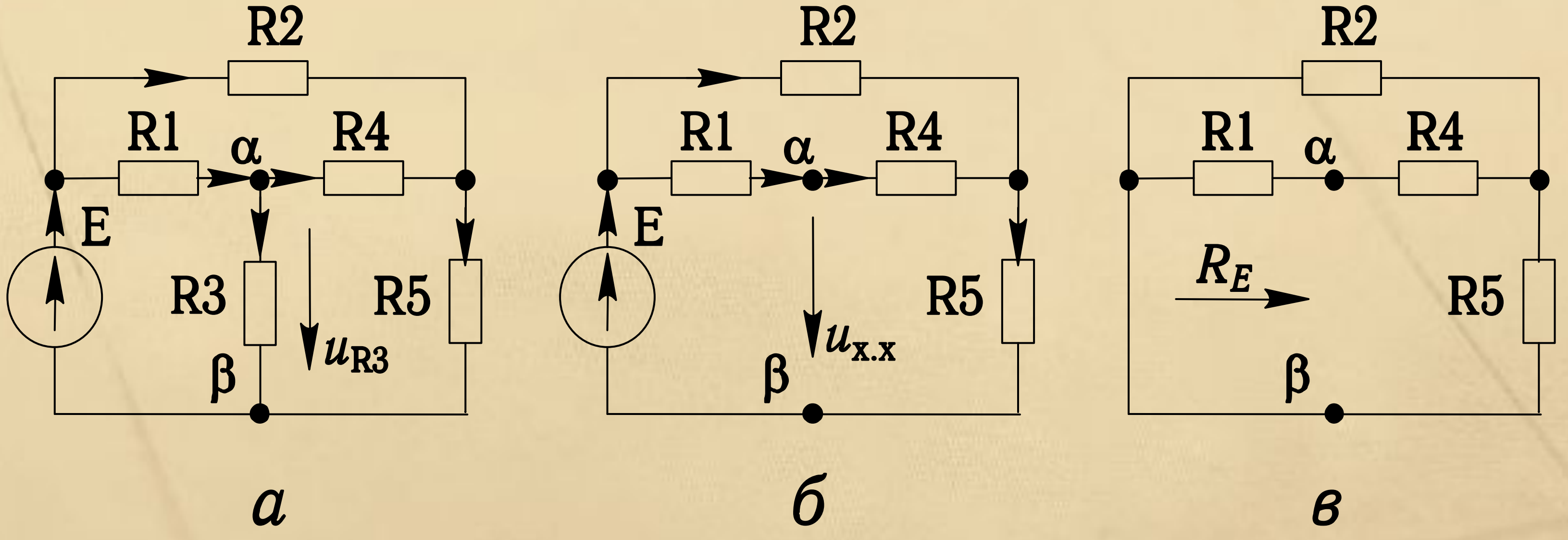
$$\dot{U}_{\alpha\beta} = \dot{U}_{\text{ã}} = \dot{U}_{\text{x.x}}\big|_{\underline{Z}_{\text{ã}}=\infty} = \dot{U}\;;\;\; \underline{Z}_{\text{E}} = \underline{Z}_{\text{âõ}}\big|_{\underline{Z}_{\text{Ã}}=\infty};\;\; \dot{I}_{\text{j}} = \dot{I}_{\text{ã}}\Big|_{\underline{Z}_{\text{ã}}=0} = \dot{I}_{\text{ê.ç}}\,.$$

$$\dot{U}_{\text{ã}} = \dot{U}_{\text{x.x}}\,\underline{Z}_{\text{ã}} / (\underline{Z}_{\text{ã}} + \underline{Z}_{\text{E}});\;\; \dot{I}_{\text{ã}} = \dot{U}_{\text{ã}} / \underline{Z}_{\text{ã}}.$$

$$\dot{I}_{\text{ã}} = \dot{I}_{\text{ê.ç}} \frac{\underline{Z}_{\text{Å}}}{\underline{Z}_{\text{ã}} + \underline{Z}_{\text{E}}} = \dot{I}_{\text{ê.ç}} \frac{\underline{Y}G_{\text{ã}}}{\underline{Y}_{\text{ã}} + \underline{Y}_{\text{E}}};\;\; \dot{U}_{\text{ã}} = \dot{I}_{\text{ã}}\,\underline{Z}_{\text{ã}}.$$

Приклад.

Визначити напругу на R3, застосувавши еквівалентні перетворення, зокрема, і ті, що базуються на теоремі Тевенена.



Приклад застосування теореми Тевенена.

$$u_{\text{x.x}} = u_{\text{E}} - u_{\text{R1}} = u_{\text{E}} - i_{\text{R1}} R_1; \quad i_{\text{R1}} = i_{\text{E}} R_2 / (R_2 + R_1 + R_4);$$

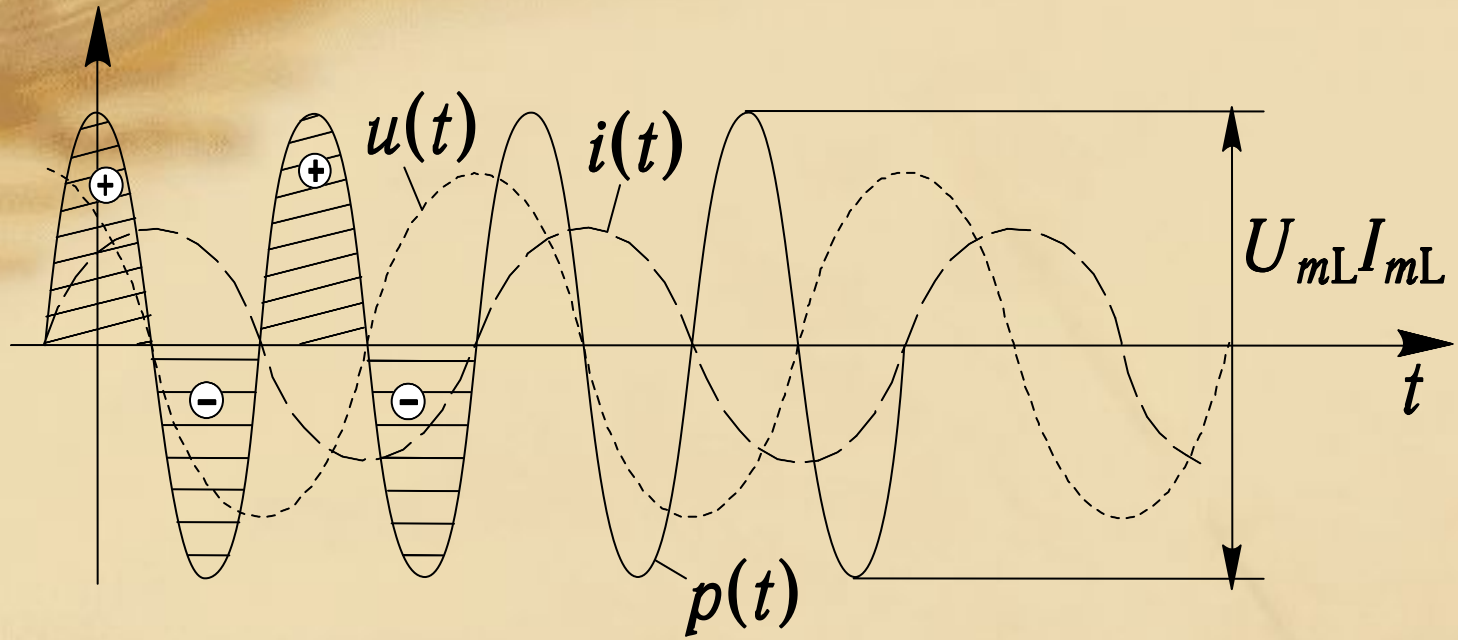
$$i_{\text{E}} = u_{\text{E}} / [(R_2 \| (R_1 + R_4)) + R_5] = \frac{u_{\text{E}} (R_2 + R_1 + R_4)}{(R_2 + R_5)(R_1 + R_4) + R_2 R_5}.$$

$$R_{\text{E}} = R_{\alpha\beta} = R_1 \| (R_4 + R_2 \| R_5) = \frac{R_1 [R_4 + R_2 R_5 / (R_2 + R_5)]}{R_1 + R_4 + [R_2 R_5 / (R_2 + R_5)]}.$$

$$u_{\text{R3}} = u_{\text{x.x}} R_3 / (R_3 + R_{\text{E}}).$$

Д Я К У Ю

З А У В А Г У !



$$\max\left[\frac{dw_{\mathrm{L}}(t)}{dt}\right] = \max[p_{\mathrm{L}}(t)] = P_{m\mathrm{L}} = U_{\mathrm{L}} I_{\mathrm{L}}$$

$$P_{q\mathrm{L}} = U_{\mathrm{L}} I_{\mathrm{L}} = 0,5 U_{m\mathrm{L}} I_{m\mathrm{L}} = \omega L I_{\mathrm{L}}^2 = \frac{U_{\mathrm{L}}^2}{\omega L} = b_{\mathrm{L}} U_{\mathrm{L}}^2$$