

Производная по направлению и градиент функции

Часть 1

Производная по направлению

Для характеристики скорости изменения поля $U = U(M)$ в заданном направлении введём понятие «производной по направлению».

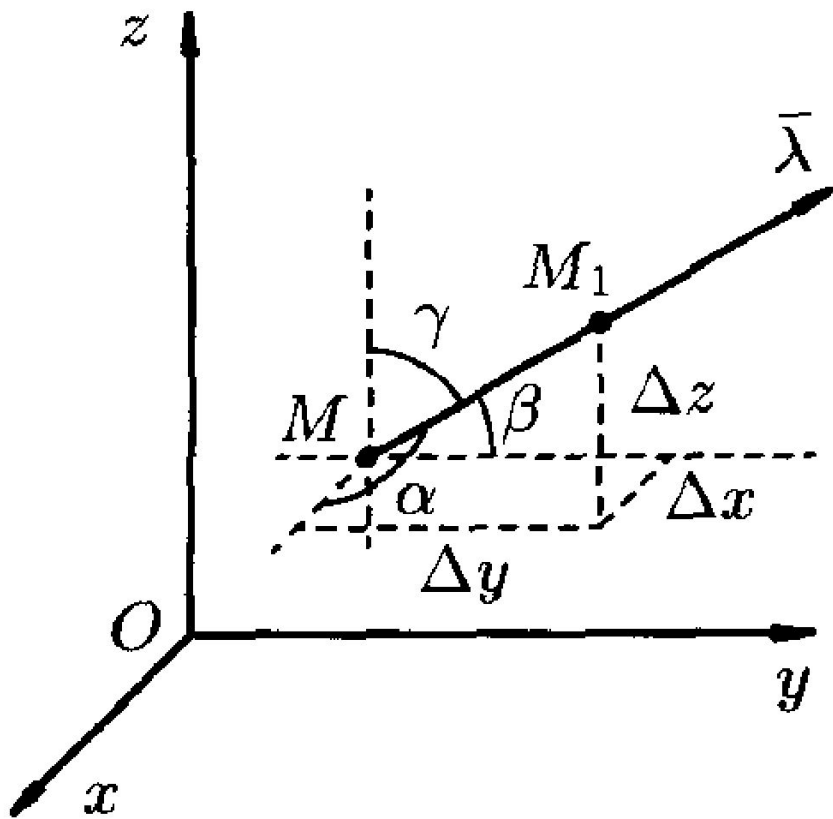
Возьмём в пространстве, где задано поле $U = U(x, y, z)$, некоторую точку M и найдём скорость изменения функций U при движении точки M в произвольном направлении $\vec{\lambda}$. Пусть вектор $\vec{\lambda}$ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

Приращение функций U , возникающее при переходе от точки к некоторой точке M_1 в направлении вектора $\vec{\lambda}$ определяется как

$$\Delta U = U(M_1) - U(M),$$

или

$$\Delta U = U(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - U(x; y; z)$$



Тогда

$$\Delta\lambda = |MM_1| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Производной от функции $U = U(M)$ в точке M по направлению $\overline{\lambda}$ называется предел

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|MM_1|}$$

Производная по направлению $\vec{\lambda}$ и характеризует скорость изменения функции (поля) в точке M по этому направлению. Если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} > 0$, то функция U возрастает в направлении $\vec{\lambda}$, если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то функция U в направлении $\vec{\lambda}$ убывает. Кроме того, величина $\left| \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right|$ представляет

собой мгновенную скорость изменения функции U в направлении $\vec{\lambda}$ в точке M : чем больше $\left| \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right|$, тем быстрее изменяется функция U . В этом состоит физический смысл производной по направлению.

Переходя к пределу при $\Delta\lambda \rightarrow 0$, получим формулу для вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma \quad (1)$$

Пример

Найти производную функции $U = x^2 + y^2 - 4yz$ в точке $M(0;1;2)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(2;3;3)$.

Решение: Находим вектор $\overline{MM_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{MM_1} = (2;2;1), \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{3}.$$

Находим частные производные функции и вычисляем их значения в точке M :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2y - 4z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -4y,$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_M = 2 \cdot 0 = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_M = 2 - 4 \cdot 2 = -6, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_M = -4.$$

Следовательно, по формуле (1) имеем:

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right|_M = 0 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Поскольку $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то заданная функция в данном направлении убывает.