Производная по направлению и градиент функции

Часть 1

Производная по направлению

Для характеристики скорости изменения поля $U = U(M)$ в заданном направлении введём понятие «производной по направлению».

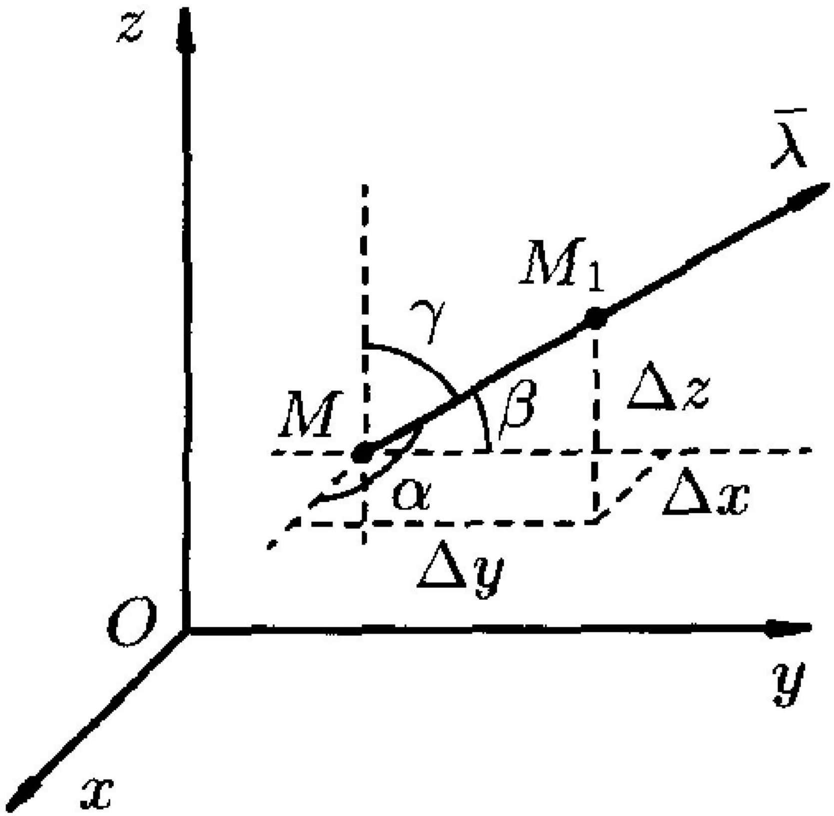
Возьмём в пространстве, где задано поле $U = U(x, y, z)$, некоторую точку M и найдём скорость изменения функций U при движении точки M в произвольном направлении $\overline{\lambda}$. Пусть вектор $\overline{\lambda}$ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

Приращение функций U, возникающее при переходе от точки к некоторой точке M_1 в направлении вектора $\overline{\lambda}$ определяется как

$$\Delta U = U(M_1) - U(M),$$

или

$$\Delta U = U(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z) - U(x; y; z)$$



Тогда

$$\Delta\lambda = \left|MM_1\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Производной от функции $U = U(M)$ ***в точке М по направлению*** $\bar{\lambda}$ называется предел

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \lim_{M_1 \to M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|MM_1|}$$

Производная по направлению $\overline{\lambda}$ и характеризует скорость изменения функции (поля) в точке M по этому направлению. Если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} > 0$, то функция U возрастает в направлении $\overline{\lambda}$, если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то функция U в направлении $\overline{\lambda}$ убывает. Кроме того, величина $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции U в направлении $\overline{\lambda}$ в точке M: чем больше $\left|\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|$, тем быстрее изменяется функция U. В этом состоит физический смысл производной по направлению.

Переходя к пределу при $\Delta\lambda \to 0$, получим формулу для вычисления производной по направлению:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma \qquad (1)$$

Пример

Найти производную функции $U = x^2 + y^2 - 4yz$ в точке $M(0;1;2)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(2;3;3)$.

Решение: Находим вектор $\overline{MM_1}$ и его направляющие косинусы:

$$\overline{MM_1} = (2;2;1), \quad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Находим частные производные функции и вычисляем их значения в точке M:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial U}{\partial y} = 2y - 4z, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -4y,$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M = 2 \cdot 0 = 0, \ \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M = 2 - 4 \cdot 2 = -6, \ \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M = -4.$$

Следовательно, по формуле ***(1)*** имеем:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right|_M = 0 \cdot \frac{2}{3} - 6 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{16}{3}.$$

Поскольку $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0,$ то заданная функция в данном направлении убывает.