

Введение в теорию графов

Граф отображает элементный состав системы и структуру связей.

Граф - это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек.

Понятие графа

Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются смежными. Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

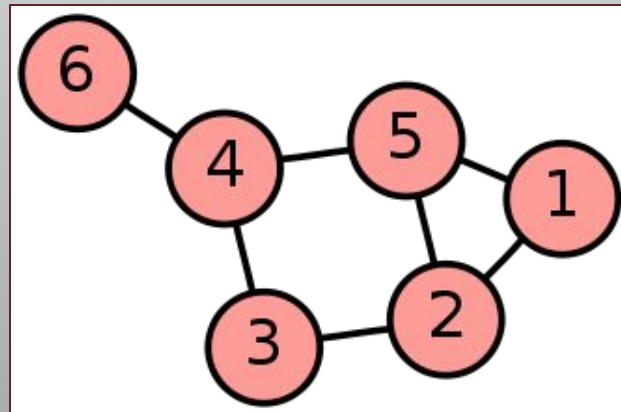


Рис. 1. Граф с шестью вершинами и семью ребрами

Элементы графа

Петля - это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.

Пустым (нулевым) называется граф без ребер.

Полным называется граф, в котором каждые две вершины смежные.

Нулевой граф

Граф, состоящий из «изолированных» вершин, называется нулевым графом

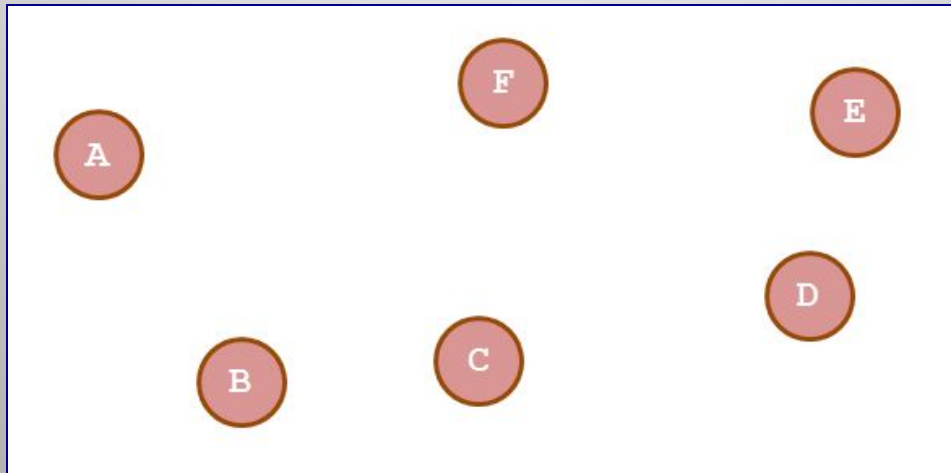


Рис. 2. Нулевой граф

Неполный граф

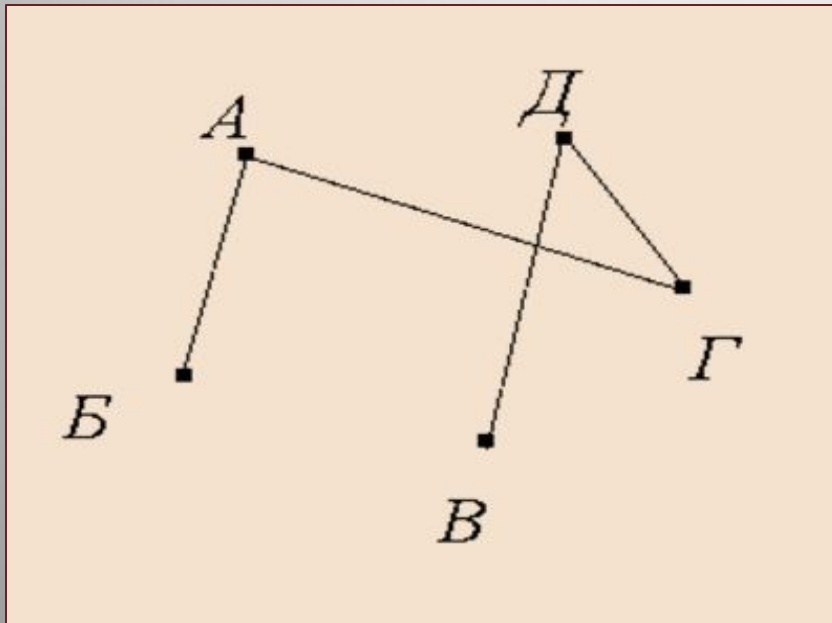


Рис. 3. Неполный граф

Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются неполными графами.

Степень графа

Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется степенью вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется нечетной, а чётную степень – чётной .

Если степени всех вершин графа равны, то граф называется однородным. Таким образом, любой полный граф — однородный.

Если граф полный и имеет n вершин, то количество его ребер равно $n(n-1)/2$

Задание 1. Существует ли полный граф с семью ребрами?

ОТВЕТ

Решение: Зная количество ребер, узнаем количество вершин.

$$n(n-1)/2=7.$$

$$n(n-1)=14.$$

n и $(n-1)$ – это два последовательных натуральных числа. Число **14** нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел, значит, данное уравнение не имеет решений. Следовательно, такого графа не существует.

Задание 2.

1. Построить полный граф, если известно что он содержит в себе 7 вершин.
2. Составьте схему проведения розыгрыша кубка по олимпийской системе, в которой участвуют 10 команд.

Ориентированный граф

Граф называется ориентированным (или орграфом), если некоторые ребра имеют направление. Это означает, что в орграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. Если ребра ориентированы (что показывают стрелками), то они называются дугами.

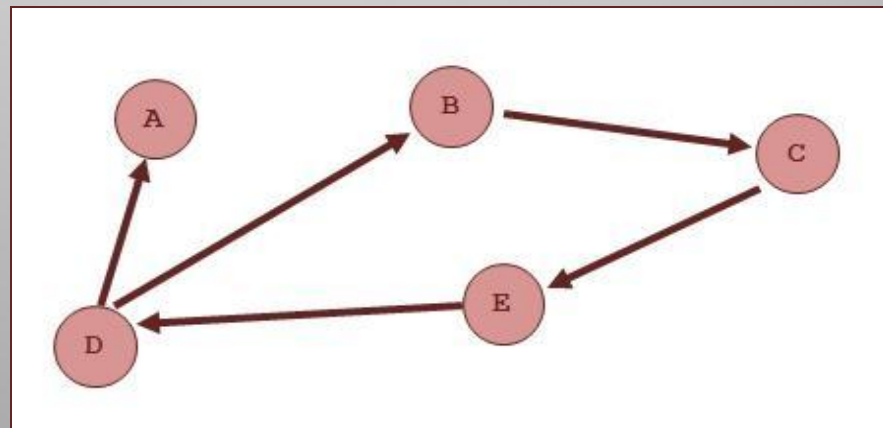


Рис. 4. Ориентированный граф

Ориентированный и неориентированный графы

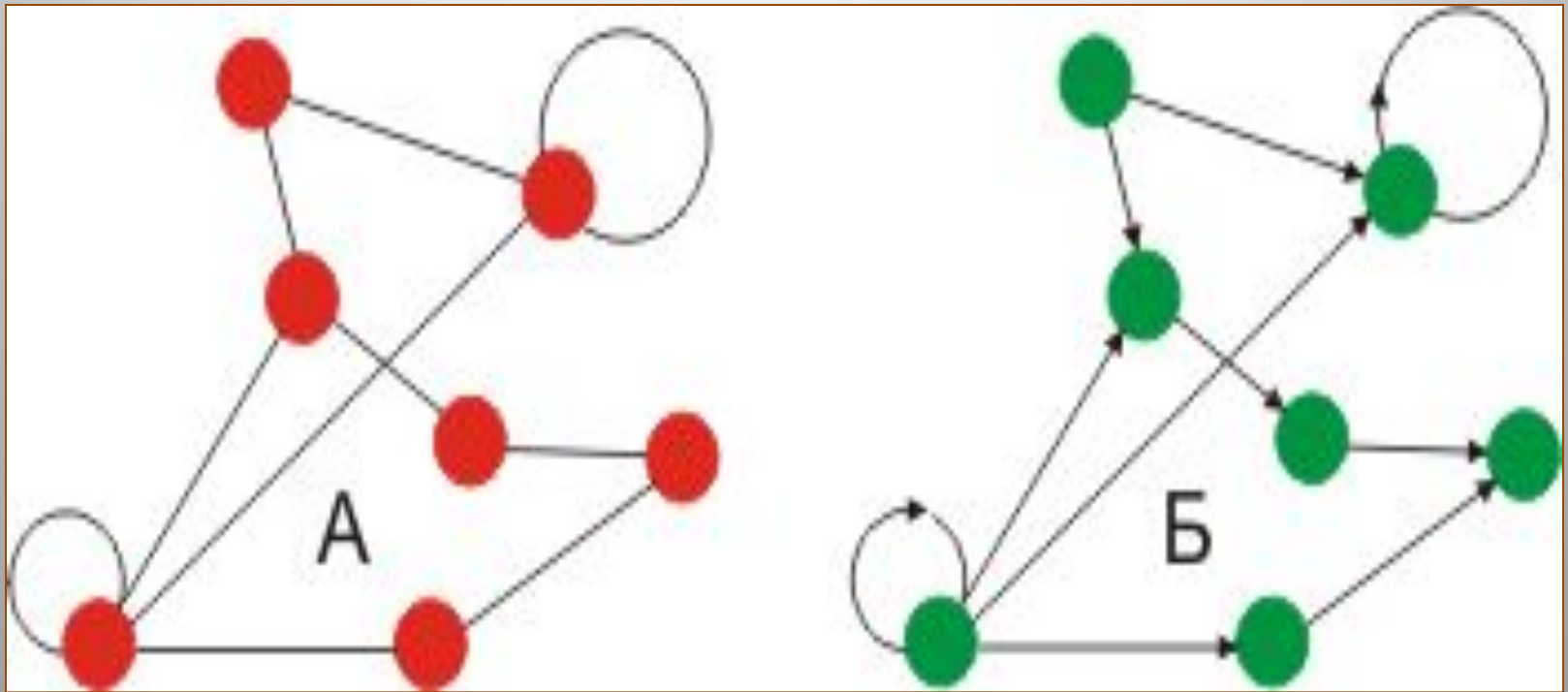


Рис. 5. Примеры неориентированного и ориентированного графов (А и Б)

Задание 3. Построить граф по заданному условию:

В соревнованиях по футболу участвуют 6 команд. Каждую из команд обозначили буквами А, В, С, D, E, F. Через несколько недель некоторые из команд уже сыграли друг с другом:

A с C, D, F;

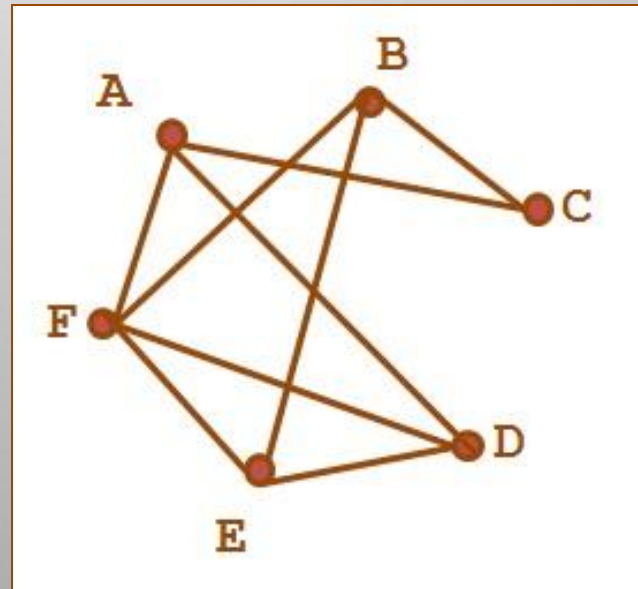
B с C, E, F;

C с A, B;

D с A, E, F;

E с B, D, F;

F с A, B, D.



ОТВЕТ

Изображение графа

Не следует путать изображение графа с собственно графом (абстрактной структурой), поскольку одному графу можно сопоставить не одно графическое представление.

Изображение призвано лишь показать, какие пары вершин соединены рёбрами, а какие — нет. Один и тот же граф может выглядеть на рисунках по-разному. На рисунке 6 (а, б, в) изображен один и тот же граф .

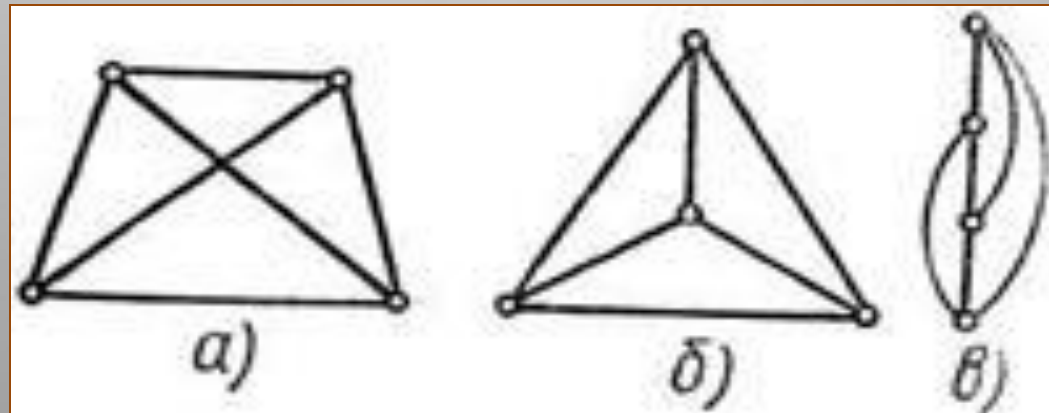
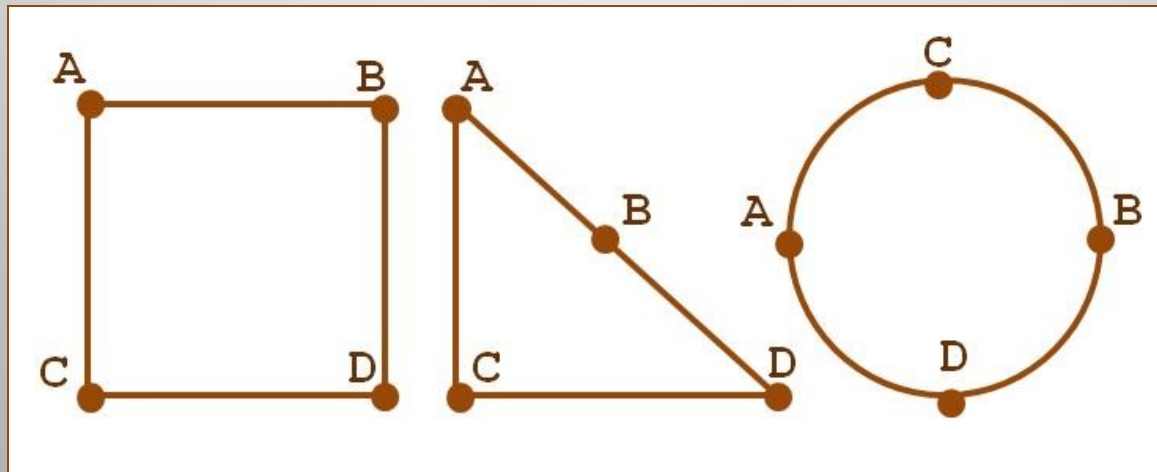


Рис. 6. Примеры изображения графа

Задание 4. Определить изображают ли фигуры на рисунке один и тот же граф или нет.



1)

2)

3)

ОТВЕТ

Рисунки 1 и 2 являются изображениями одного графа.

Рисунок 3 - изображением другого графа

Путь в графе

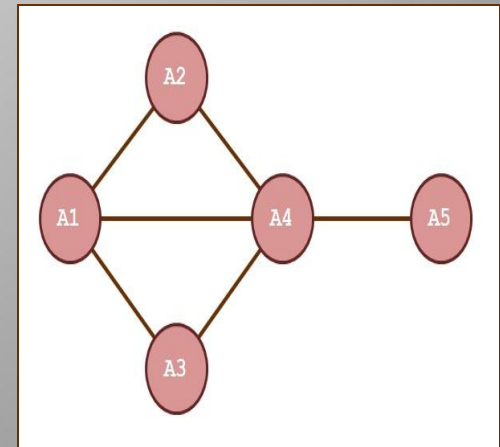
Путём в графе называется такая последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.

Задание 5. Определить какая из перечисленных последовательностей путём не является.

1. (A1 A4); (A4 A5).
2. (A1 A2); (A2 A4); (A4 A5).
3. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A4); (A4, A5).
4. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A3); (A3 A4); (A4, A5).

Третья последовательность (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A4); (A4, A5).

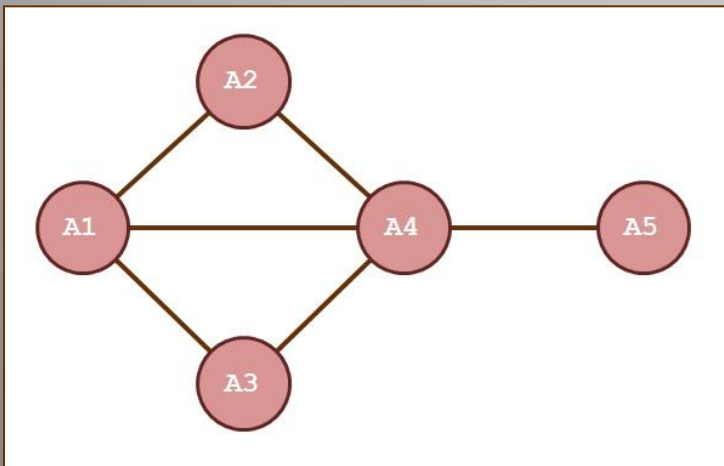
ОТВЕТ



Путь называется простым, если он не проходит ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 6. Найти пути и простые пути:

1. $(A1\ A4)$; $(A4\ A5)$.
2. $(A1\ A2)$; $(A2\ A4)$; $(A4\ A5)$.
3. $(A1\ A4)$; $(A4\ A2)$; $(A2\ A1)$; $(A1\ A4)$; $(A4, A5)$.
4. $(A1\ A4)$; $(A4\ A2)$; $(A2\ A1)$; $(A1\ A3)$; $(A3\ A4)$; $(A4, A5)$.



Первая, вторая и четвертая последовательности являются путями, а третья нет, т.к. ребро $(A1, A4)$ повторяется. Первая и вторая последовательность являются простыми путями, а четвертая нет, т.к. вершины $A1$ и $A4$ повторяются.

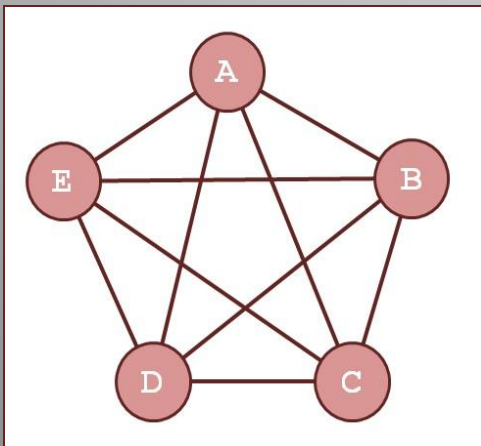
ОТВЕТ

Понятие цикла в графе

Циклом называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины.

Простым циклом в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

Задание 7. Назовите в графе циклы, содержащие:



- a) 4 ребра;
- b) 6 ребер;
- c) 5 ребер;
- d) 10 ребер.

Какие из этих циклов являются простыми?

ОТВЕТ

ОТВЕТ

Решение :

- a) (AB, BC, CE, EA), (CD, DA, AB, BC), (EB, BC, CD, DE) и т.д. – простые циклы.
- b) (DB, BE, EA, AB, BC, CD), (EC, CA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.
- c) (AB, BC, CD, DE, EA), (AC, CE, EB, BD, DA) и т.д. – простые циклы.
- d) (AC, CE, EB, BD, DA, AB, BC, CD, DE, EA), (EB, BD, DA, AC, CE, EA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.