

# Введение в теорию графов

**Граф отображает элементный состав системы и структуру связей.**

**Граф - это множество точек или вершин и множество линий или ребер, соединяющих между собой все или часть этих точек.**

# Понятие графа

Вершины, прилегающие к одному и тому же ребру, называются смежными. Два ребра, у которых есть общая вершина, также называются смежными (или соседними).

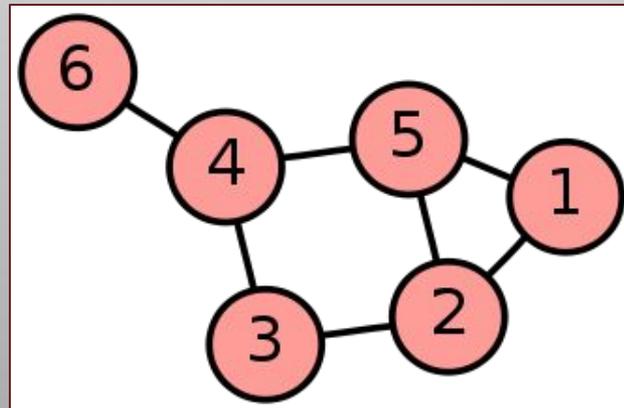


Рис. 1. Граф с шестью вершинами и семью ребрами

## Элементы графа

**Петля - это дуга, начальная и конечная вершина которой совпадают.**

**Пустым (нулевым) называется граф без ребер.**

**Полным называется граф, в котором каждые две вершины смежные.**

## Нулевой граф

Граф, состоящий из «изолированных» вершин, называется нулевым графом

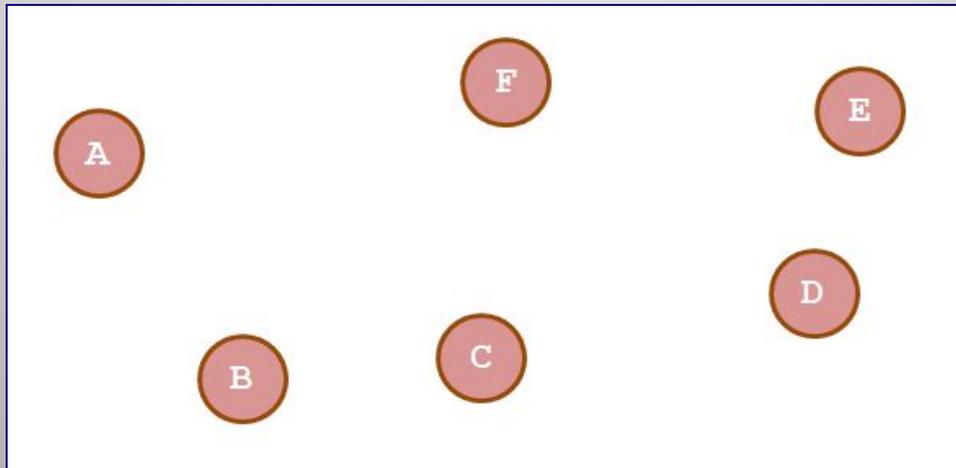


Рис. 2. Нулевой граф

## Неполный граф

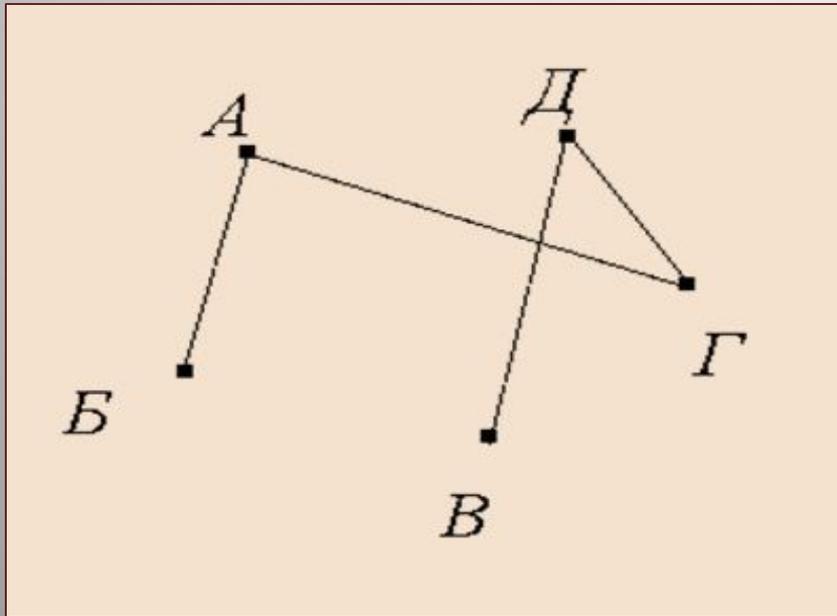


Рис. 3. Неполный граф

Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются неполными графами.

## Степень графа

Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется степенью вершины. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется нечетной, а чётную степень – чётной .

Если степени всех вершин графа равны, то граф называется однородным. Таким образом, любой полный граф — однородный.

Если граф полный и имеет  $n$  вершин, то количество его ребер равно  $n(n-1)/2$

**Задание 1.** Существует ли полный граф с семью ребрами?

**ОТВЕТ**

Решение: Зная количество ребер, узнаем количество вершин.

$$n(n-1)/2=7.$$

$$n(n-1)=14.$$

$n$  и  $(n-1)$  – это два последовательных натуральных числа. Число **14** нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел, значит, данное уравнение не имеет решений. Следовательно, такого графа не существует.

## Задание 2.

1. Построить полный граф, если известно что он содержит в себе 7 вершин.
2. Составьте схему проведения розыгрыша кубка по олимпийской системе, в которой участвуют 10 команд.

# Ориентированный граф

Граф называется ориентированным (или орграфом), если некоторые ребра имеют направление. Это означает, что в орграфе некоторая вершина может быть соединена с другой вершиной, а обратного соединения нет. Если ребра ориентированы (что показывают стрелками), то они называются дугами.

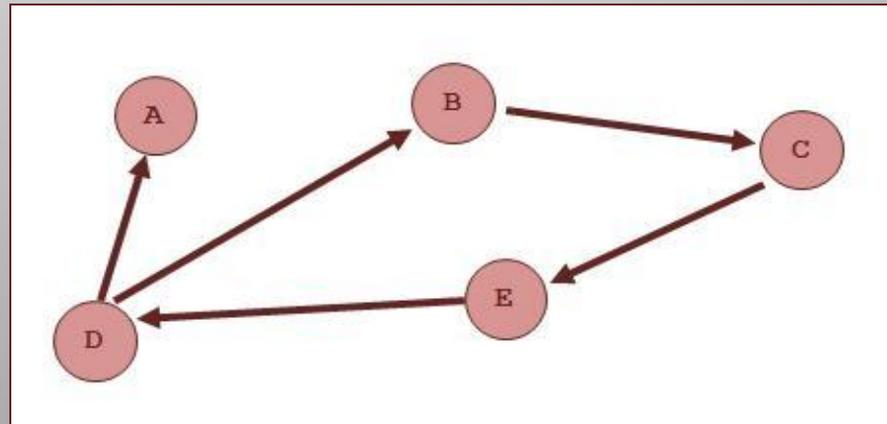


Рис. 4. Ориентированный граф

# Ориентированный и неориентированный графы

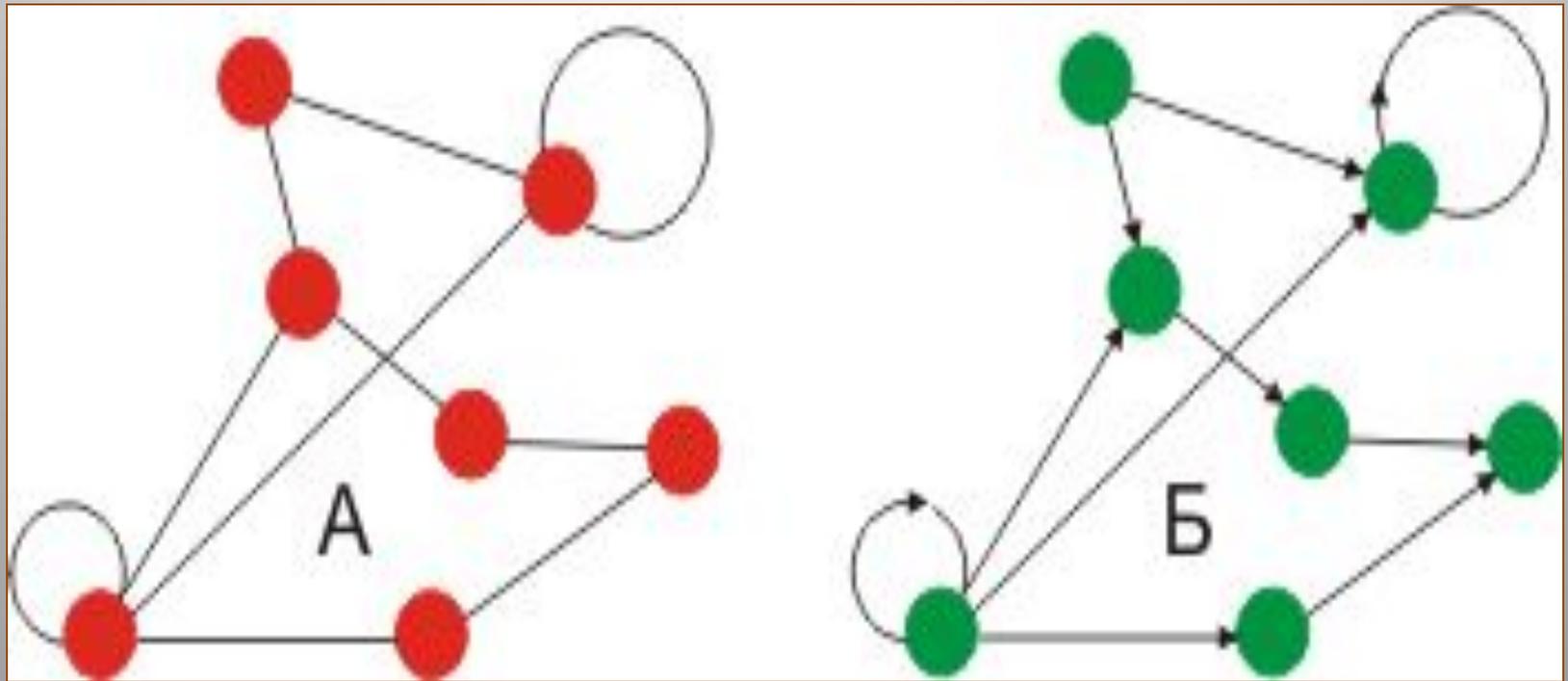


Рис. 5. Примеры неориентированного и ориентированного графов (А и Б)

## Задание 3. Построить граф по заданному условию:

В соревнованиях по футболу участвуют 6 команд. Каждую из команд обозначили буквами А, В, С, D, E, F. Через несколько недель некоторые из команд уже сыграли друг с другом:

А с С, D, F;

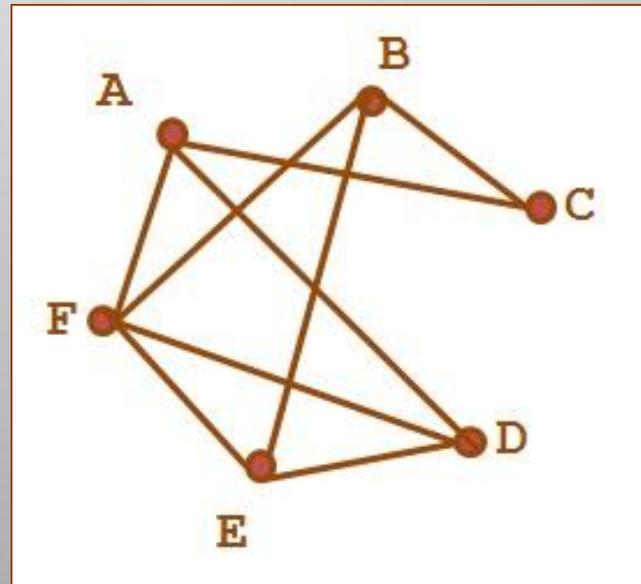
В с С, E, F;

С с А, В;

D с А, E, F;

E с В, D, F;

F с А, В, D.



ОТВЕТ

## Изображение графа

Не следует путать изображение графа с собственно графом (абстрактной структурой), поскольку одному графу можно сопоставить не одно графическое представление.

Изображение призвано лишь показать, какие пары вершин соединены рёбрами, а какие — нет. Один и тот же граф может выглядеть на рисунках по-разному. На рисунке 6 (а, б, в) изображен один и тот же граф .

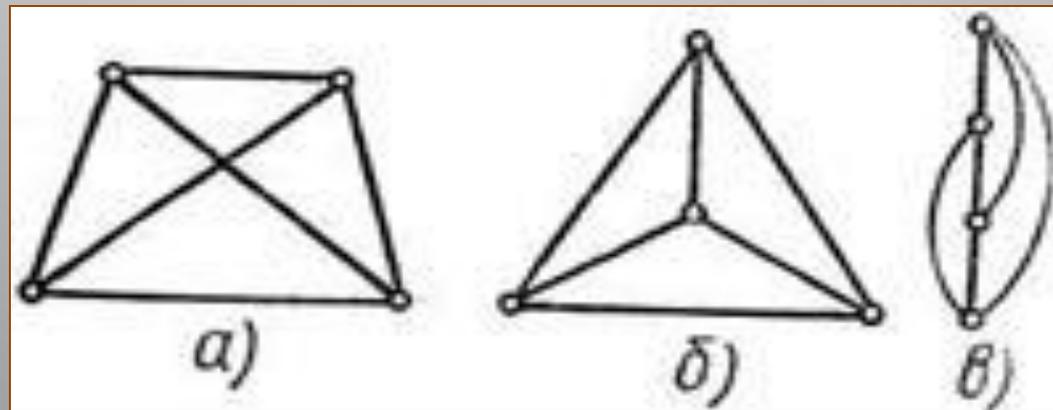
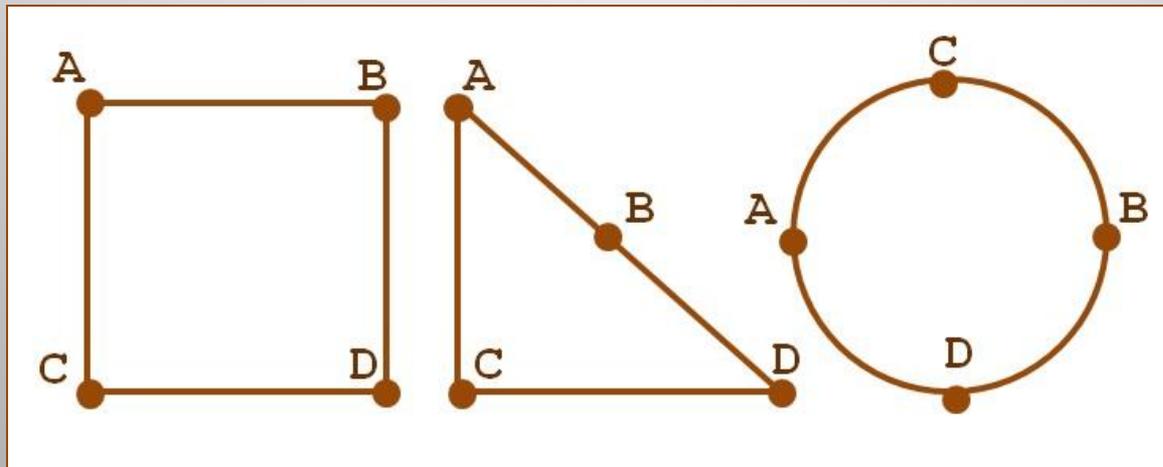


Рис. 6. Примеры изображения графа

**Задание 4.** Определить изображают ли фигуры на рисунке один и тот же граф или нет.



1)

2)

3)

**ОТВЕТ**

Рисунки 1 и 2 являются изображениями одного графа.

Рисунок 3 - изображением другого графа

# Путь в графе

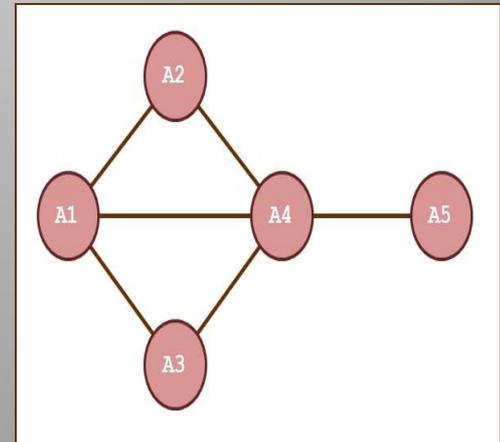
Путём в графе называется такая последовательность ребер, в которой каждые два соседних ребра имеют общую вершину и никакое ребро не встречается более одного раза.

Задание 5. Определить какая из перечисленных последовательностей путём не является.

1. (A1 A4); (A4 A5).
2. (A1 A2); (A2 A4); (A4 A5).
3. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A4); (A4, A5).
4. (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A3); (A3 A4); (A4, A5).

Третья последовательность (A1 A4); (A4 A2); (A2 A1); (A1 A4); (A4, A5).

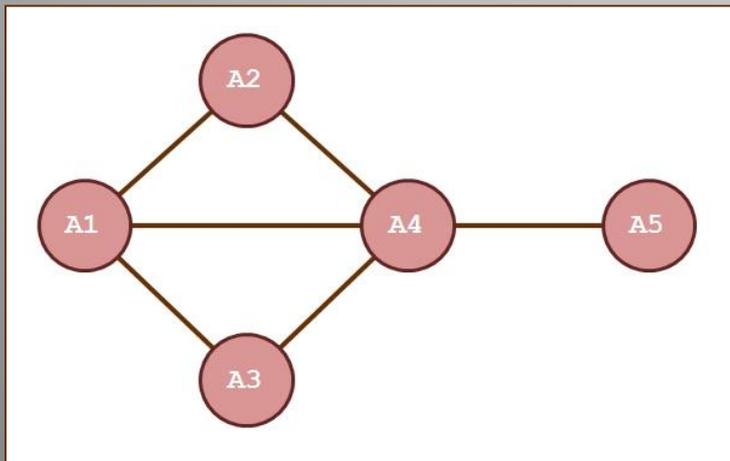
ОТВЕТ



Путь называется простым, если он не проходит ни через одну из вершин графа более одного раза.

**Задание 6. Найти пути и простые пути:**

1.  $(A1\ A4)$  ;  $(A4\ A5)$  .
2.  $(A1\ A2)$  ;  $(A2\ A4)$  ;  $(A4\ A5)$  .
3.  $(A1\ A4)$  ;  $(A4\ A2)$  ;  $(A2\ A1)$  ;  $(A1\ A4)$  ;  $(A4, A5)$  .
4.  $(A1\ A4)$  ;  $(A4\ A2)$  ;  $(A2\ A1)$  ;  $(A1\ A3)$  ;  $(A3\ A4)$  ;  $(A4, A5)$  .



Первая, вторая и четвертая последовательности являются путями, а третья нет, т.к. ребро  $(A1, A4)$  повторяется. Первая и вторая последовательность являются простыми путями, а четвертая нет, т.к. вершины  $A1$  и  $A4$  повторяются.

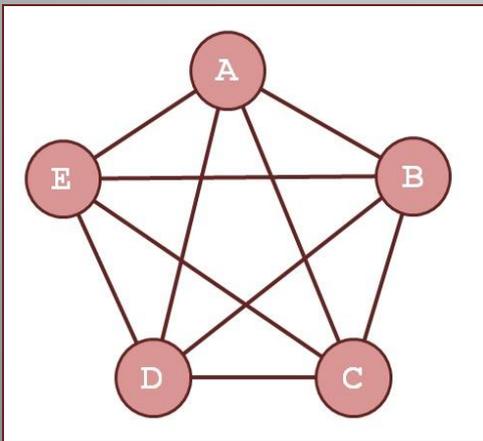
**ОТВЕТ**

## Понятие цикла в графе

Циклом называется путь, в котором совпадают его начальная и конечная вершины.

Простым циклом в графе называется цикл, не проходящий ни через одну из вершин графа более одного раза.

**Задание 7. Назовите в графе циклы, содержащие:**



- a) 4 ребра;
- b) 6 ребер;
- c) 5 ребер;
- d) 10 ребер.

Какие из этих циклов являются простыми?

**ОТВЕТ**

# ОТВЕТ

## Решение :

- a) (AB, BC, CE, EA), (CD, DA, AB, BC), (EB, BC, CD, DE) и т.д. – простые циклы.
- b) (DB, BE, EA, AB, BC, CD), (EC, CA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.
- c) (AB, BC, CD, DE, EA), (AC, CE, EB, BD, DA) и т.д. – простые циклы.
- d) (AC, CE, EB, BD, DA, AB, BC, CD, DE, EA), (EB, BD, DA, AC, CE, EA, AB, BC, CD, DE) и т.д. – циклы.