

Тема 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.4. Двойственные задачи

Двойственная (обратная) задача - это задача линейного программирования формулируемая с помощью определенных правил непосредственно **из условий ИСХОДНОЙ**, или прямой задачи.

1.4.1. Правила составления двойственных задач

Исходная задача (I)	Двойственная задача (II)
1. $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, l}$	1. $y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, l}$
2. $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i = \overline{l+1, m}$	2. y_i - произвольные числа, $i = \overline{l+1, m}$,
3. $x_j \geq 0, \quad j = \overline{l, s}, \quad s \leq n$	3. $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, s};$
4. x_j - произвольные числа, $j = \overline{s+1, n}$	4., $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j \quad j = \overline{s+1, n},$
5. $F(\overline{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$	5. $Z(\overline{Y}) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$

-
1. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в прямой задаче. Каждому i -му ограничению исходной задачи соответствует переменная y_i и, наоборот, каждому j -му ограничению двойственной задачи соответствует переменная x_j исходной задачи.
 2. Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы коэффициентов системы ограничений прямой задачи путем **транспонирования**.
 3. Система ограничений двойственной задачи записывается в виде **неравенств противоположного смысла** неравенствам системы ограничений прямой задачи.
-

-
- 4.** Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции прямой задачи.
 - 5.** Двойственная задача решается на минимум, если целевая функция прямой задачи задается на максимум, и наоборот.
 - 6.** Коэффициентами целевой функции двойственной задачи служат свободные члены системы ограничений прямой задачи.
-

7. Если переменная прямой задачи $x_j \geq 0$, то j -ое условие системы ограничений двойственной задачи является неравенством. Если x_j - ое – любое число, то j -ое условие двойственной задачи представляет собой уравнение.

8. Если i -ое соотношение прямой задачи является неравенством, то соответствующая оценка i -ого ресурса – переменная y_i , если i -е соотношение представляет собой уравнение, то переменная двойственной задачи y_i - любое число.

- Математические модели двойственных задач могут быть **симметричными** и **несимметричными**.
 - В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а в двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными.
 - В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.
-

В приведенной модели задачи I b_i ($i = \overline{1, m}$) обозначает запас ресурса S_i , потребляемого при производстве единицы продукции P_j ($j = \overline{1, n}$); c_j – прибыль (выручка) от реализации единицы продукции P_j (или цена продукции P_j).

Предположим, что некоторая компания решила закупить ресурсы S_1, S_2, \dots, S_m и необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы y_1, y_2, \dots, y_m . Очевидно, что покупающая компания заинтересована в том, чтобы затраты на все ресурсы Z в количествах b_1, b_2, \dots, b_m по ценам соответственно y_1, y_2, \dots, y_m

были минимальны, т.е. $Z(\bar{Y}) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$.

С другой стороны, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была бы не меньше той суммы, которую предприятие может получить при переработке ресурсов в готовую продукцию. На изготовление единицы продукции P_j расходуется a_{ij} единиц продукции ресурса S_i по цене соответственно y_i . Поэтому для удовлетворения требований продавца затраты на ресурсы, потребляемые при изготовлении единицы продукции P_j , должны быть не меньше ее цены c_j , т.е.
$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j.$$

Таким образом, экономико-математическая модель задачи I заключается в следующем: Составить такой план выпуска продукции $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, при котором прибыль (выручка) от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов.

Экономико-математическая модель задачи II (двойственной к задаче I): Найти такой набор цен (оценок) ресурсов $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, при котором общие затраты на ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не меньше прибыли (выручки) от реализации этой продукции.

Цены ресурсов y_1, y_2, \dots, y_m в экономической литературе получили названия: *учетные, неявные, теневые*. Смысл этих названий состоит в том, что *условные, «ненастоящие» цены*. В отличие от «внешних» цен c_1, c_2, \dots, c_n на продукцию, известных, как правило, до начала производства, цены ресурсов y_1, y_2, \dots, y_m являются *внутренними*, так как они задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи, поэтому их часто называют *оценками* ресурсов.

1.4.2. Теоремы двойственности

Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается с помощью теорем двойственности.

Основное неравенство теории двойственности. Пусть имеется пара двойственных задач I и II. Покажем, что для любым допустимых решений $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ исходной и двойственной задач справедливо неравенство

$$F(\bar{X}) \leq Z(\bar{Y}) \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad (1.4.2.1).$$

☞ Умножив неравенства системы ограничений исходной задачи $I \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$,
 ($i = \overline{1, m}$) соответственно на переменные y_1, y_2, \dots, y_m и сложив правые и левые
 части полученных неравенств, имеем

$$\sum_{i=1}^m y_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i. \quad (1.4.2.2)$$

Аналогично преобразовав систему ограничений двойственной задачи
 $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$ ($j = \overline{1, n}$) путем умножения обеих частей на переменные x_1, x_2, \dots, x_n
 и последующего их сложения, получим

$$\sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.4.2.3).$$

Так как левые части неравенств 1.4.2.2 – 1.4.2.3. представляют одно и то
 же выражение $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j y_i$, то в силу транзитивности неравенств
 ($a \leq b, a \geq c, \Rightarrow c \leq b$) получим доказываемое неравенство (1.4.2.1).

Достаточный признак оптимальности.

Теорема. Если $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и $\overline{Y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ – допустимые решения взаимно двойственных задач, для которых выполняется равенство

$$F(\overline{X}^*) = Z(\overline{Y}^*) \quad (1.4.2.4),$$

то \overline{X}^* – оптимальное решение исходной задачи I, а \overline{Y}^* – двойственной задачи II.

Первая (основная) теорема двойственности

Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны:

$$F_{\max} = Z_{\min} \text{ или } F(\overline{X}^*) = Z(\overline{Y}^*)$$

Если линейная функция одной из задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.

Пусть даны две взаимно двойственные задачи I 1.
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0, & j = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$F(\overline{X^*}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \text{ и II } \begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, & j = \overline{1, n} \\ y_i \geq 0, & i = \overline{1, m} \end{cases} \quad Z(\overline{Y^*}) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min .$$

Если каждую из этих задач решать симплексным методом, то необходимо привести их к каноническому виду, для чего в систему ограничений задачи I следует ввести m неотрицательных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+p}, \dots, x_{n+m}$, а в систему ограничений задачи II – n неотрицательных переменных $y_{m+1}, y_{m+2}, \dots, y_{m+p}, \dots, y_{m+n}$.

Системы ограничений каждой из взаимно двойственных задач примут вид:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad (i = \overline{1, m})$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - y_{m+1} = c_j, \quad (j = \overline{1, n})$$

Установим соответствие между первоначальными переменными одной из двойственных задач и дополнительными переменными другой задачи.

Переменные исходной задачи I							
Первоначальные				Дополнительные			
x_1	x_2	x_j	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	x_{n+i}	x_{n+m}
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
y_{m+1}	y_{m+2}	y_{m+j}	y_{m+n}	y_1	y_2	y_j	y_m
Дополнительные				Первоначальные			
Переменные исходной задачи II (1.4.2.5)							

Теорема. Положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи, т.е. для любых $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$, если $x_j^* > 0$, то $y_{m+j}^* = 0$; если $x_{n+i}^* > 0$, то $y_i^* = 0$, и аналогично, если $y_i^* > 0$, то $x_{n+i}^* = 0$; если $y_{m+j}^* > 0$, то $x_j^* = 0$.

Из данной теоремы следует важный вывод о том, что введенное ранее соответствие (1.5.2.5) между переменными взаимно двойственных задач при достижении оптимума (т.е. на последнем шаге решения каждой задачи симплексным методом) представляет соответствие между **основными** (как правило, не равными нулю) переменными одной из двойственных задач и **неосновными** (равными нулю) переменными другой задачи, когда они образуют допустимые базисные решения.

Рассмотренная теорема является следствием следующей теоремы.

-
- **Вторая теорема двойственности.** Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.
 - **Замечание.** Если в одной из взаимно двойственных задач нарушается единственность оптимального решения, то оптимальное решение двойственной задачи вырожденное.
 - Это связано с тем, что при нарушении единственности оптимального решения исходной задачи в выражении линейной функции ее оптимального решения через неосновные переменные отсутствует хотя бы одна из основных переменных.
-

-
- Компоненты оптимального решения двойственной задачи называются оптимальными (двойственными) оценками исходной задачи.
 - Канторович Л.В. назвал их **объективно обусловленными оценками** (скрытые доходы, маргинальные оценки, разрешающие множители).
 - Объективно обусловленные оценки ресурсов определяют степень дефицитности ресурсов: по оптимальному плану производства дефицитные (т.е. полностью используемые) ресурсы получают ненулевые оценки, а недефицитные – нулевые оценки.
 - В оптимальный план производства могут попасть только рентабельные, неубыточные виды продукции (правда, критерий рентабельности здесь своеобразный: цена продукции не превышает затраты на потребляемые при ее изготовлении ресурсы, а в точности равна им).

- Для выяснения того, что показывают численные значения объективно обусловленных оценок ресурсов, рассмотрим следующую теорему.
- **Третья теорема двойственности.**

Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны значениям частных производных линейной функции $F_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ по соответствующим аргументам, т.е.

$$\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.4.2.6)$$

Из соотношения (1.5.2.6) следует, что объективно обусловленные оценки ресурсов показывают, на сколько денежных единиц изменится максимальная прибыль (выручка) от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на единицу.

С помощью теорем двойственности можно, решив симплексным методом исходную задачу, найти оптимальное решение двойственной задачи.

1.4.3. Двойственный симплекс-метод

- Метод, при котором вначале симплексным методом решается двойственная задача, а затем оптимальное решение исходной задачи находится с помощью теорем двойственности, называется **двойственным симплексным методом**.
 - Этот метод бывает выгодно применять, когда первое базисное решение исходной задачи недопустимое или, например, когда число ее ограничений m больше числа переменных n .
-

Алгоритм двойственного симплексного метода включает следующие этапы

□ 1. Составление псевдоплана.

Систему ограничений двойственной задачи требуется привести к системе неравенств смысла « \leq ».

Для этого обе части неравенств смысла « \geq » необходимо умножить на (-1).

Затем от системы неравенств смысла « \geq » переходят к системе уравнений, вводя неотрицательные дополнительные переменные, которые являются базисными переменными. Первый опорный план заносят в симплексную таблицу.

□ **2. Проверка плана на оптимальность.**

Если в полученном опорном плане не выполняются условие оптимальности, то решаем задачу симплексным методом.

Если в опорном плане условия оптимальности удовлетворяются и все значения базисных переменных – положительные числа, то получен оптимальный план.

Наличие отрицательных значений в столбце значений базисных переменных свидетельствуют о получении **псевдоплана.**

□ **3. Выбор ведущих строки и столбца.**

- Среди отрицательных значений базисных переменных выбирают наибольшее по абсолютной величине. Строка, соответствующая этому значению, является ведущей. Симплексную таблицу дополняют строкой θ , в которую заносят взятые по абсолютной величине результаты деления коэффициентов индексной строки на отрицательные коэффициенты ведущей строки. Минимальные значения θ определяют ведущий столбец и переменную, вводимую в базис. На пересечении ведущих строки и столбца находится разрешающий элемент.
-

□ 4. Расчет нового опорного плана.

Новый план получаем в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана – Гаусса. Далее переходим к этапу 2.

□ **Примечание:**

Если в псевдоплане есть хотя бы одно отрицательное число $b_i < 0$ такое, что все $a_{ij} \geq 0$ ($j = 1, n$)

, то задача вообще не имеет решения.
