Тема 2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.4. Двойственные задачи

Двойственная (обратная) задача - это задача линейного программирования формулируемая с помощью определенных правил непосредственно **из условий исходной**, или прямой задачи.

1.4.1. Правила составления двойственных задач

Исходная задача (I)	Двойственная задача (II)
1. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,l}$	1. $y_i \ge 0, \quad i=\overline{1,l}$
2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i=\overline{l+1,m}$	2. y_i - произвольные числа, $i=\overline{l+1,m}$;
3. $x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,s}, \quad s \le n$	3. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j, \quad j=\overline{1,s}$;
4. x_j - произвольные числа, $j=\overline{s+1,n}$	4., $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j \quad j=\overline{s+1,n}$;
5. $F(\overline{X})=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to \max$	5. $Z(\overline{Y})=\sum_{i=1}^{m} b_iy_i \to \min$

1. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в прямой задаче. Каждому i-му ограничению исходной задачи соответствует переменная y_i и, наоборот, каждому j-му ограничению двойственной задачи соответствует переменная x_j исходной задачи.
2. Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы коэффициентов системы ограничений прямой задачи путем ***транспонирования*.**
3. Система ограничений двойственной задачи записывается в виде ***неравенств противоположного*** *смысла* неравенствам системы ограничений прямой задачи.

4. Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции прямой задачи.

5. Двойственная задача решается на минимум, если целевая функция прямой задачи задается на максимум, и наоборот.

6. Коэффициентами целевой функции двойственной задачи служат свободные члены системы ограничений прямой задачи.

7. Если переменная прямой задачи $x_j \geq 0,$, то j-ое условие системы ограничений двойственной задачи является неравенством. Если x_j -ое – любое число, то j-ое условие двойственной задачи представляет собой уравнение.

8. Если i-ое соотношение прямой задачи является неравенством, то соответствующая оценка i-ого ресурса – переменная $y_i \geq 0$, если i-е соотношение представляет собой уравнение, то переменная двойственной задачи y_i-ое – любое число.

- Математические модели двойственных задач могут быть **симметричными** и **несимметричными**.
- В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а в двойственной – в виде неравенств, причем в последней переменные могут быть и отрицательными.
- В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

В приведенной модели задачи I b_i ($i = \overline{1, m}$) обозначает запас ресурса S_i, потребляемого при производстве единицы продукции P_j ($j = \overline{1, n}$); c_j – прибыль (выручка) от реализации единицы продукции P_j (или цена продукции P_j).

Предположим, что некоторая компания решила закупить ресурсы S_1, S_2, …, S_m и необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы y_1, y_2, …, y_m. Очевидно, что покупающая компания заинтересована в том, чтобы затраты на все ресурсы Z в количествах b_1, b_2, …, b_m по ценам соответственно y_1, y_2, …, y_m были минимальны, т.е. $Z(\overline{Y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$.

С другой стороны, предприятие, продающее ресурсы, заинтересовано в том, чтобы полученная выручка была бы не меньше той суммы, которую предприятие может получить при переработке ресурсов в готовую продукцию. На изготовление единицы продукции P_j расходуется a_{ij} единиц продукции ресурса S_i по цене соответственно y_i. Поэтому для удовлетворения требований продавца затраты на ресурсы, потребляемые при изготовлении единицы продукции P_j, должны быть не меньше ее цены c_i, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$.

Таким образом, экономико-математическая модель задачи I заключается в следующем: Составить такой план выпуска продукции $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором прибыль (выручка) от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов.

Экономико-математическая модель задачи II (двойственной к задаче I): Найти такой набор цен (оценок) ресурсов $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, при котором общие затраты на ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не меньше прибыли (выручки) от реализации этой продукции.

Цены ресурсов y_1, y_2, …, y_m в экономической литературе получили названия: *учетные, неявные, теневые*. Смысл этих названий состоит в том, что *условные, «ненастоящие» цены*. В отличие от «внешних» цен c_1, c_2,…,c_n на продукцию, известных, как правило, до начала производства, цены ресурсов y_1, y_2, …, y_m являются *внутренними*, так как они задаются не извне, а определяются непосредственно в результате решения задачи, поэтому их часто называют *оценками* ресурсов.

1.4.2. Теоремы двойственности

Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается с помощью теорем двойственности.

Основное неравенство теории двойственности. Пусть имеется пара двойственных задач I и II. Покажем, что для любым допустимых решений $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\overline{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ исходной и двойственной задач справедливо неравенство

$$F(\overline{X}) \leq Z(\overline{Y}) \text{ или } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad (1.4.2.1).$$

☝ Умножив неравенства системы ограничений исходной задачи I $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, ($i=\overline{1,m}$) соответственно на переменные y_1, y_2, ...,y_m и сложив правые и левые части полученных неравенств, имеем

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ . \qquad (1.4.2.2)$$

Аналогично преобразовав систему ограничений двойственной задачи $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j$ ($j=\overline{1,n}$) путем умножения обеих частей на переменные x_1, $x_2, \ldots, x_n$ и последующего их сложения, получим

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.4.2.3).$$

Так как левые части неравенств 1.4.2.2 – 1.4.2.3. представляют одно и то же выражение $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i$, то в силу транзитивности неравенств ($a \le b, a \ge c, \Rightarrow c \le b$) получим доказываемое неравенство (1.4.2.1).

Достаточный признак оптимальности.

Теорема. Если $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и $\overline{Y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ – допустимые решения взаимно двойственных задач, для которых выполняется равенство

$$F(\overline{X^*}) = Z(\overline{Y^*}) \qquad (1.4.2.4),$$

то $\overline{X^*}$ - оптимальное решение исходной задачи I, а Y^* - двойственной задачи II.

Первая (основная) теорема двойственности

Если одна из взаимно двойственных задач имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их линейных функций равны:

$$F_{\max} = Z_{\min} \quad \textit{или} \quad F(\overline{X^*}) = Z(\overline{Y^*})$$

Если линейная функция одной из задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.

Пусть даны две взаимно двойственные задачи I 1. $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \ i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \end{cases}$

$F(\overline{X^*}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$ и II $\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n} \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m} \end{cases}$ $Z(\overline{Y^*}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$.

Если каждую из этих задач решать симплексным методом, то необходимо привести их к каноническому виду, для чего в систему ограничений задачи I следует ввести m неотрицательных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+i}, \dots, x_{n+m}$, а в систему ограничений задачи II – n неотрицательных переменных y_{m+1}, $y_{m+2}, \dots, y_{m+j}, \dots, y_{m+n}$.

Системы ограничений каждой из взаимно двойственных задач примут вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \ (i = \overline{1,m})$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - y_{m+1} = c_j, \ (j = \overline{1,n})$$

Установим соответствие между первоначальными переменными одной из двойственных задач и дополнительными переменными другой задачи.

<table>
<tr><td colspan="8">Переменные исходной задачи I</td></tr>
<tr><td colspan="4">Первоначальные</td><td colspan="4">Дополнительные</td></tr>
<tr><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_j</td><td>x_n</td><td>x_{n+1}</td><td>x_{n+2}</td><td>x_{n+i}</td><td>x_{n+m}</td></tr>
<tr><td>$\updownarrow$</td><td>$\updownarrow$</td><td>$\updownarrow$</td><td>$\updownarrow$</td><td>$\updownarrow$</td><td>$\updownarrow$</td><td>$\updownarrow$</td><td>$\updownarrow$</td></tr>
<tr><td>y_{m+1}</td><td>y_{m+2}</td><td>y_{m+j}</td><td>y_{m+n}</td><td>y_1</td><td>y_2</td><td>y_j</td><td>y_m</td></tr>
<tr><td colspan="4">Дополнительные</td><td colspan="4">Первоначальные</td></tr>
<tr><td colspan="8">Переменные исходной задачи II (1.4.2.5)</td></tr>
</table>

Теорема. Положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи, т.е. для любых $i=\overline{1,m}$ и $j=\overline{1,n}$, если $x_j^* > 0$, то $y_{m+j}^* = 0$; если $x^*_{n+i}>0$, то $y^*_i = 0$, и аналогично, если $y_i^* > 0$, то $x_{n+i}^* = 0$; если $y^*_{m+j}>0$, то $x^*_j = 0$.

Из данной теоремы следует важный вывод о том, что введенное ранее соответствие (1.5.2.5) между переменными взаимно двойственных задач при достижении оптимума (т.е. на последнем шаге решения каждой задачи симплексным методом) представляет соответствие между **основными** (как правило, не равными нулю) переменными одной из двойственных задач и **неосновными** (равными нулю) переменными другой задачи, когда они образуют допустимые базисные решения.

Рассмотренная теорема является следствием следующей теоремы.

- **Вторая теорема двойственности.** Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных линейной функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения.
- ***Замечание.*** Если в одной из взаимно двойственных задач нарушается единственность оптимального решения, то оптимальное решение двойственной задачи вырожденное.
- Это связано с тем, что при нарушении единственности оптимального решения исходной задачи в выражении линейной функции ее оптимального решения через неосновные переменные отсутствует хотя бы одна из основных переменных.

- Компоненты оптимального решения двойственной задачи называются оптимальными (двойственными) оценками исходной задачи.
- Канторович Л.В. назвал их **объективно обусловленными оценками** (скрытые доходы, маргинальные оценки, разрешающие множители).
- Объективно обусловленные оценки ресурсов определяют степень дефицитности ресурсов: по оптимальному плану производства дефицитные (т.е. полностью используемые) ресурсы получают ненулевые оценки, а недефицитные – нулевые оценки.
- В оптимальный план производства могут попасть только рентабельные, неубыточные виды продукции (правда, критерий рентабельности здесь своеобразный: цена продукции не превышает затраты на потребляемые при ее изготовлении ресурсы, а в точности равна им).

- Для выяснения того, что показывают численные значения объективно обусловленных оценок ресурсов, рассмотрим следующую теорему.
- **Третья теорема двойственности.**

Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны значениям частных производных линейной функции $F_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ по соответствующим аргументам, т.е.

$$\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*, (i = 1, 2, \dots, m) \qquad (1.4.2.6)$$

Из соотношения (1.5.2.6) следует, что объективно обусловленные оценки ресурсов показывают, на сколько денежных единиц изменится максимальная прибыль (выручка) от реализации продукции при изменении запаса соответствующего ресурса на единицу.

С помощью теорем двойственности можно, решив симплексным методом исходную задачу, найти оптимальное решение двойственной задачи.

1.4.3. Двойственный симплекс- метод

- Метод, при котором вначале симплексным методом решается двойственная задача, а затем оптимальное решение исходной задачи находится с помощью теорем двойственности, называется ***двойственным симплексным методом.***
- Этот метод бывает выгодно применять, когда первое базисное решение исходной задачи недопустимое или, например, когда число ее ограничений m больше числа переменных n.

Алгоритм двойственного симплексного метода включает следующие этапы

- **1. Составление псевдоплана.**

  Систему ограничений двойственной задачи требуется привести к системе неравенств смысла «$\leq$».

  Для этого обе части неравенств смысла «$\leq$» необходимо умножить на (-1).

  Затем от системы неравенств смысла «$\geq$» переходят к системе уравнений, вводя неотрицательные дополнительные переменные, которые являются базисными переменными. Первый опорный план заносят в симплексную таблицу.

2. Проверка плана на оптимальность.

Если в полученном опорном плане не выполняются условие оптимальности, то решаем задачу симплексном методом.

Если в опорном плане условия оптимальности удовлетворяются и все значения базисных переменных – положительные числа, то получен оптимальный план.

Наличие отрицательных значений в столбце значений базисных переменных свидетельствуют о получении **псевдоплана.**

- **3. Выбор ведущих строки и столбца.**
- Среди отрицательных значений базисных переменных выбирают наибольшее по абсолютной величине. Строка, соответствующая этому значению, является ведущей. Симплексную таблицу дополняют строкой θ_j, в которую заносят взятые по абсолютной величине результаты деления коэффициентов индексной строки на отрицательные коэффициенты ведущей строки. Минимальные значения θ_j определяют ведущий столбец и переменную, вводимую в базис. На пересечении ведущих строки и столбца находится разрешающий элемент.

- **4. Расчет нового опорного плана.**

  Новый план получаем в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана – Гаусса. Далее переходим к этапу 2.

- ***Примечание*:**

  Если в псевдоплане есть хотя бы одно отрицательное число $b_i < 0$ такое, что все $a_{ij} \geq 0 \, (j = \overline{1, n})$,

  то задача вообще не имеет решения.