Матрицы и определители

Преподаватель: Пушникова Марина Юрьевна

Матрица

Матрица – это прямоугольная таблица чисел, содержащая *m* строк одинаковой длины *n*

Матрица *A* называется матрицей размера *mxn*, числа a_{iJ} называются ее элементами, где *i* показывает номер строки, а *j* – номер столбца. Числа a_{11}, a_{22}, a_{33}… образуют главную диагональ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Размер матрицы – 3x4

Элемент a_{23}=-2

Элемент a_{31}=-3

Элемент a_{12}=5

Главную диагональ составляют числа

3; -1; 1

Классификация матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Две матрицы равны между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = b_{ij}$$

- Матрица называется квадратной, если число строк равно числу столбцов. При этом квадратную матрицу размера nxn называют матрицей n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Квадратная матрица называется диагональной, если все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Классификация матриц

- Диагональная матрица называется единичной, если все элементы главной диагонали равны единице
- Матрица называется нулевой, если все элементы равны нулю
- Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Классификация матриц

- Матрица называется вектором, если она содержит или одну строку, или один столбец

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

- Матрица называется транспонированной к данной, если каждая строка данной матрицы становится столбцом с тем же номером у новой матрицы. Обозначается $A^{т}$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- Матрица называется канонической, если в начале главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица А

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Матрица-вектор В

Треугольная матрица С

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Транспонированные матрицы:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

- Суммой двух матриц одинакового размера называется матрица, полученная с помощью сложения соответствующих элементов данных матриц
- Произведением матрицы на число называется матрица, все элементы которой умножены на данное число
- Произведением двух матриц называется матрица, у которой элемент i-той строки и j-того столбца равен сумме произведений элементов i-той строки первой матрицы на соответствующие элементы j-того столбца второй матрицы

Примеры

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-4) = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 0 \\ -16 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -7 \\ 3 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-5)+(-3)\cdot 3+0\cdot(-1) & 2\cdot(-7)+(-3)\cdot 6+0\cdot 4 \\ 4\cdot(-5)+(-2)\cdot 3+1\cdot(-1) & 4\cdot(-7)+(-2)\cdot 6+1\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -10-9+0 & -14-18+0 \\ -20-6-1 & -28-12+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & -32 \\ -27 & -36 \end{pmatrix}$$

Свойства действий $A \cdot B \neq B \cdot A$

- Переместительное свойство $A + B = B + A$
- Сочетательные свойства $A + (B + C) = (A + B) + C$

$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A;\ (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);\ \alpha (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$

- Распределительные свойства $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$

- Свойства нуля $A - A = 0$ $A + O = A$
- Свойство единицы $E \cdot A = A$

Элементарные преобразования матриц

1. Перестановка местами двух параллельных рядов матрицы
2. Умножение всех элементов ряда матрицы на число отличное от нуля
3. Прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и тоже число.

Две матрицы называются эквивалентными, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований

Пример

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определитель

Определителем квадратной матрицы называется число, которое вычисляется следующим образом:

1. Если порядок квадратной матрицы равен 1, т.е. она состоит из 1 числа, то определитель равен этому числу
2. Если порядок квадратной матрицы равен 2, т.е. она состоит из 4 чисел, то определитель равен разности произведения элементов главной диагонали и произведения элементов побочной диагонали
3. Если порядок квадратной матрицы равен 3, т.е. она состоит из 9 чисел, то определитель равен сумме произведений элементов главной диагонали и двух треугольников параллельных этой диагонали, из которой вычли сумму произведений элементов побочной диагонали и двух треугольников параллельных этой диагонали

Определитель

$$1. \left| a_{11} \right| = a_{11}$$

$$2. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$3. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}\right) -$$

$$-\left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}\right)$$

Примеры

$$|-3| = -3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - (-3) \cdot 5 = 27$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = (-15 + 0 + 48) - (6 + 0 + 18) = 9$$

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если строки заменить столбцами, а столбцы – строками

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

2. Определитель, имеющий 2 одинаковых ряда, равен нулю

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

3. Общий множитель какого – либо ряда определителя можно вынести за знак определителя

$$\begin{vmatrix} a & b \\ nc & nd \end{vmatrix} = n\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

4. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак на противоположный

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей

$$\begin{vmatrix} a & b+n \\ c & d+m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & n \\ c & m \end{vmatrix}$$

6. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+na \\ c & d+nc \end{vmatrix}$$

Минор элемента определителя и его алгебраическое дополнение

- Минором элемента a_{IJ} определителя n-го порядка называется определитель n-1 порядка, полученный из исходного с помощью вычеркивания i-той строки и j-того столбца
- Алгебраическое дополнение элемента a_{IJ} определителя – это его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11}$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -M_{32}$$

Свойства определителей

7. Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}$$

8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$$

Примеры

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -15 - 18 + 42 = 9$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & 23 & 21 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -7 & -6 \\ 23 & 21 \end{vmatrix} = -(-147 + 138) = 9$$

Обратная матрица

- Матрица называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю, в противном случае, матрицу называют вырожденной
- Матрица называется союзной, если она состоит из соответствующих алгебраических дополнений и транспонирована
- Матрица называется обратной к данной матрице, если их произведение равно единичной матрице того же порядка, что и данная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A \neq 0$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Теорема о существовании обратной матрицы

Любая невырожденная матрица имеет обратную, равную союзной матрице, деленной на определитель данной матрицы

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$$

Доказательство теоремы

$$A \cdot A^* =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы

1. Вычислить определитель
2. Вычислить все алгебраические дополнения
3. Составить союзную матрицу, не забывая о транспонировании
4. Разделить каждое число союзной матрицы на определитель

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1)\ \det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-(-3) = 5 \neq 0$$

$$2)\ A_{11} = 1; \quad A_{12} = -(-1) = 1; \quad A_{21} = -3; \quad A_{22} = 2$$

$$3)\ A^{*} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Нахождение обратной матрицы 3-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1. $\det A$

2. $A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

3. $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

Пример

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$\det A=\begin{vmatrix}5 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -4\\ 6 & 0 & -3\end{vmatrix}=-15+48+0-(6+0+18)=9$$

$$A^T=\begin{pmatrix}5 & 3 & 6\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & -4 & -3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -4 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & -3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3 & 6\\ -4 & -3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}5 & 6\\ 1 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & -4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}5 & 6\\ -2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}5 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -6 & 7\\ -15 & -21 & 23\\ -6 & -12 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{9}\\ -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{23}{9}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{11}{9}\end{pmatrix}$$

Свойства обратной матрицы

1. Определитель обратной матрицы является обратным к определителю данной матрицы
$$\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det A}$$
2. Обратная матрица от произведения двух матриц равна произведению матрицы обратной ко второй на матрицу обратную к первой
$$\left(AB\right)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$
3. Порядок действий: транспонирование и нахождение обратной матрицы можно менять местами
$$\left(A^{-1}\right)^{T}=\left(A^{T}\right)^{-1}$$

Минор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Минором матрицы называется определитель, состоящий из элементов, находящихся на пересечении выделенных k строк и k столбцов данной матрицы размера mxn

Рангом матрицы называется наибольший порядок того минора матрицы, который отличен от нуля

Обозначение r(A), rangA

Минор называется базисным, если его порядок определяет ранг матрицы

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Все миноры 3-го порядка равны нулю
- Минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 6 = -15 \neq 0$$

- rangA=2

Свойства ранга

1. При транспонировании ранг не меняется
2. Если из матрицы вычеркнуть нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях
4. Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали

Алгоритм нахождения ранга матрицы

1. Используя элементарные преобразования матриц, привести данную матрицу к ступенчатому виду ($a_{11}=1$, под ним стоят нули; $a_{22}=1$, под ним стоят нули и т.д.)
2. Ранг равен количеству ненулевых строк

Пример

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$rangA = 3$$