ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Работа внешних и внутренних сил

Расчеты на жесткость и расчеты статически неопределимых систем предполагают определение перемещений, являющихся следствием деформации элементов конструкции. Вывод формул определения перемещений проведем достаточно распространенным энергетическим методом, основанном на анализе работы внешних и внутренних сил.

Будем рассматривать лишь **линейно деформируемые системы**, то есть системы, перемещения и деформации которых можно представить в виде однородных линейных функций внешних сил Fк:

$$\Delta_i = \delta_{i1}F_1 + \delta_{i2}F_2 + ... + \delta_{in}F_n \qquad (1)$$

Здесь Δ_i - определенного типа перемещение i-й точки сооружения, δ_{ij} – перемещения того же типа i -й точки, вызываемое силой $F_j = 1$

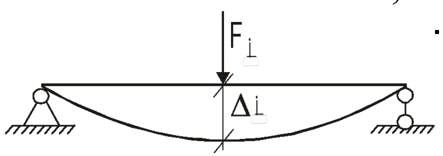


Рис.6.1

Различают действительную и возможную работы сил. **Действительной** называют работу, совершаемую силой на перемещении, вызываемом этой же силой. Рассмотрим систему с действующей на нее одной силой Fi постоянного направления. Так как рассматриваемая система линейно деформируемая, то $\Delta_i = \delta_{ii}F_i$. Зададим Fi приращение dFi Перемещение точки ее приложения изменится при этом на $d\Delta_i = \delta_{ii}dF_i$

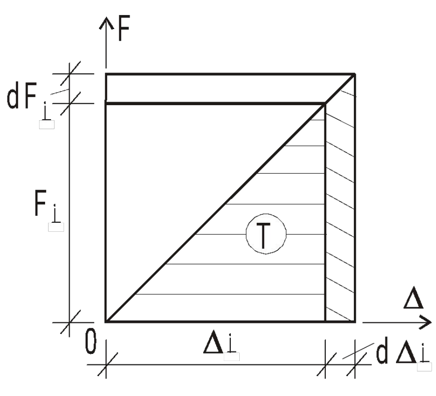


Рис.6.2

Элементарная действительная работа:

$$dT = (F_i + dF_i)d\Delta_i \approx F_i d\Delta_i = \delta_{ii}F_i dF_i .$$

Работа, совершаемая статически приложенной силой F_i, равна сумме элементарных

$$T = \int dT = \delta_{ii} \int_0^{F_i} F_i dF_i = \frac{\delta_{ii}}{2} F_i^2 = \frac{\Delta_i F_i}{2}.$$

Итак,

$$T = \frac{\Delta_i F_i}{2}.$$

Получено простое доказательство **теоремы Клапейрона**: *действительная работа статически прикладываемой к линейно деформированной системе силы равна половине произведения силы на соответствующее ей действительное перемещение.*

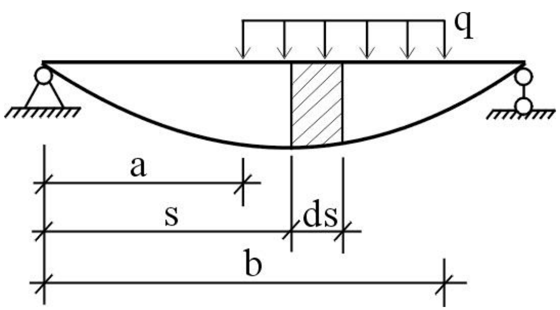
Если на систему действуют несколько сил, то

$$T = \frac{1}{2} \sum_i F_i \Delta_i.$$

В общем случае действия разнотипных усилий выражение для действительной работы можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_i F_i \Delta_i + \sum_j M_j \theta_j + \sum_K \int q_k v_k ds \right),$$

где Δ_i, θ_j, v_k -полные перемещения при одновременном действии всех сил. Смысл третьего слагаемого станет понятен из рассмотрения системы на следующем рисунке



$$dT = \frac{1}{2} v \cdot q ds, \quad T = \frac{1}{2}\int_a^b q v ds.$$ Если q = const, то

$$T = \frac{1}{2} q \int_a^b v ds = q\omega / 2$$

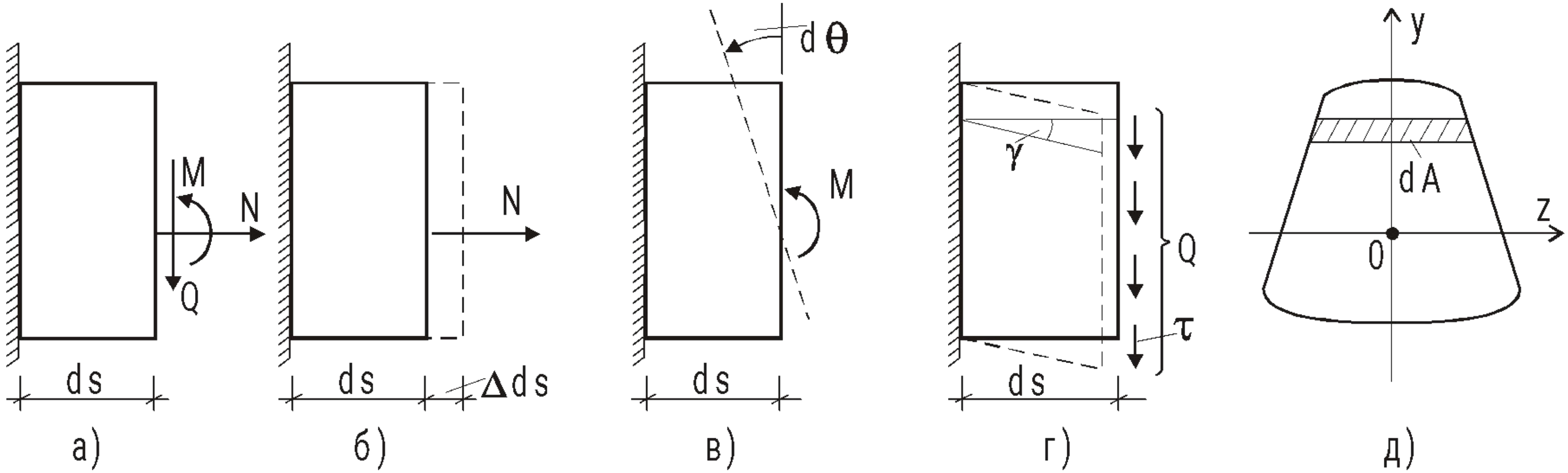
где ω – площадь эпюры перемещений под нагрузкой q.

Внутренние усилия препятствуют развитию деформации тела, поэтому при нагружении тела, не имеющего начальных напряжений, работа внутренних сил отрицательна. Суммарная работа

внутренних сил $T_{вн}$, взятая с обратным знаком, носит название **потенциальной энергии упругой деформации тела**

$$U = -T_{вн}$$

Для определения U плоской стержневой системы рассмотрим элемент стержня длины ds. Выразим dU – потенциальную энергию деформации, представленного на рисунке элемента стержня через работу внешних по отношению к нему сил N, Q, M.



dU – потенциальная энергия деформации, представленного на рисунке элемента стержня

$$\Delta(ds) = N\,ds/AE, \quad dU_N = \frac{1}{2}\Delta(ds)N = \frac{1}{2}\cdot\frac{N^2 ds}{AE};$$

$$d\theta = d\left(\frac{dv}{ds}\right) = \frac{d^2v}{ds^2}ds = \frac{Mds}{EI_z}, \quad dU_M = \frac{1}{2}d\theta M = \frac{1}{2}\cdot\frac{M^2 ds}{EI_z};$$

$$\gamma = \tau/G, \tau = \frac{QS_{z,отс}}{bI_z}, \quad d(dU_Q) = \frac{1}{2}(\gamma ds)(\tau dA) = \frac{ds}{2}\cdot\frac{\tau^2}{G}dA,$$

$$dU_Q = \frac{ds}{2}\int_A \frac{\tau^2}{G}dA = \frac{Q^2 ds}{2G}\int_A\left(\frac{S_{z,отс}}{bI_z}\right)^2 dA = \mu\frac{Q^2 ds}{2GA}, \qquad \mu = A\int_A\left(\frac{S_{z,отс}}{bI_z}\right)^2 dA,$$

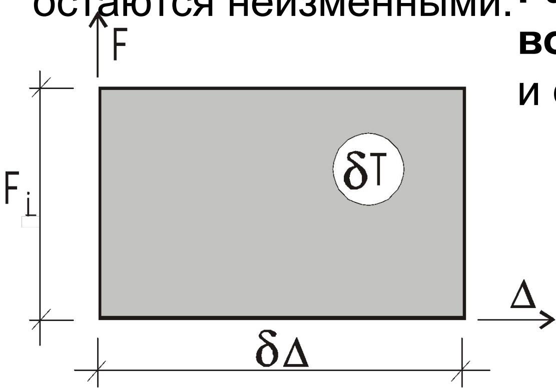
Потенциальная энергия упругой деформации плоской стержневой системы

$$U = \sum \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \sum \int \frac{M^2 ds}{2EI_z} + \sum \mu \cdot \int \frac{Q^2 ds}{2GA}.$$

Виртуальными или возможными называют малые перемещения системы, допускаемые связями. При совершении системой возможных перемещений величина и направление действительных внешних и внутренних сил, отвечающих ее исходному состоянию, остаются неизменными.

Работу сил на возможных перемещениях называют возможной и обозначают δT, при этом

$$\delta T = F \cdot \delta\Delta$$



В частности, возможными можно считать перемещения, вызванные другими силами.

Для системы усилий:

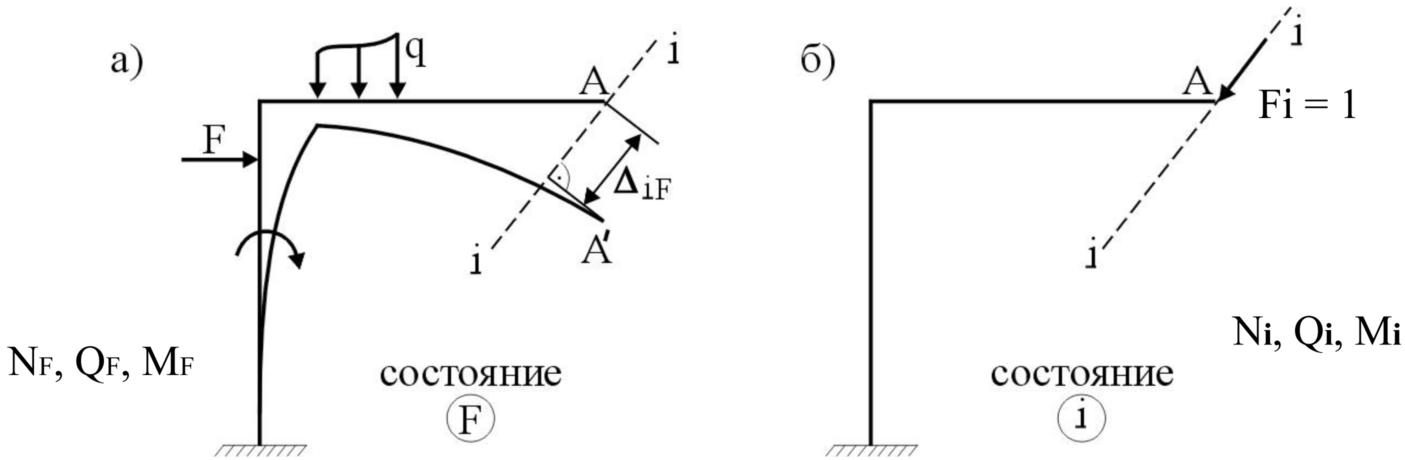
$$\delta T = \sum_i F\delta\Delta_i + \sum_j M_j\delta\theta_i + \sum_к \int q_к \delta v_к ds.$$

2. **Метод Максвелла–Мора определения перемещений плоских стержневых систем**

Вывод разрешающих соотношений метода базируется на применении **принципа возможных перемещений** (принцип виртуальных работ): *для равновесия упругой системы необходимо и достаточно равенства нулю суммы возможных работ всех внешних и внутренних сил системы,* то есть

$$\delta T - \delta U = 0. \qquad (2)$$

Состояние системы, находящейся под действием заданной нагрузки (рис.а)) называют **действительным** или **грузовым**. **Фиктивным** или **единичным** называют состояние равновесия системы, находящейся под действием $F_i = 1$ (рис.б).



Примем в качестве возможных перемещения действительного состояния системы

$$\Delta(ds) = \frac{N_F ds}{EA}, \quad d\theta = \frac{M_F ds}{EI_z}, \quad \Delta\lambda = \mu \cdot \frac{Q_F ds}{GA}.$$

Работа внутренних сил фиктивного состояния на возможных перемещениях

$$\delta T_{вн} = -\delta U = -\left(\sum \int \frac{N_i N_F}{EA} ds + \sum \int \frac{M_i M_F}{EI_z} ds + \sum \mu \cdot \int \frac{Q_i Q_F}{GA} ds \right). \quad (3)$$

Возможная работа $F_i = 1$ силы равна

$$\delta T = 1 \cdot \Delta_{iF}, \quad (4)$$

Для равновесия фиктивного состояния, согласно принципу возможных перемещений, должно выполняться равенство (2), которое с учетом (3) и (4) примет вид:

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{N_i N_F}{EA} ds + \sum \int \frac{M_i M_F}{EJ_z} ds + \sum \mu \cdot \int \frac{Q_i Q_F}{GA} ds. \quad (5)$$

интеграла Мора

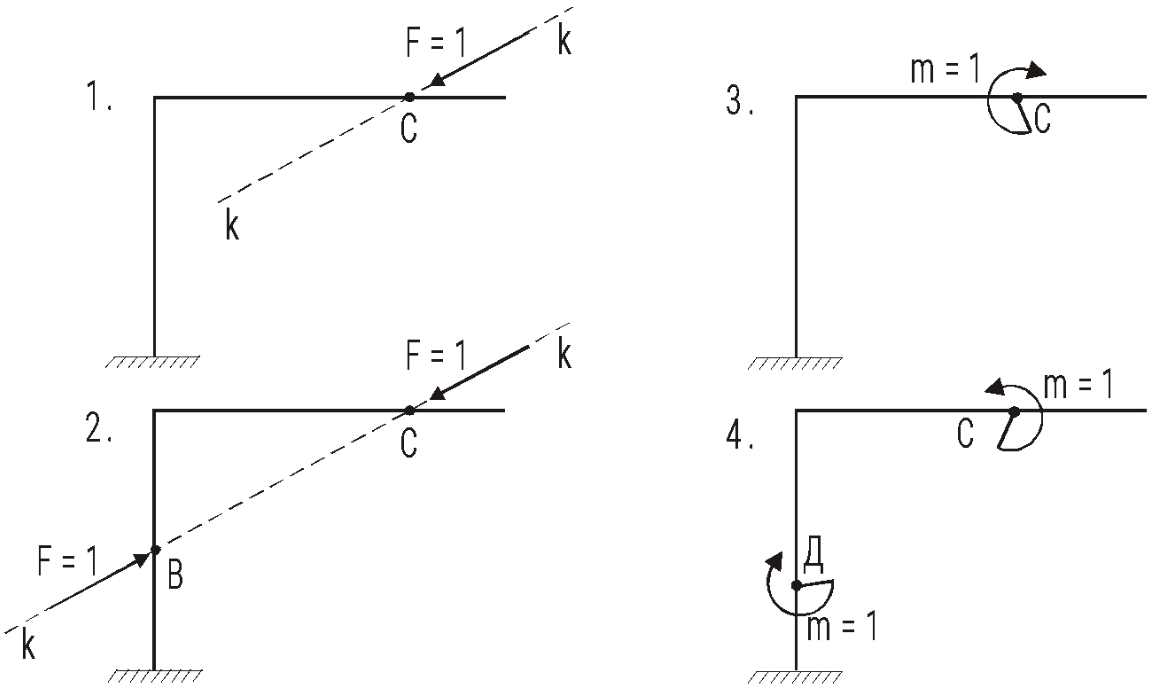
В приложениях формула (5) допускает существенные упрощения, определяемые характером работы элементов стержневой конструкции. Так, в частности:

а) при определении перемещений в фермах в (5) сохраняются лишь слагаемые с N;

б) при определении перемещений в рамах и балках, для которых деформациями сдвига и растяжения или сжатия можно пренебречь, в (5) удерживают лишь слагаемые с M;

в) при определении перемещений в арках удерживаются все слагаемые интеграла Мора.

3. **Техника определения перемещений**



Выбор фиктивного состояния определяется видом искомого перемещения:

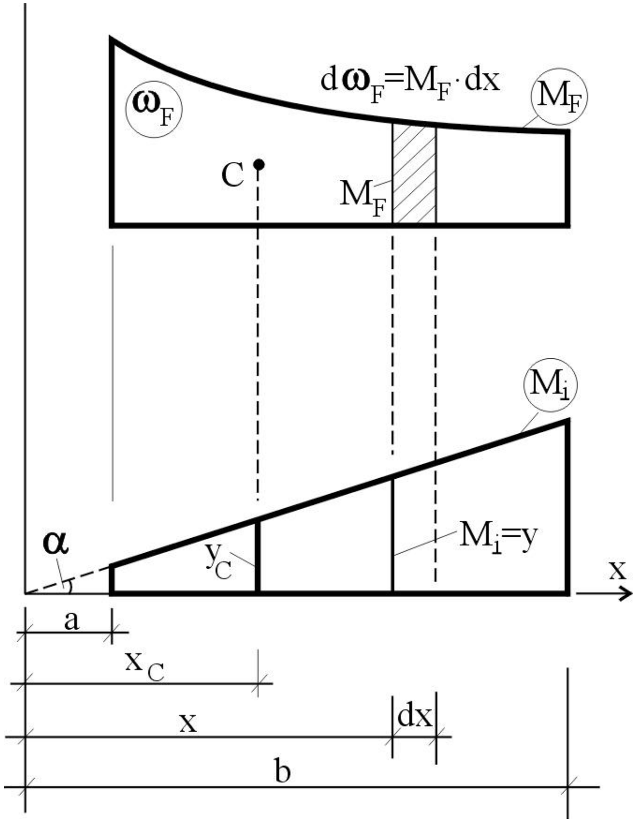
1. При определении линейного перемещения точки С оси рамы в направлении k-k в этой точке прикладывается сила F =1 с линией действия k-k;

2. При определении взаимного линейного смещения точек С и В системы в них прикладываются противоположно направленные по линии СВ единичные силы;

3. При определении угла поворота поперечного сечения рамы С (или, что то же, касательной к изогнутой оси стержня в этой точке) в нем прикладывается момент m = 1;

4. При определении взаимного угла поворота двух сечений системы С и Д в точках С и Д прикладывают противоположно направленные единичные моменты.

При определении перемещений в балках и рамах вычисление интеграла Мора удобно осуществлять графоаналитическим методом.



Формула (правило) Верещагина

Рассмотрим, например, произвольный грузовой участок системы $a \le x \le b$, в пределах которого EI_z= const.

$$\int_a^b \frac{M_i M_F}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \int M_i M_F dx.$$

Преобразуем интеграл:

$$\int_a^b M_i M_F dx = \int_{\omega_F} M_i d\omega_F = tg\alpha \cdot \int_{\omega_F} x d\omega_F =$$

$$= tg\alpha \cdot (\omega_F \cdot x_c) = \omega_F \cdot y_c$$

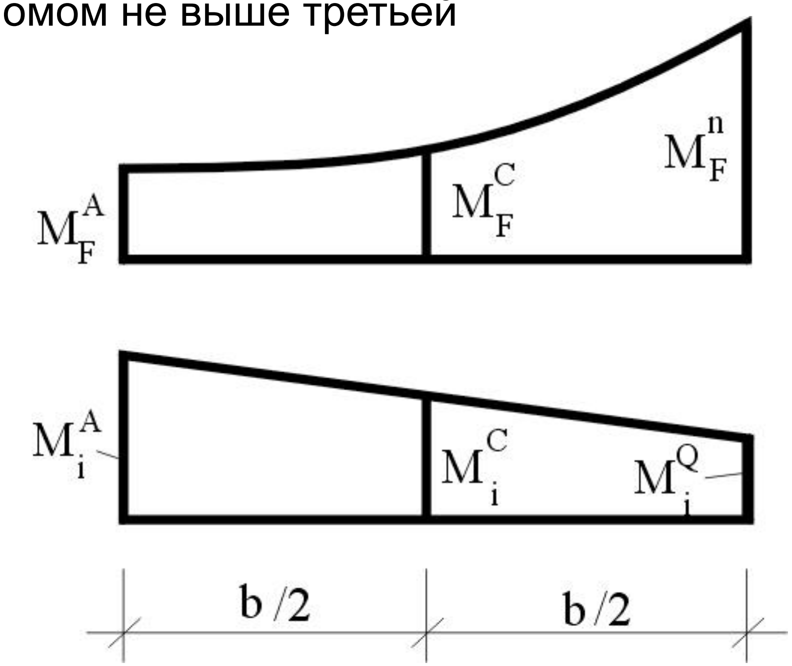
Итак,
$$\int_a^b \frac{M_i M_F}{EI_z} dx = \frac{\omega_F \cdot y_c}{EI_z},$$

где ω_F – площадь грузовой эпюры M_F; y_c – ордината линейной эпюры M_i, взятая под центром тяжести эпюры M_F.

Удобство правила Верещагина особенно отчетливо проявляется, когда эпюры подинтегральных моментов представляют собой сочетания прямоугольников и треугольников.

Формула Симпсона,

позволяющая определять точное значение интеграла Мора, если произведение $M_i \cdot M_F$ является полиномом не выше третьей степени.

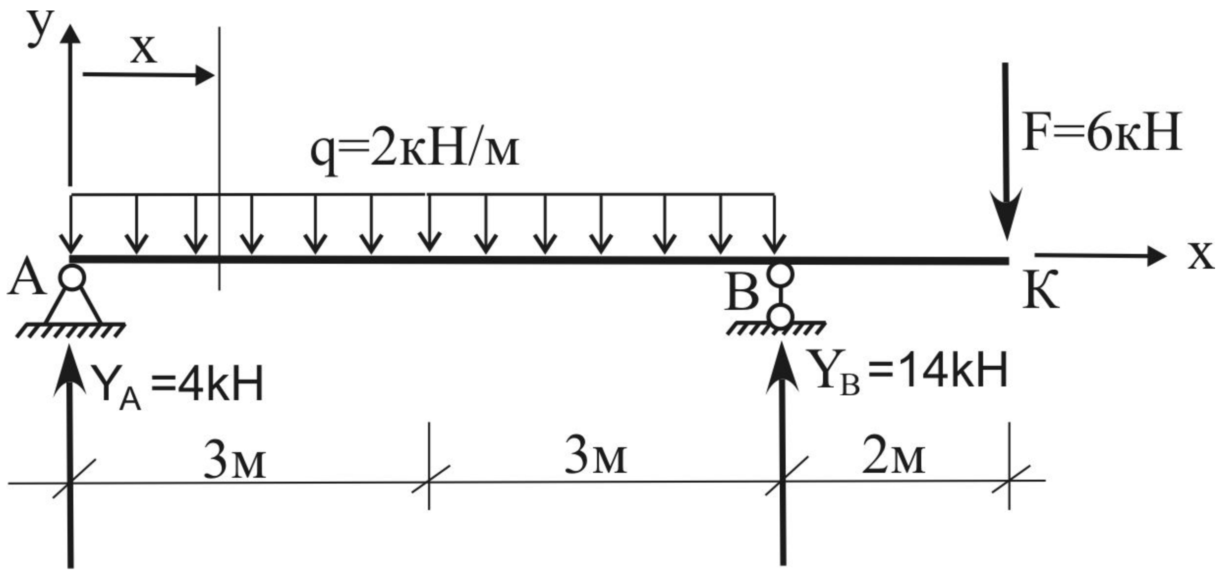


b – длина грузового участка.

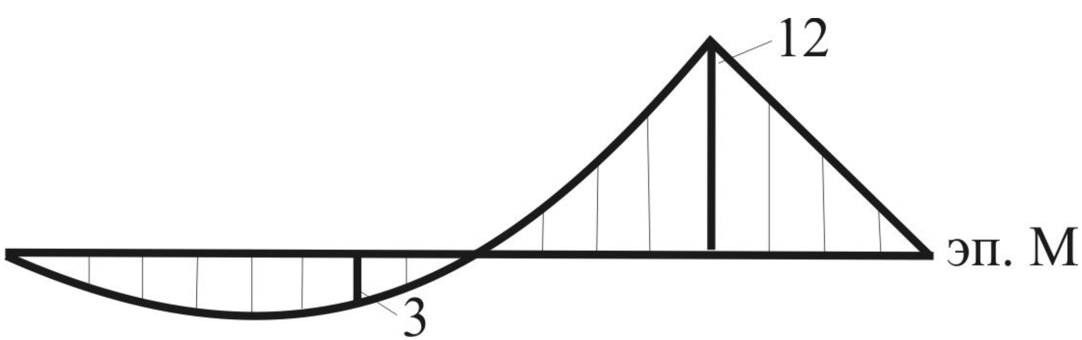
$$\int \frac{M_i M_F}{EI_z} dx =$$

$$= \frac{b}{6EI_z} \cdot (M_i^л \cdot M_F^л + 4M_i^c \cdot M_F^c + M_i^п \cdot M_F^п).$$

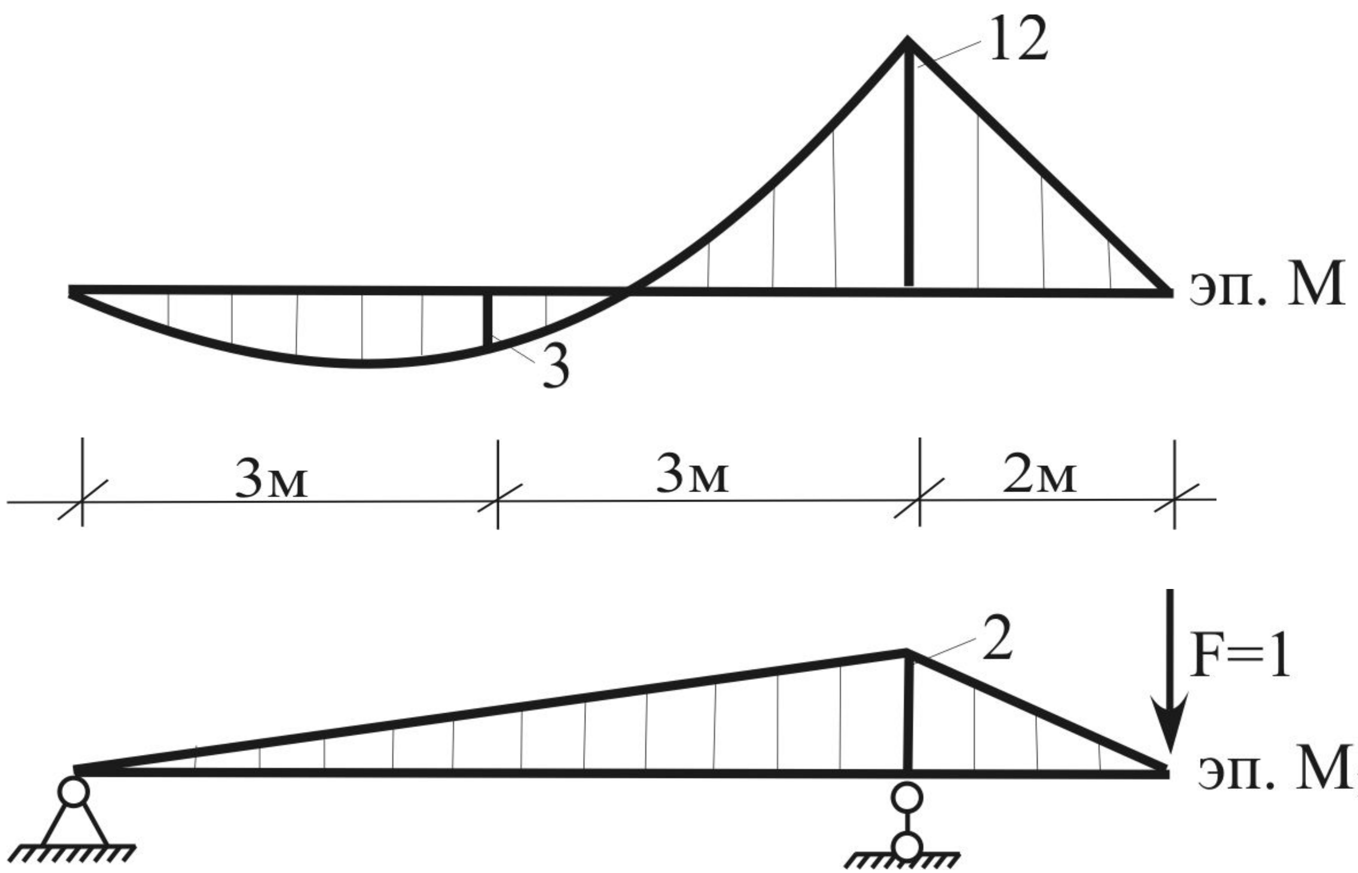
ПРИМЕР



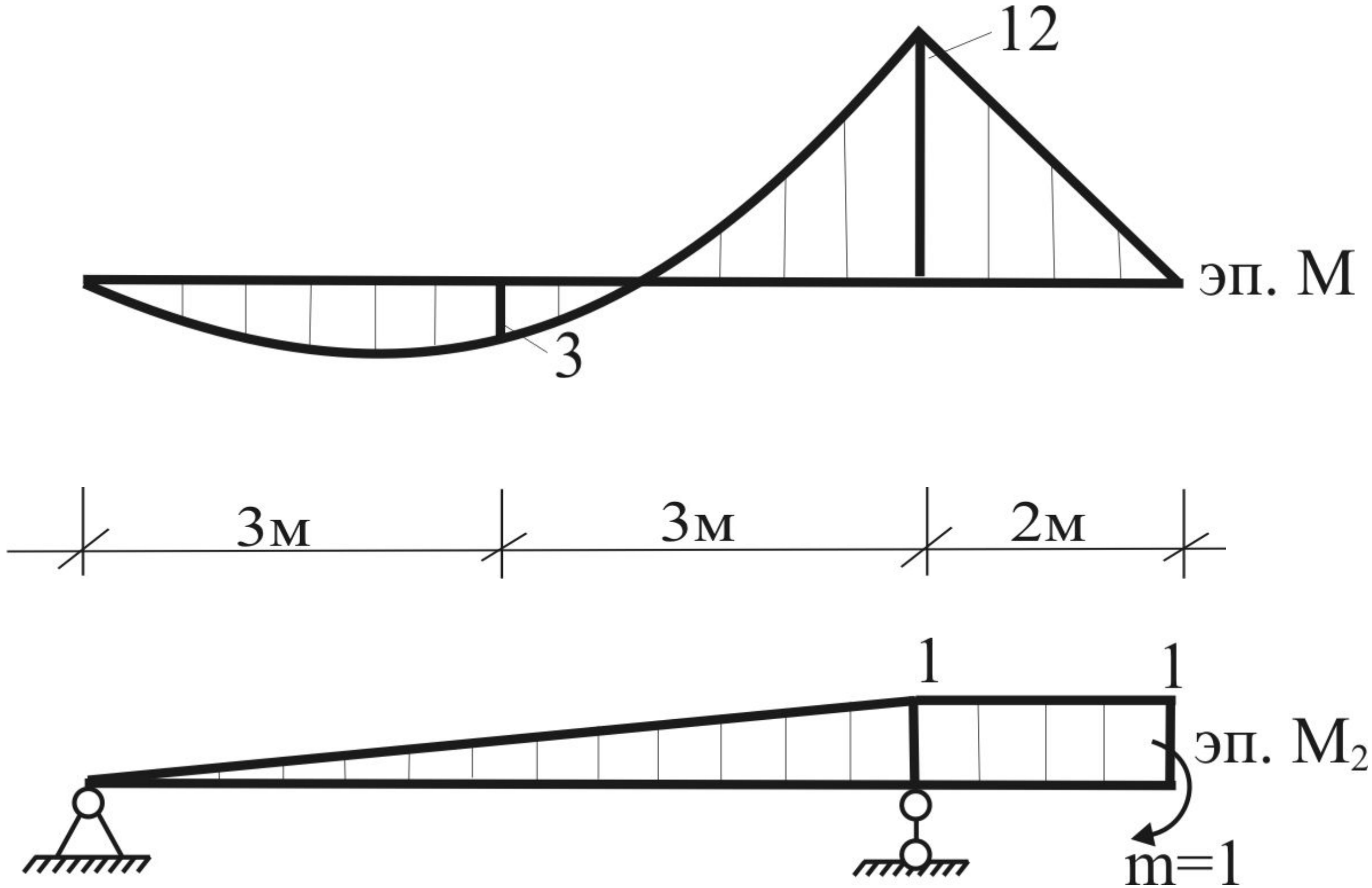
$EI = \mathrm{const}$



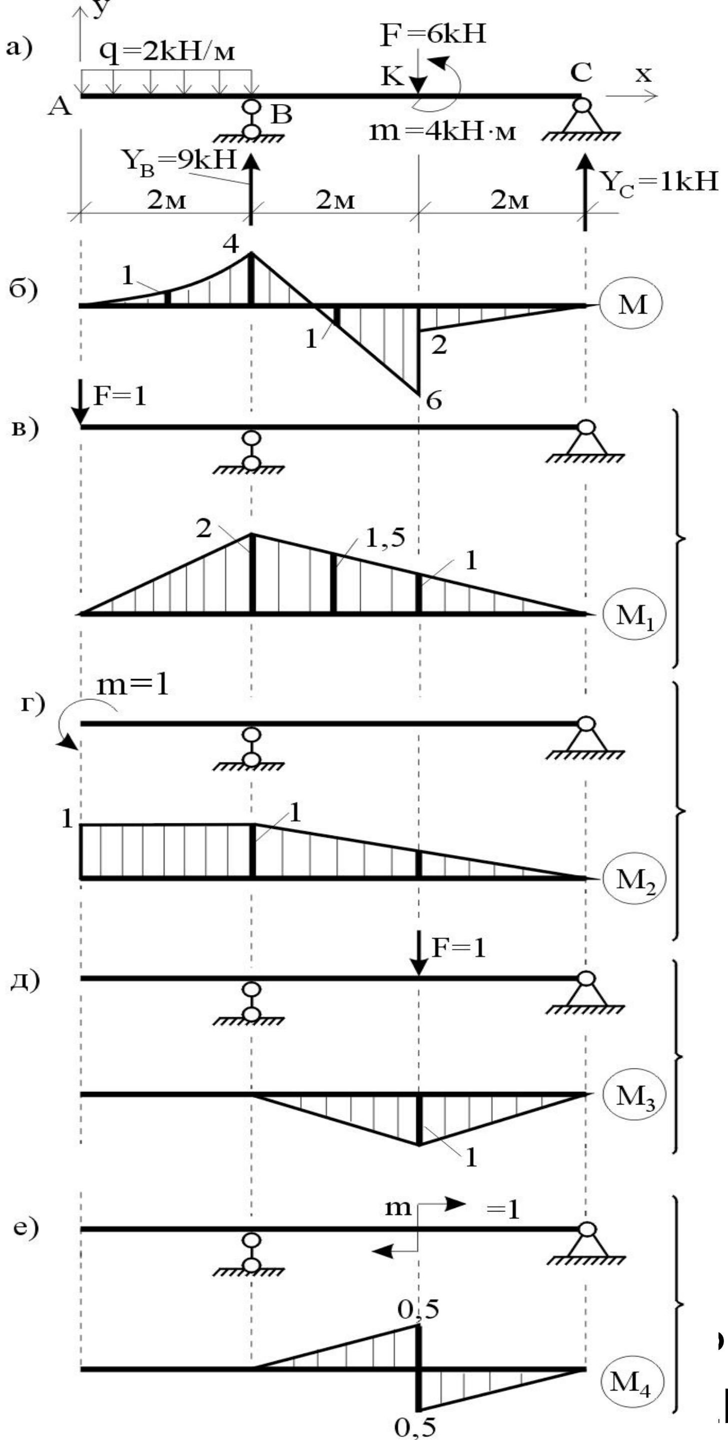
$$0 \le x \le 6: \quad M = Y_A x - q\frac{x^2}{2}$$



$$V_K = \sum\int \frac{M_1 M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{6}{6}(0 - 4\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot 12) + \frac{12\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\right] = \frac{28}{EI}$$



$$\Theta_K = \sum\int \frac{M_2 M}{EI} dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{6}{6}\left(0 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 3 + 1\cdot 12\right) + \frac{12\cdot 2}{2}\cdot 1\right] = \frac{18}{EI}$$

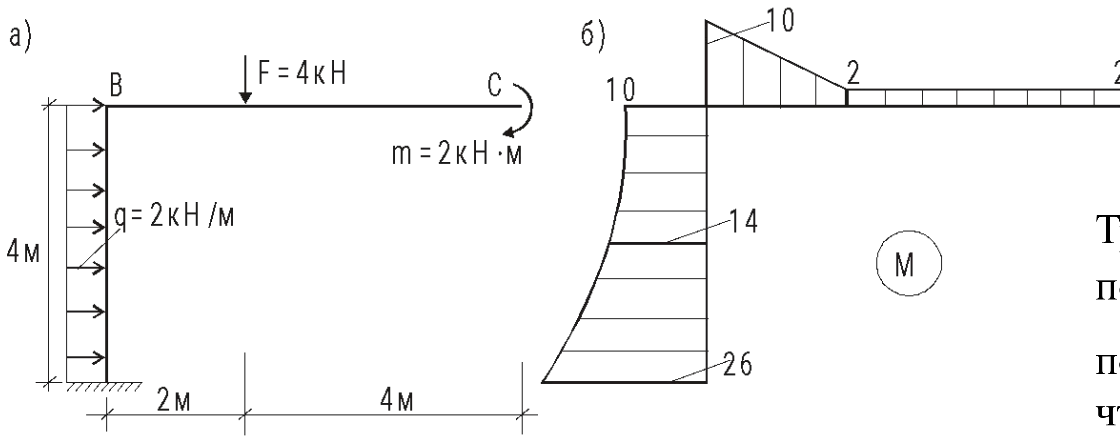


$$v_A = \sum\int\frac{M_1M}{EI_z}dx = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{2}{6}(0+4\cdot1\cdot1+2\cdot4)+\frac{2}{6}(2\cdot4-4\cdot1.5\cdot1-1\cdot6)-\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot\frac{2}{3}\cdot2\right]=\frac{4}{3EI_z}$$

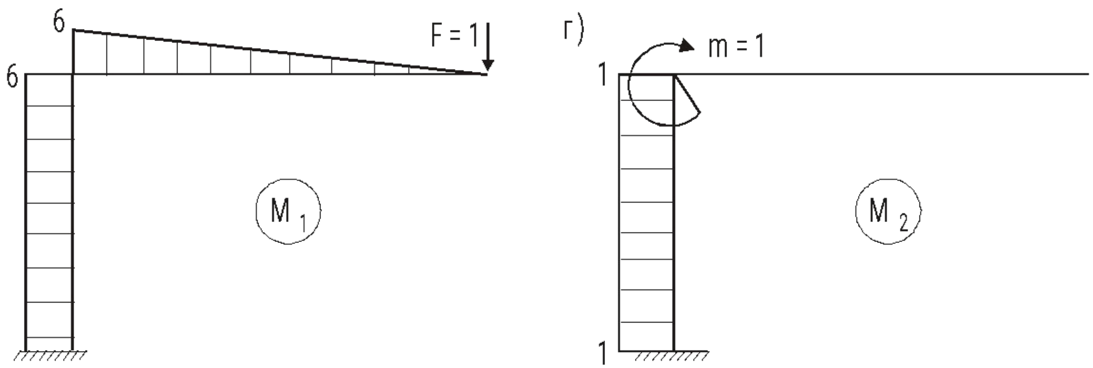
$$\theta_A = \sum\int\frac{M_2M}{EJ}dx = \frac{1}{EI_z}\left\{\frac{2}{6}(0+4\cdot1\cdot1+4\cdot1)+\frac{2}{6}\left(4\cdot1-4\cdot1\cdot\frac{3}{4}-6\cdot\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right\}=\frac{4}{3EI_z}$$

$$v_K = \sum\int\frac{M_3M}{EI_z}dx = \frac{1}{EI_z}\left\{\frac{2}{6}\left(0+4\cdot1\cdot\frac{1}{2}+6\cdot1\right)+\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\cdot\frac{2}{3}\cdot1\right\}=\frac{4}{EI_z}$$

$$\theta_k = \sum\int\frac{M_4M}{EI_z}dx = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{2}{6}\cdot(0-4\cdot0.25\cdot1-0.5\cdot6)+\frac{2\cdot2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot0.5\right]=-\frac{2}{3EI_z}.$$



Требуется определить Vc – вертикальное перемещение точки C и θ_B – угол поворота сечения B при условии, что EIp = =2EIc.



$$v_C = \Delta_{1F} = \sum\int\frac{M_1 M}{EI}ds = \frac{(2\cdot 4)\cdot 2}{EI_p} + \frac{2}{6EI_p}\cdot(10\cdot 6 + 4\cdot 6\cdot 5 + 2\cdot 4) + \frac{4}{6EI_C}\cdot(26\cdot 6 + 4\cdot 14\cdot 6 + 10\cdot 6) = 383.3/EI_C;$$

$$\theta_B = \Delta_{2F} = \sum\int\frac{M_2 M}{EI}ds = \frac{4}{6EI_C}\cdot(1\cdot 26 + 4\cdot 1\cdot 14 + 1\cdot 10) = 61.33/EI_C.$$

Теоремы взаимности

В приложении к линейно-деформируемым стержневым системам можно утверждать, что в процессе их деформации вся работа внешних сил T переходит в потенциальную энергию упругой деформации U, накапливаемую системой, то есть

$$T = U \qquad (1)$$

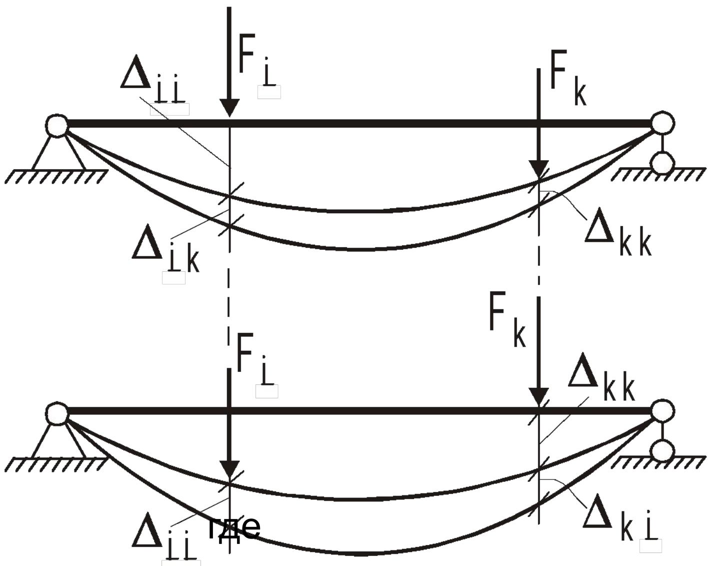
Такая форма закона сохранения энергии возможна потому, что для указанных систем работа внешних сил, расходуемая на преодоление внутреннего трения в материале и связях, на изменение температуры и прочие необратимые потери, оказывается пренебрежимо малой.

Анализ выражения потенциальной энергии упругой деформации U

$$U = \sum \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \sum \int \frac{M^2 ds}{2EI_z} + \sum \mu \cdot \int \frac{Q^2 ds}{2GA}.$$

позволяет сделать следующие выводы:

1. Всегда $U \geq 0$;
2. Потенциальная энергия, вызванная группой сил, не равна сумме энергий, вызванных каждой из этих сил в отдельности (т.к., напр., $\int (M_1 + M_2)^2 ds \neq \int M_1^2 ds + \int M_2^2 ds$);
3. Количество потенциальной энергии системы не зависит от последовательности загружения, а определяется лишь ее исходным и конечным состояниями (т.к. от последовательности загружения не зависят определяющие U значения усилий N, Q, M.).



Δ_{ik} –

Рассмотрим два варианта последовательных загружений системы силами F_i, F_k и определим совершаемые при этом работы.

$$T_1 = \frac{1}{2}\Delta_{ii}F_i + \Delta_{ik}F_i + \frac{1}{2}\Delta_{kk}F_k,$$

(2)

$$T_2 = \frac{1}{2}\Delta_{kk}F_k + \Delta_{ki}F_k + \frac{1}{2}\Delta_{ii}F_i,$$

где Δ_{ik} – перемещение точки приложения (и по направлению) силы F_i, вызываемое силой F_k.

Поскольку работа, как и U зависит лишь от конечного состояния системы, должно выполняться равенство T1 = T2, из которого, с учетом (2), следует:

$$\Delta_{ik}F_i = \Delta_{ki}F_k \qquad (3)$$

Получено простейшее доказательство **теоремы о взаимности работ**, известной в литературе под названием **теоремы Бетти.**

Из (3), с учетом зависимости $\Delta_{ik} = \delta_{ik} F_k$, получим

$$(\delta_{ik} F_k) F_i = (\delta_{ki} F_i) F_k$$

и, следовательно,

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \qquad (4)$$

Равенство (44) является утверждением **теоремы Максвелла** или **теоремы о взаимности перемещений для двух единичных состояний упругой системы**: *перемещение точки приложения и по направлению i - го усилия от действия k-го единичного усилия, равно перемещению точки приложения и по направлению k-го усилия от действия i-го единичного усилия.*