

ТЕОРИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1. Работа внешних и внутренних сил

Расчеты на жесткость и расчеты статически неопределимых систем предполагают определение перемещений, являющихся следствием деформации элементов конструкции. Вывод формул определения перемещений проведем достаточно распространенным энергетическим методом, основанном на анализе работы внешних и внутренних сил.

Будем рассматривать лишь **линейно деформируемые системы**, то есть системы, перемещения и деформации которых можно представить в виде однородных линейных функций внешних сил F_k :

$$\Delta_i = \delta_{i1} F_1 + \delta_{i2} F_2 + \dots + \delta_{in} F_n \quad (1)$$

Здесь Δ_i - определенное типа перемещение i -й точки сооружения,
же типа i -й точки, вызываемое силой $F_j = 1$

δ_{ij} - перемещения того

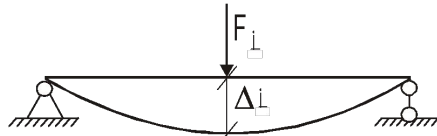


Рис.6.1

Различают действительную и возможную работы сил. **Действительной** называют работу, совершаемую силой на перемещении, вызываемом этой же силой. Рассмотрим систему с действующей на нее одной силой F_i

постоянного направления. Так как рассматриваемая система линейно деформируемая, то $\Delta_i = \delta_{ii} F_i$. Зададим F_i приращение dF_i

Перемещение точки ее приложения изменится при этом на $d\Delta_i = \delta_{ii} dF_i$

Элементарная действительная работа:

$$dT = (F_i + dF_i) d\Delta_i \approx F_i d\Delta_i = \delta_{ii} F_i dF_i.$$

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

1

СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

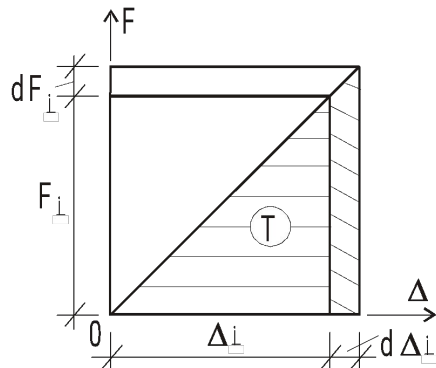


Рис.6.2

Работа, совершаемая статически приложенной силой F_i , равна сумме элементарных

$$T = \int dT = \delta_{ii} \int_0^{F_i} F_i dF_i = \frac{\delta_{ii}}{2} F_i^2 = \frac{\Delta_i F_i}{2}.$$

Итак,
$$T = \frac{\Delta_i F_i}{2}.$$

Получено простое доказательство **теоремы Клапейрона**: *действительная работа статически прикладываемой к линейно деформированной системе силы равна половине произведения силы на соответствующее ей действительное перемещение.*

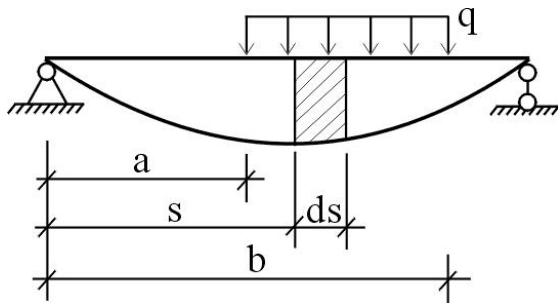
Если на систему действуют несколько сил, то

$$T = \frac{1}{2} \sum_i F_i \Delta_i.$$

В общем случае действия разнотипных усилий выражение для действительной работы можно представить в виде

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_i F_i \Delta_i + \sum_j M_j \theta_j + \sum_K \int q_k v_k ds \right),$$

где Δ_i, θ_j, v_k -полные перемещения при одновременном действии всех сил. Смысл третьего слагаемого станет понятен из рассмотрения системы на следующем рисунке



$$dT = \frac{1}{2} v \cdot q ds, \quad T = \frac{1}{2} \int_a^b q v ds. \quad \text{Если } q = \text{const, то}$$

$$T = \frac{1}{2} q \int_a^b v ds = q\omega / 2$$

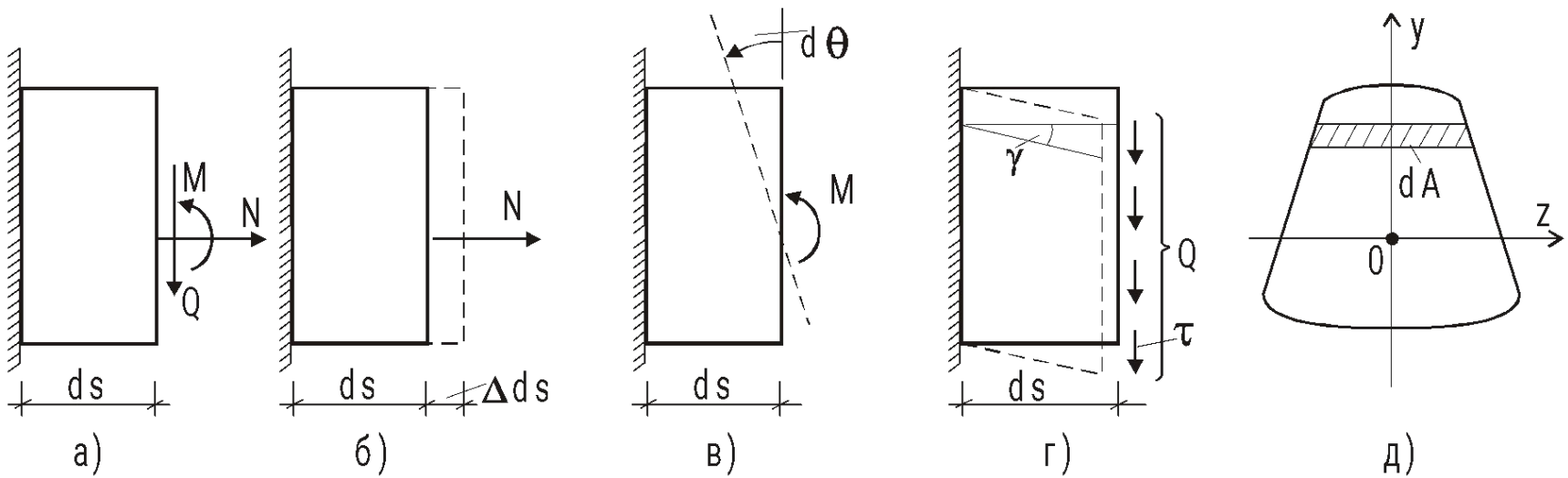
где ω – площадь эпюры перемещений под нагрузкой q .

Внутренние усилия препятствуют развитию деформации тела, поэтому при нагружении тела, не имеющего начальных напряжений, работа внутренних сил отрицательна. Суммарная работа

внутренних сил $T_{\text{вн}}$, взятая с обратным знаком, носит название **потенциальной энергии упругой деформации тела**

$$U = -T_{\text{вн}}$$

Для определения U плоской стержневой системы рассмотрим элемент стержня длины ds . Выразим dU – потенциальную энергию деформации, представленного на рисунке элемента стержня через работу внешних по отношению к нему сил N , Q , M .



dU – потенциальная энергия деформации, представленного на рисунке элемента стержня

$$\Delta(ds) = N ds / AE, \quad dU_N = \frac{1}{2} \Delta(ds) N = \frac{1}{2} \cdot \frac{N^2 ds}{AE};$$

$$d\theta = d\left(\frac{dv}{ds}\right) = \frac{d^2 v}{ds^2} ds = \frac{M ds}{EI_z}, \quad dU_M = \frac{1}{2} d\theta M = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 ds}{EI_z};$$

$$\gamma = \tau / G, \tau = \frac{QS_{z,отс}}{bI_z}, \quad d(dU_Q) = \frac{1}{2} (\gamma ds) (\tau dA) = \frac{ds}{2} \cdot \frac{\tau^2}{G} dA,$$

$$dU_Q = \frac{ds}{2} \int_A \frac{\tau^2}{G} dA = \frac{Q^2 ds}{2G} \int_A \left(\frac{S_{z,отс}}{bI_z}\right)^2 dA = \mu \frac{Q^2 ds}{2GA}, \quad \mu = A \int_A \left(\frac{S_{z,отс}}{bI_z}\right)^2 dA,$$

Потенциальная энергия упругой деформации плоской стержневой системы

$$U = \sum \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \sum \int \frac{M^2 ds}{2EI_z} + \sum \mu \cdot \int \frac{Q^2 ds}{2GA}.$$

Виртуальными или возможными называют малые перемещения системы, связями допускаемые. При совершении системой возможных перемещений величина и направление

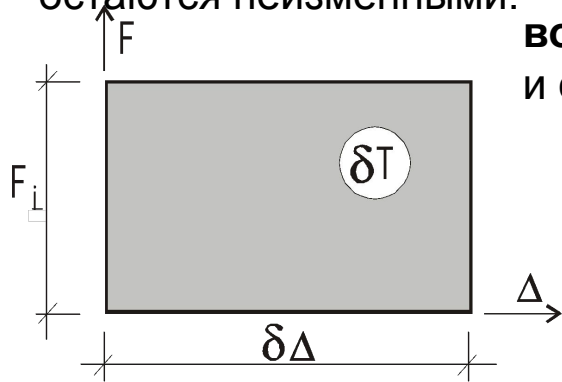
действительных внешних и внутренних сил, отвечающих ее исходному состоянию,

остаются неизменными. **Работу сил на возможных перемещениях называют**

возможной и обозначают δT

$$\delta T = F \cdot \delta \Delta$$

В частности, возможными можно считать перемещения, вызванные другими силами.



Для системы усилий:

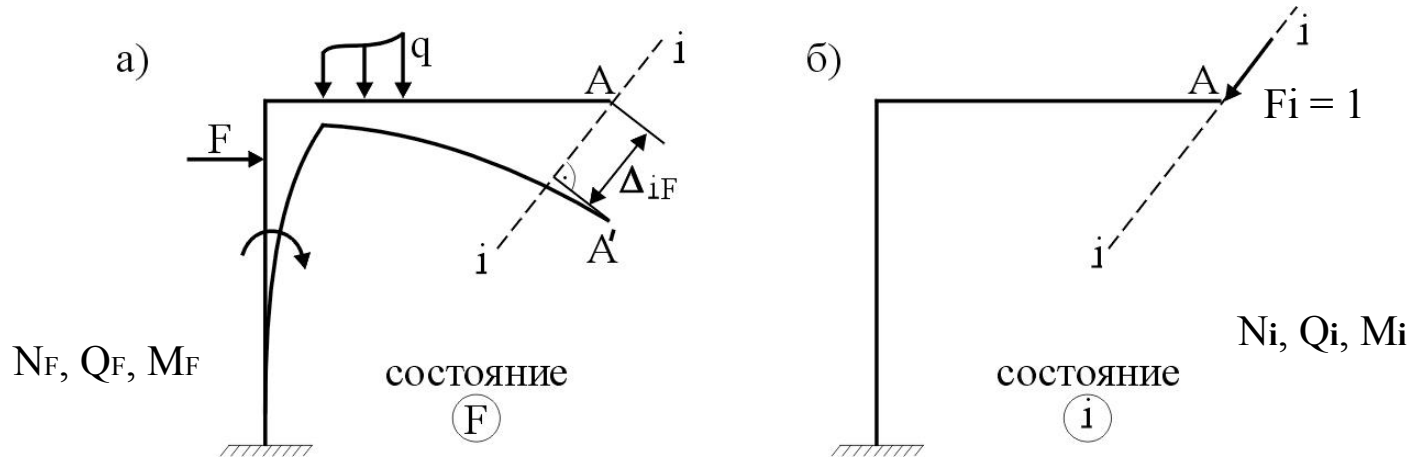
$$\delta T = \sum_i F \delta \Delta_i + \sum_j M_j \delta \theta_j + \sum_k \int q_k \delta v_k ds.$$

2. Метод Максвелла–Мора определения перемещений плоских стержневых систем

Вывод разрешающих соотношений метода базируется на применении **принципа возможных перемещений** (принцип виртуальных работ): для равновесия упругой системы необходимо и достаточно равенства нулю суммы возможных работ всех внешних и внутренних сил системы, то есть

$$\delta T - \delta U = 0. \quad (2)$$

Состояние системы, находящейся под действием заданной нагрузки (рис.а)) называют **действительным** или **грузовым**. **Фиктивным** или **единичным** называют состояние равновесия системы, находящейся под действием $F_i = 1$ (рис.б).



Примем в качестве возможных перемещения действительного состояния системы

$$\Delta(ds) = \frac{N_F ds}{EA}, \quad d\theta = \frac{M_F ds}{EI_z}, \quad \Delta\lambda = \mu \cdot \frac{Q_F ds}{GA}.$$

Работа внутренних сил фиктивного состояния на возможных перемещениях

$$\delta T_{\text{вн}} = -\delta U = -\left(\sum \int \frac{N_i N_F}{EA} ds + \sum \int \frac{M_i M_F}{EI_z} ds + \sum \mu \cdot \int \frac{Q_i Q_F}{GA} ds \right). \quad (3)$$

Возможная
равна

работа $\sum_{i=1}^n$ силы

$$\delta T = 1 \cdot \Delta_{iF}, \quad (4)$$

Для равновесия фиктивного состояния, согласно принципу возможных перемещений, должно выполняться равенство (2), которое с учетом (3) и (4) примет вид:

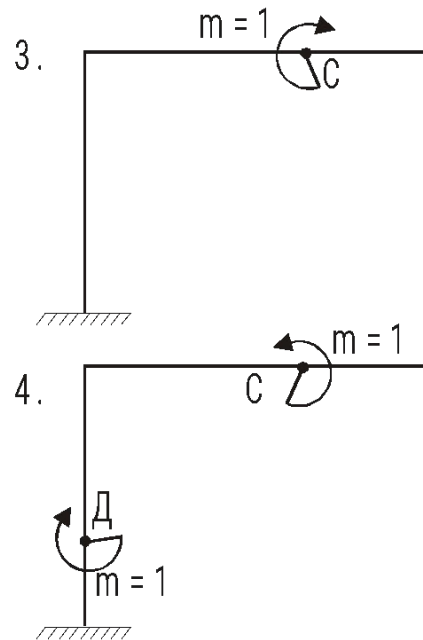
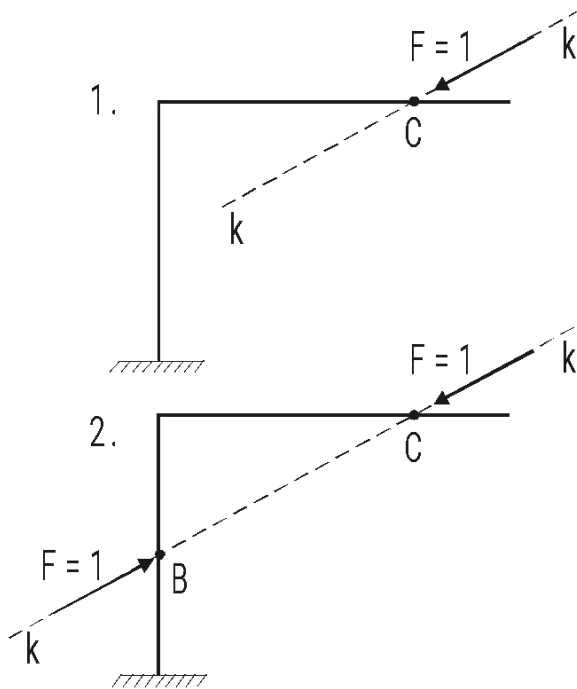
$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{N_i N_F}{EA} ds + \sum \int \frac{M_i M_F}{EI_z} ds + \sum \mu \cdot \int \frac{Q_i Q_F}{GA} ds. \quad (5)$$

интеграла Мора

В приложениях формула (5) допускает существенные упрощения, определяемые характером работы элементов стержневой конструкции. Так, в частности:

- а)** при определении перемещений в фермах в (5) сохраняются лишь слагаемые с N ;
- б)** при определении перемещений в рамах и балках, для которых деформациями сдвига и растяжения или сжатия можно пренебречь, в (5) удерживают лишь слагаемые с M ;
- в)** при определении перемещений в арках удерживаются все слагаемые интеграла Мора.

3. Техника определения перемещений



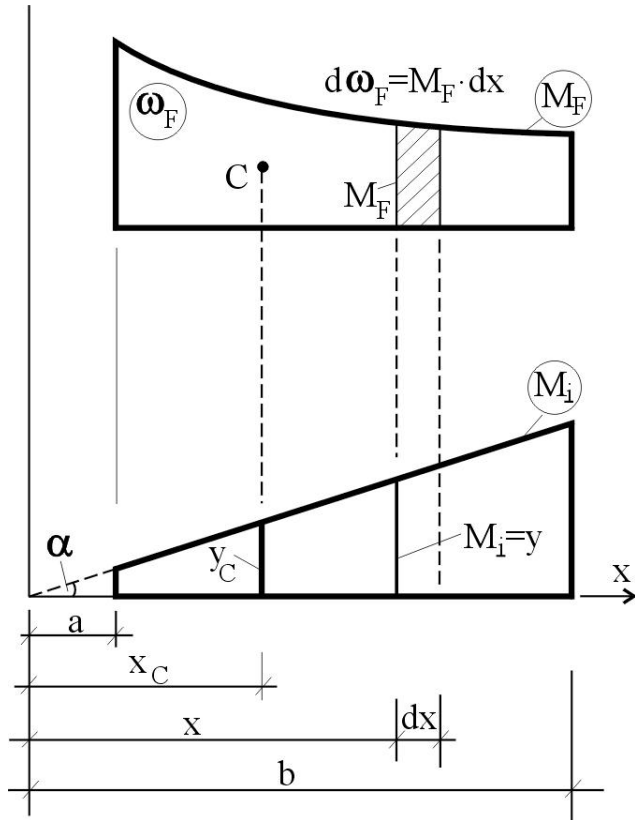
Выбор фиктивного состояния определяется видом искомого перемещения:

1. При определении линейного перемещения точки С оси рамы в направлении k-k в этой точке прикладывается сила $F = 1$ с линией действия k-k;
2. При определении взаимного линейного смещения точек С и В системы в них прикладываются противоположно направленные по линии СВ единичные силы;

3. При определении угла поворота поперечного сечения рамы С (или, что то же, касательной к изогнутой оси стержня в этой точке) в нем прикладывается момент $m = 1$;

4. При определении взаимного угла поворота двух сечений системы С и Д в точках С и Д прикладываются противоположно направленные единичные моменты.

При определении перемещений в балках и рамах вычисление интеграла Мора удобно осуществлять графоаналитическим методом.



Формула (правило) Верещагина

Рассмотрим, например, произвольный грузовой участок системы $a \leq x \leq b$, в пределах которого $EI_z = \text{const.}$

$$\int_a^b \frac{M_i M_F}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \int M_i M_F dx.$$

Преобразуем интеграл:

$$\begin{aligned} \int_a^b M_i M_F dx &= \int_{\omega_F} M_i d\omega_F = \text{tg} \alpha \cdot \int_{\omega_F} x d\omega_F = \\ &= \text{tg} \alpha \cdot (\omega_F \cdot x_c) = \omega_F \cdot y_c \end{aligned}$$

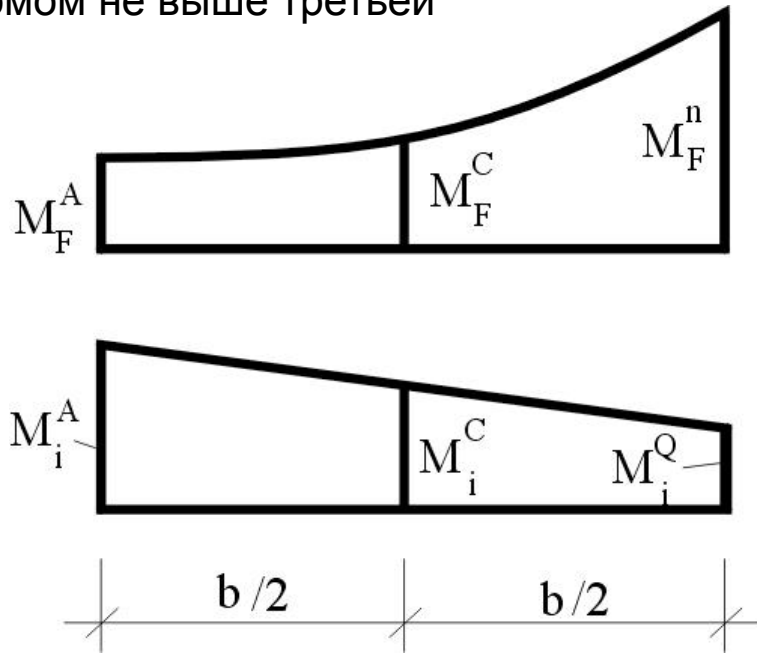
Итак,
$$\int_a^b \frac{M_i M_F}{EI_z} dx = \frac{\omega_F \cdot y_c}{EI_z},$$

где ω_F — площадь грузовой эпюры M_F ; y_c — ордината линейной эпюры M_i , взятая под центром тяжести эпюры M_F .

Удобство правила Верещагина особенно отчетливо проявляется, когда эпюры подинтегральных моментов представляют собой сочетания прямоугольников и треугольников.

Формула Симпсона,

позволяющая определять точное значение интеграла Мора, если произведение $M_i \cdot M_F$ является полиномом не выше третьей степени.

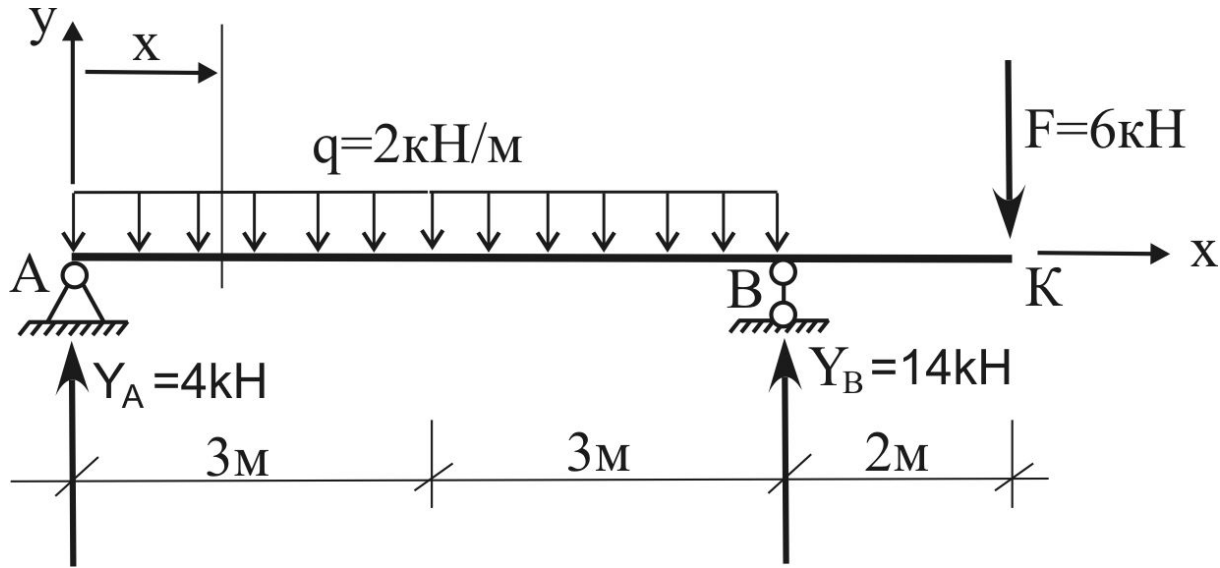


b – длина грузового участка.

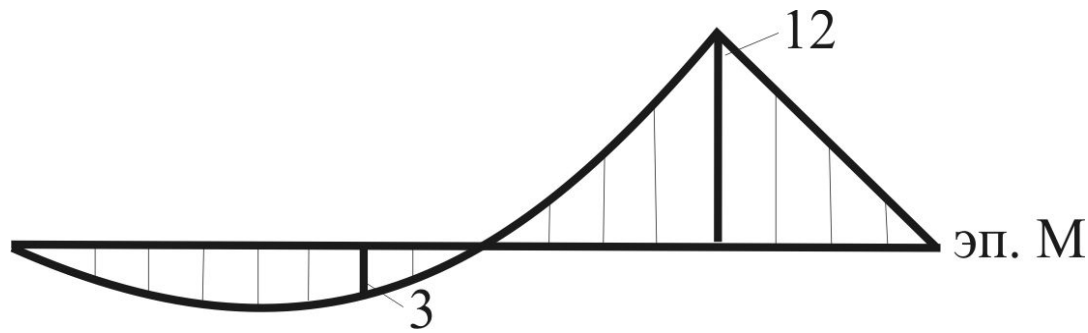
$$\int \frac{M_i M_F}{EI_z} dx =$$

$$= \frac{b}{6EI_z} \cdot (M_i^{\text{Л}} \cdot M_F^{\text{Л}} + 4M_i^{\text{С}} \cdot M_F^{\text{С}} + M_i^{\text{П}} \cdot M_F^{\text{П}}).$$

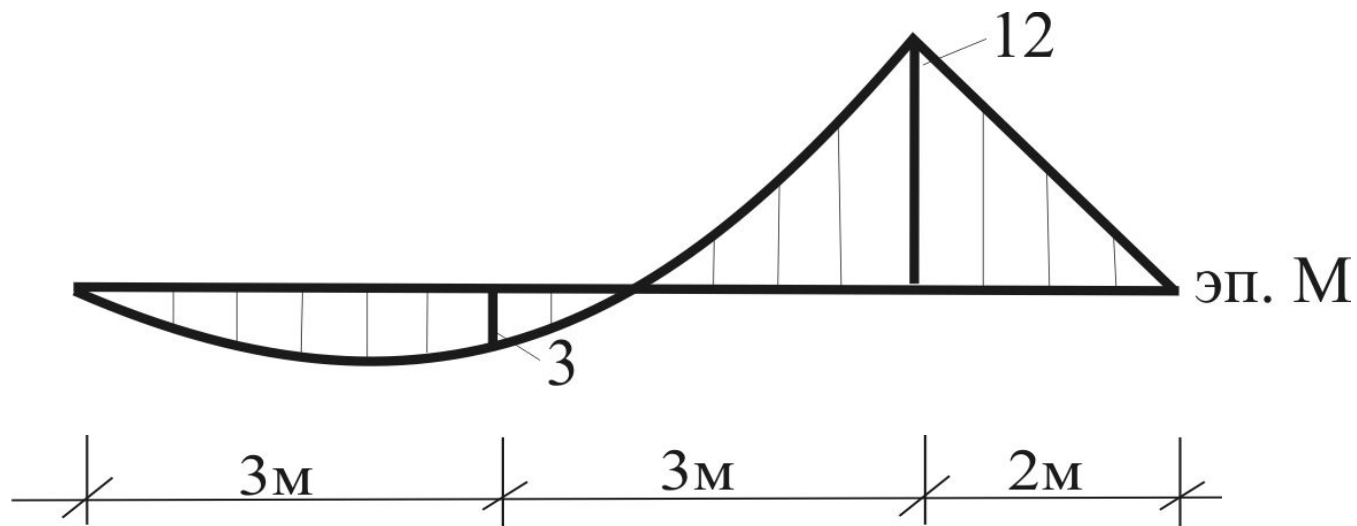
ПРИМЕР



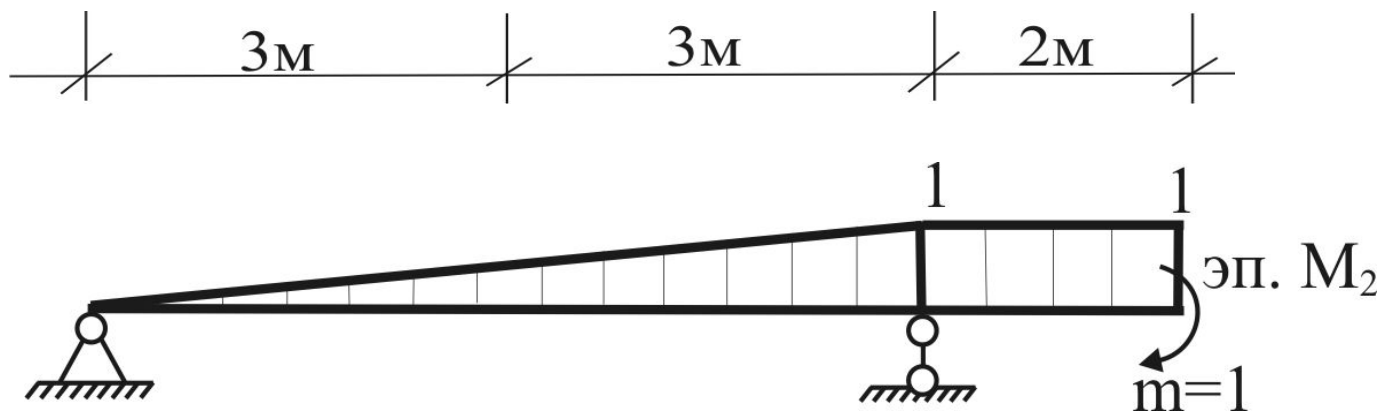
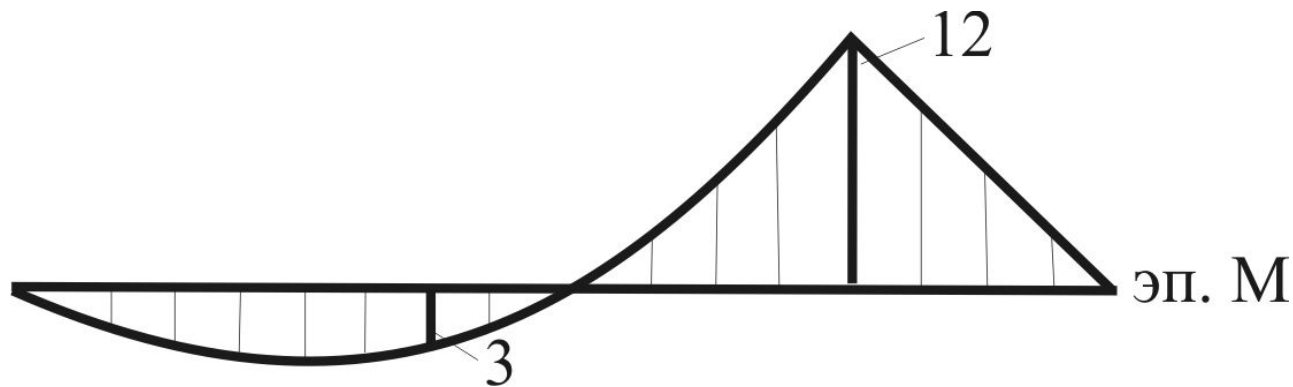
$EI = \text{const}$



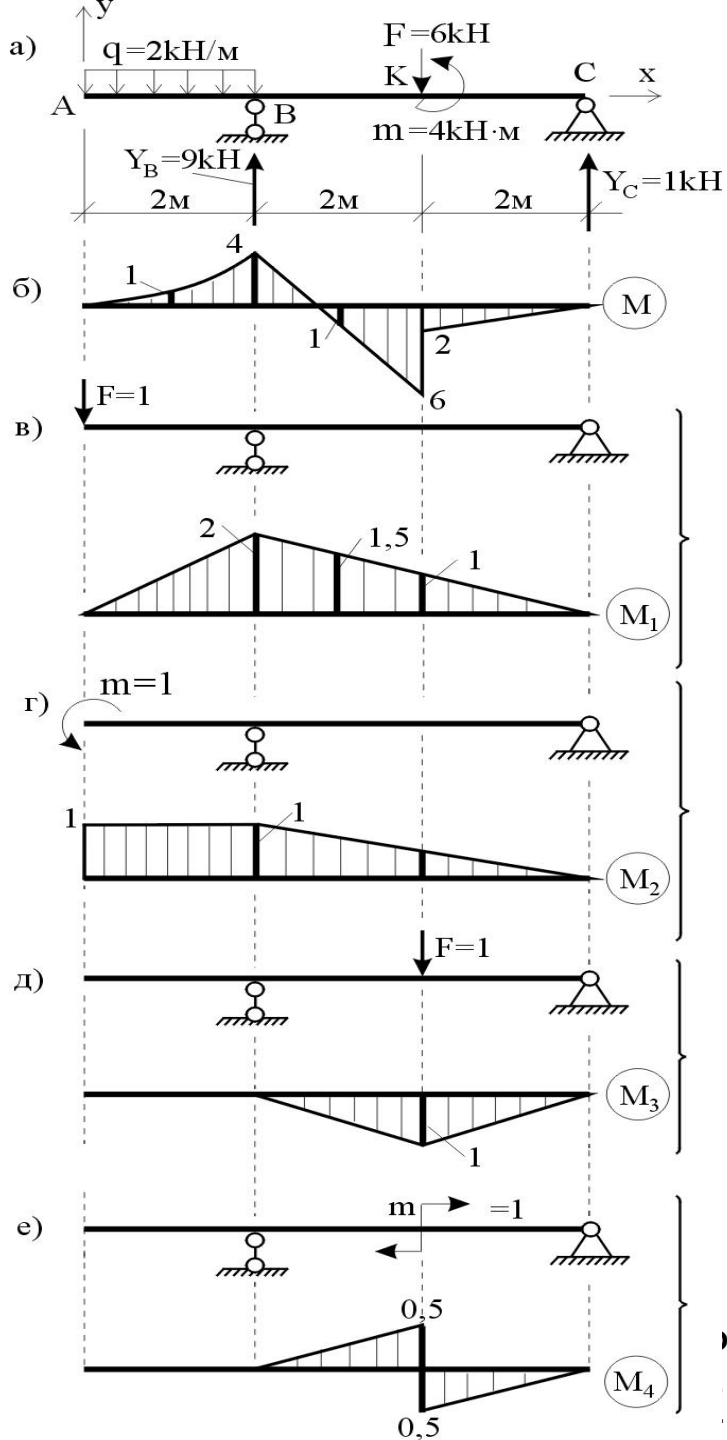
$$0 \leq x \leq 6: M = Y_A x - q \frac{x^2}{2}$$



$$V_K = \sum \int \frac{M_1 M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{6}{6} (0 - 4 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 12) + \frac{12 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{28}{EI}$$



$$\Theta_K = \sum \int \frac{M_2 M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{6}{6} (0 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 + 1 \cdot 12) + \frac{12 \cdot 2}{2} \cdot 1 \right] = \frac{18}{EI}$$

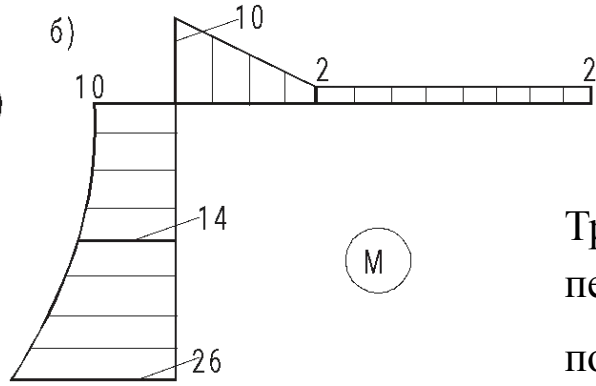
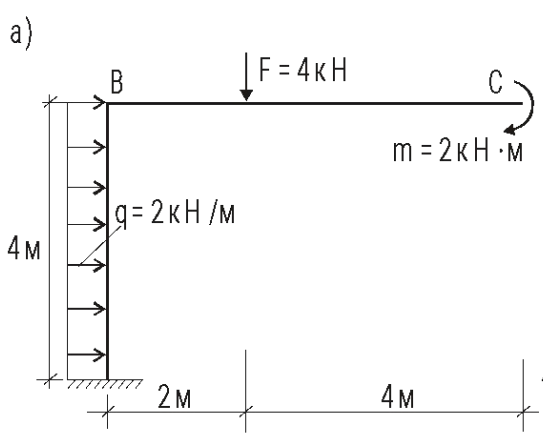


$$v_A = \sum \int \frac{M_1 M}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{2}{6} (0 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4) + \frac{2}{6} (2 \cdot 4 - 4 \cdot 1.5 \cdot 1 - 1 \cdot 6) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{4}{3EI_z}$$

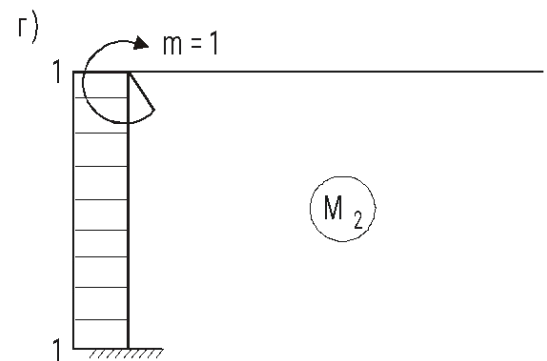
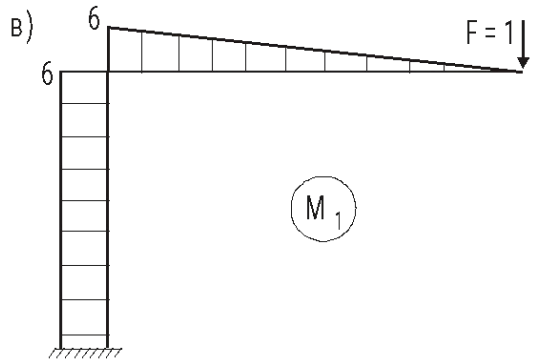
$$\theta_A = \sum \int \frac{M_2 M}{EJ} dx = \frac{1}{EI_z} \left\{ \frac{2}{6} (0 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1) + \frac{2}{6} (4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right\} = \frac{4}{3EI_z}$$

$$v_K = \sum \int \frac{M_3 M}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \left\{ \frac{2}{6} (0 + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right\} = \frac{4}{EI_z}$$

$$\theta_k = \sum \int \frac{M_4 M}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{2}{6} \cdot (0 - 4 \cdot 0.25 \cdot 1 - 0.5 \cdot 6) + \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.5 \right] = -\frac{2}{3EI_z}$$



Требуется определить V_C – вертикальное перемещение точки C и θ_B – угол поворота сечения B при условии, что $EI_p = 2EI_c$.



$$V_C = \Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_1 M}{EI} ds = \frac{(2 \cdot 4) \cdot 2}{EI_p} + \frac{2}{6EI_p} \cdot (10 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 5 + 2 \cdot 4) + \frac{4}{6EI_c} \cdot (26 \cdot 6 + 4 \cdot 14 \cdot 6 + 10 \cdot 6) = 383.3 / EI_c;$$

$$\theta_B = \Delta_{2F} = \sum \int \frac{M_2 M}{EI} ds = \frac{4}{6EI_c} \cdot (1 \cdot 26 + 4 \cdot 1 \cdot 14 + 1 \cdot 10) = 61.33 / EI_c.$$

Теоремы взаимности

В приложении к линейно-деформируемым стержневым системам можно утверждать, что в процессе их деформации вся работа внешних сил T переходит в потенциальную энергию упругой деформации U , накапливаемую системой, то есть

$$T = U \quad (1)$$

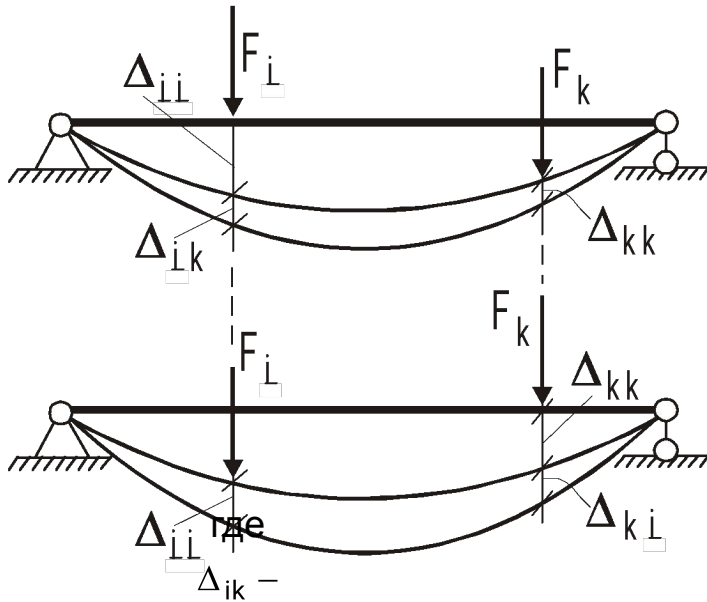
Такая форма закона сохранения энергии возможна потому, что для указанных систем работа внешних сил, расходуемая на преодоление внутреннего трения в материале и связях, на изменение температуры и прочие необратимые потери, оказывается пренебрежимо малой.

Анализ выражения потенциальной энергии упругой деформации U

$$U = \sum \int \frac{N^2 ds}{2EA} + \sum \int \frac{M^2 ds}{2EI_z} + \sum \mu \cdot \int \frac{Q^2 ds}{2GA}.$$

позволяет сделать следующие выводы:

1. Всегда $U \geq 0$;
2. Потенциальная энергия, вызванная группой сил, не равна сумме энергий, вызванных каждой из этих сил в отдельности (т.к., напр., $\int (M_1 + M_2)^2 ds \neq \int M_1^2 ds + \int M_2^2 ds$);
3. Количество потенциальной энергии системы не зависит от последовательности нагружения, а определяется лишь ее исходным и конечным состояниями (т.к. от последовательности нагружения не зависят определяющие U значения усилий N, Q, M).



Рассмотрим два варианта последовательных загрузений системы силами F_i , F_k и определим совершаемые при этом работы.

$$T_1 = \frac{1}{2} \Delta_{ii} F_i + \Delta_{ik} F_i + \frac{1}{2} \Delta_{kk} F_k, \quad (2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \Delta_{kk} F_k + \Delta_{ki} F_k + \frac{1}{2} \Delta_{ii} F_i,$$

где Δ_{ik} — перемещение точки приложения (и по направлению) силы F_i , вызываемое силой F_k .

Поскольку работа, как и U зависит лишь от конечного состояния системы, должно выполняться равенство $T_1 = T_2$, из которого, с учетом (2), следует:

$$\Delta_{ik} F_i = \Delta_{ki} F_k \quad (3)$$

Получено простейшее доказательство **теоремы о взаимности работ**, известной в литературе под названием **теоремы Бетти**.

Из (3), с учетом зависимости $\Delta_{ik} = \delta_{ik} F_k$, получим

$$(\delta_{ik} F_k) F_i = (\delta_{ki} F_i) F_k$$

и, следовательно,

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} \quad (4)$$

Равенство (44) является утверждением **теоремы Максвелла** или **теоремы о взаимности перемещений** для двух единичных состояний упругой системы: *перемещение точки приложения и по направлению i -го усилия от действия k -го единичного усилия, равно перемещению точки приложения и по направлению k -го усилия от действия i -го единичного усилия.*