

# *Временные ряды в эконометрических исследованиях*

---

1. Специфика временного ряда как источника данных в эконометрическом моделировании.
2. Автокорреляция уровней ряда и ее последствия.
3. Моделирование тенденций временного ряда.
4. Использование трендовых моделей для прогнозирования.
5. Методы исключения тенденции при моделировании взаимосвязей по временным рядам.
6. Автокорреляция в остатках. Критерий Дарбина-Уотсона.
7. Модели с лаговыми переменными.
8. Сезонные колебания их учет при построении эконометрических моделей.

- 
- ▣ **Временной (динамический) ряд** – это ряд последовательно расположенных во времени числовых значений соответствующего показателя

**Элементы временного ряда:**

- ▣ **уровни ряда ( $y_t$ )**- числовые значения того или иного показателя;
- ▣ **время ( $t$ )**.

**Виды временных рядов:**

- ▣ **моментные**, если время задано моментами;
- ▣ **интервальные**, если время задано интервалами.

# ***Модели на основе рядов динамики***

---

- Модели изолированного динамического ряда.
- Модели системы взаимосвязанных рядов динамики.
- Модели авторегрессии.
- Модели с распределенным лагом.

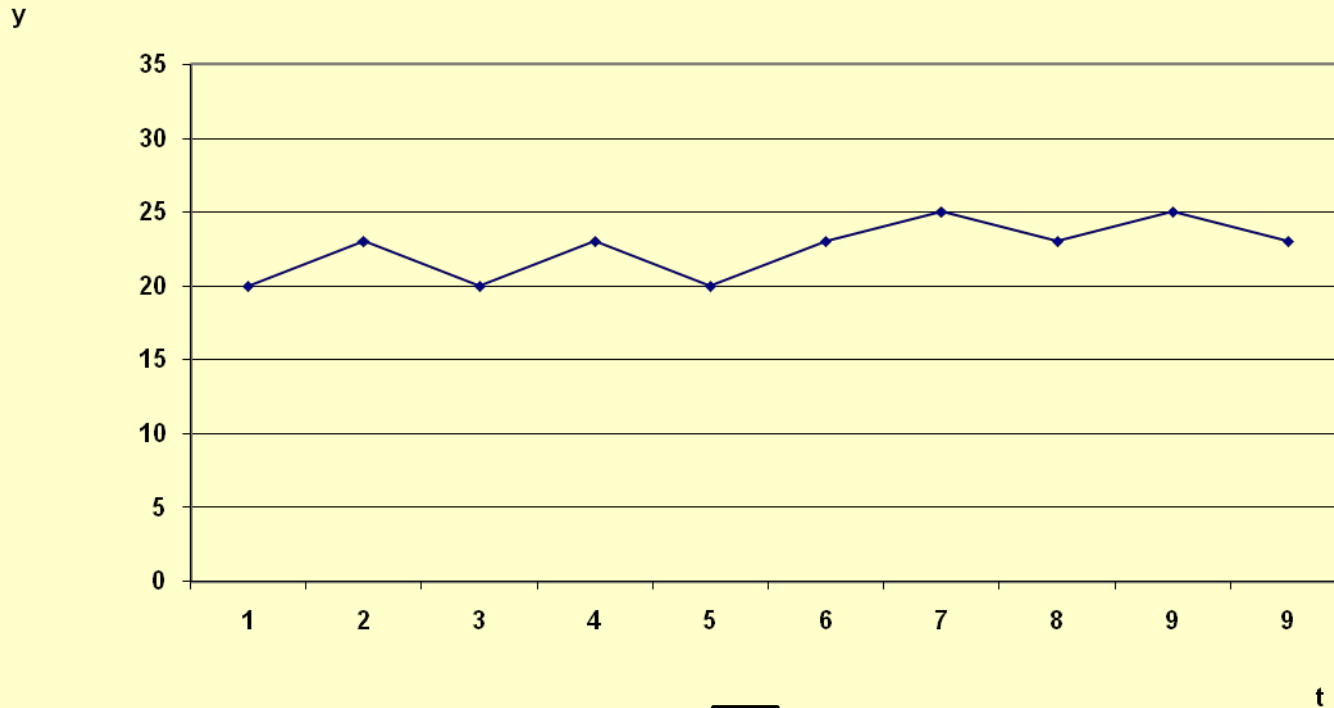
# *Компоненты временного ряда*

---

- Тенденция ( $T$ )
- Периодические колебания ( $P$ )
- Случайные колебания ( $E$ )

$$y_t = f(T, P, E)$$

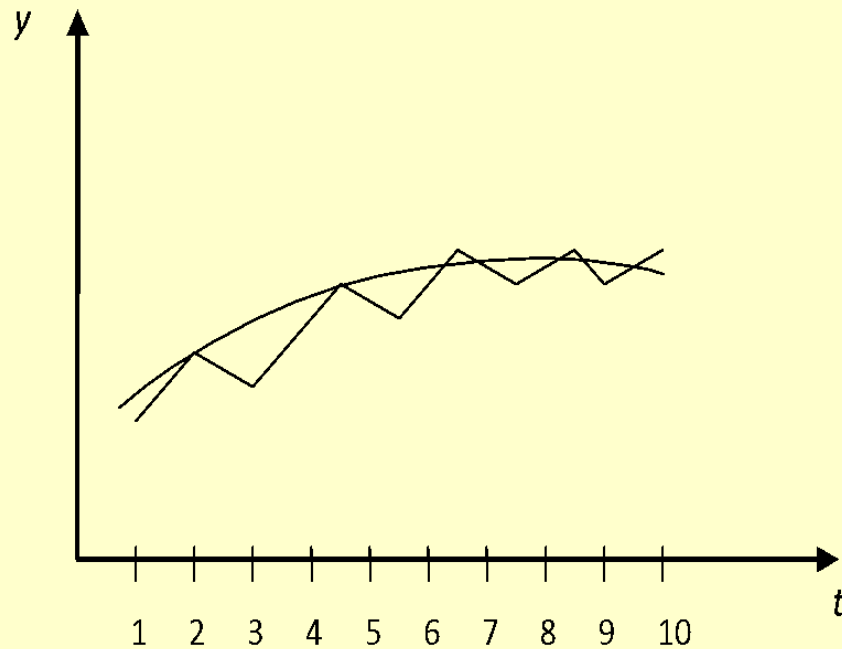
# *Ряд без тенденции и периодических колебаний*



$$y_t = \bar{y} + E$$

# *Ряд с тенденцией*

---



$$y_t = f(T) + E$$



- Ряд с периодическими и случайными колебаниями

$$y_t = f(P, E)$$

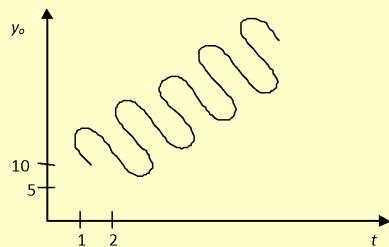


- Ряд с тенденцией, периодическими и случайными колебаниями

$$y_t = f(T, P, E)$$

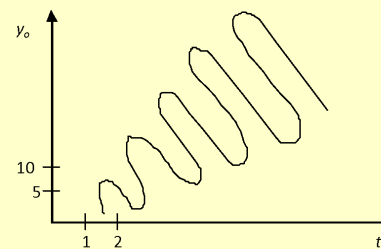
□ Аддитивная модель

$$y_t = T + P + E$$



□ Мультипликативная модель

$$y_t = T \times P \times E$$





# *Автокорреляция уровней ряда и ее последствия*

---

- Корреляционная зависимость между последовательными значениями уровней временного ряда называется *автокорреляцией* уровней ряда

$$r_{y_t y_{t-1}} = \frac{\overline{y_t y_{t-1}} - \overline{y_t} \cdot \overline{y_{t-1}}}{\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t-1}}}$$

---

$$r_{y_t y_{t-1}} = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_t)(y_{t-1} - \bar{y}_{t-1})}{\sqrt{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_t)^2 \sum_{t=2}^n (y_{t-1} - \bar{y}_{t-1})^2}}$$

# Пример

- Имеются данные о расходах на конечное потребление и уровне дохода за 7 промежутков времени в д.е.  $y_t$  - расходы на потребление,  $x_t$  - доходы.

□

$t$	1	2	3	4	5	6	7
$y_t$	7	8	10	9	11	12	14
$x_t$	12	13	16	15	16	18	19

$t$	$x_t$	$x_{t-1}$	$x_t - \bar{x}_t$	$(x_t - \bar{x}_t)^2$	$x_{t-1} - \bar{x}_{t-1}$	$(x_{t-1} - \bar{x}_{t-1})^2$	$(x_t - \bar{x}_t)(x_{t-1} - \bar{x}_{t-1})$
1	12	-	-	-	-	-	-
2	13	12	-3,17	10,05	-3	9	9,51
3	16	13	-0,17	0,03	-2	4	0,34
4	15	16	-1,17	1,37	1	1	-1,17
5	16	15	-0,17	0,03	0	0	0
6	18	16	1,83	3,35	1	1	1,83
7	19	18	2,83	8,01	3	9	8,49
Итого	X	X	X	22,84	X	24	19

$$\bar{x}_t = \frac{13+16+15+16+18+19}{6} = 16,17$$

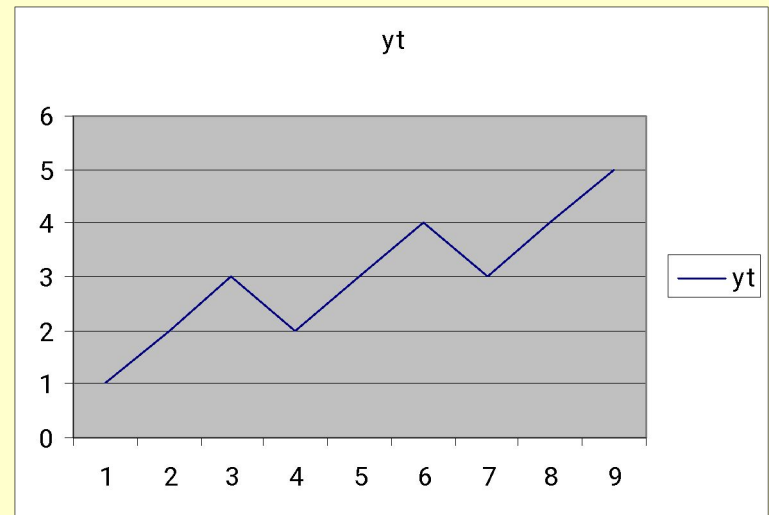
$$\bar{x}_{t-1} = \frac{12+13+16+15+16+18}{6} = 15$$

$$r_{x_t, x_{t-1}} = \frac{19}{\sqrt{22,84 \cdot 24}} = 0,81$$

$$r_{y_t y_{t-1}} = 0,84$$

---

$t$	$y_t$	$y_{t-1}$	$y_{t-2}$	$y_{t-3}$
1	1	-	-	-
2	2	1	-	-
3	3	2	1	-
4	2	3	2	1
5	3	2	3	2
6	4	3	2	3
7	3	4	3	2
8	4	3	4	3
9	5	4	3	4



$$r_1 = 0,6; r_2 = 0,4; r_3 = 1$$

# *Моделирование тенденций временного ряда*

---

- ▣ **Метод аналитического выравнивания** сводится к замене фактических данных сглаженными, определенными по выбранной математической функции. При этом, уровни временного ряда рассматриваются как функция от времени:  $y_t = f(t)$

# *Этапы построения модели тенденции (уравнения тренда)*

---

- Выбор математической функции, описывающей тенденцию
- Оценка параметров модели
- Проверка адекватности выбранной функции и оценка точности модели
- Расчет точечного и интервального прогнозов

# *Виды математических функций, описывающих тенденцию*

---

- Функции с монотонным характером возрастания (убывания) и отсутствием пределов роста (снижения)
- Кривые с насыщением, т. е. устанавливается нижняя или верхняя граница изменения уровней ряда
- S-образные кривые, т. е. кривые с насыщением, имеющие точку перегиба



# Уравнения трендов

---

- линейная:  $y = a + bt$
- параболическая:  $y = a + bt + ct^2$
- степенная:  $y = at^b$
- гиперболоа:  $y = a + \frac{b}{t}$
- показательная:  $y = a \cdot b^t$
- экспонента:  $y = e^{a+bt}$

# Линейный тренд

---

$$y = a + bt$$

$t$	$y = a + bt$	$\Delta y = y_t - y_{t-1}$
1	$a + b$	-
2	$a + 2b$	$b$
3	$a + 3b$	$b$
4	$a + 4b$	$b$

---

$$b = \frac{\overline{y_t t} - \bar{y}_t \bar{t}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2}$$

$$a = \bar{y}_t - b \bar{t}$$

---

$$\sum t = 0 \quad \begin{cases} \sum y = na + b \sum t; \\ \sum yt = a \sum t + b \sum t^2. \end{cases}$$

$$a = \frac{\sum y}{n}; b = \frac{\sum yt}{\sum t^2}$$

# Парабола 2-го порядка

---

$t$	$y_t = a + bt + ct^2$	$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$	$\Delta_t = \Delta_t - \Delta_{t-1}$
1	$a + b +$	-	-
2	$a + 2b + 4$	$b + 3$	-
3	$a + 3b + 9c$	$b + 5$	$2c$
4	$a + 4b + 16c$	$b + 7$	$2c$

---

$$\begin{cases} \sum y_t = na + b \sum t + c \sum t^2 \\ \sum yt = a \sum t + b \sum t^2 + c \sum t^3 \\ \sum yt^2 = a \sum t^2 + b \sum t^3 + c \sum t^4 \end{cases}$$

# Показательная функция $y = a \cdot b^t$

---

$t$	$y = a \cdot b^t$	$K = y_t / y_{t-1}$
1	$ab$	-
2	$ab^2$	$b$
3	$ab^3$	$b$
4	$ab^4$	$b$

# Использование трендовых моделей для прогнозирования

---

$$S_{e(y_p)} = \sqrt{MS_{ост} \left[ 1 + \frac{1}{n} + \frac{(t_p - \bar{t})^2}{\sum (t - \bar{t})^2} \right]}$$

$$MS_{ост} = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - m - 1}$$

$$\hat{y}_{табл} - t \cdot S_{e(y_p)} \leq y_p \leq \hat{y}_{табл} + t \cdot S_{e(y_p)}$$