Временные ряды в эконометрических исследованиях

1. Специфика временного ряда как источника данных в эконометрическом моделировании.
2. Автокорреляция уровней ряда и ее последствия.
3. Моделирование тенденций временного ряда.
4. Использование трендовых моделей для прогнозирования.
5. Методы исключения тенденции при моделировании взаимосвязей по временным рядам.
6. Автокорреляция в остатках. Критерий Дарбина-Уотсона.
7. Модели с лаговыми переменными.
8. Сезонные колебания их учет при построении эконометрических моделей.

- ***Временной (динамический) ряд*** – это ряд последовательно расположенных во времени числовых значений соответствующего показателя

Элементы временного ряда:

- ***уровни ряда*** **(y_t)-** числовые значения того или иного показателя;
- ***время*** **(t).**

Виды временных рядов:

- ***моментные***, если время задано моментами;
- ***интервальные***, если время задано интервалами.

Модели на основе рядов динамики

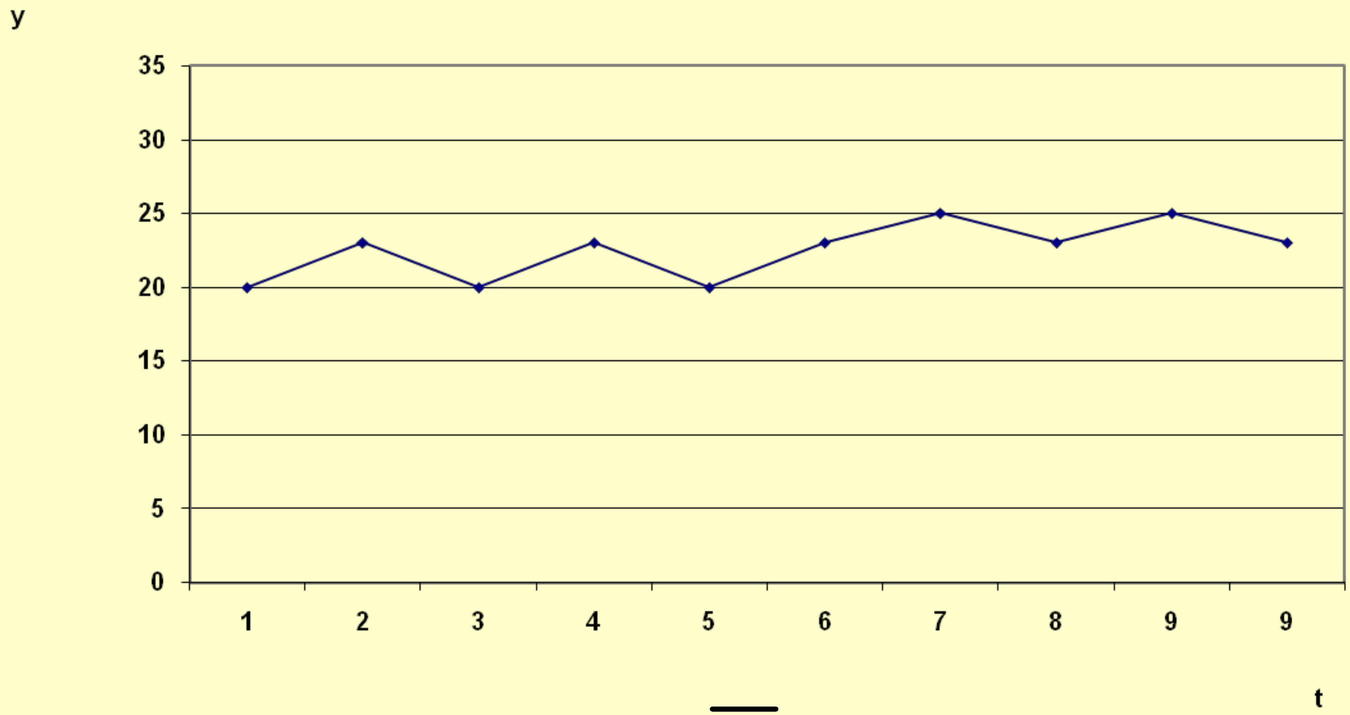
- Модели изолированного динамического ряда.
- Модели системы взаимосвязанных рядов динамики.
- Модели авторегрессии.
- Модели с распределенным лагом.

Компоненты временного ряда

- Тенденция *(T)*
- Периодические колебания *(P)*
- Случайные колебания *(E)*

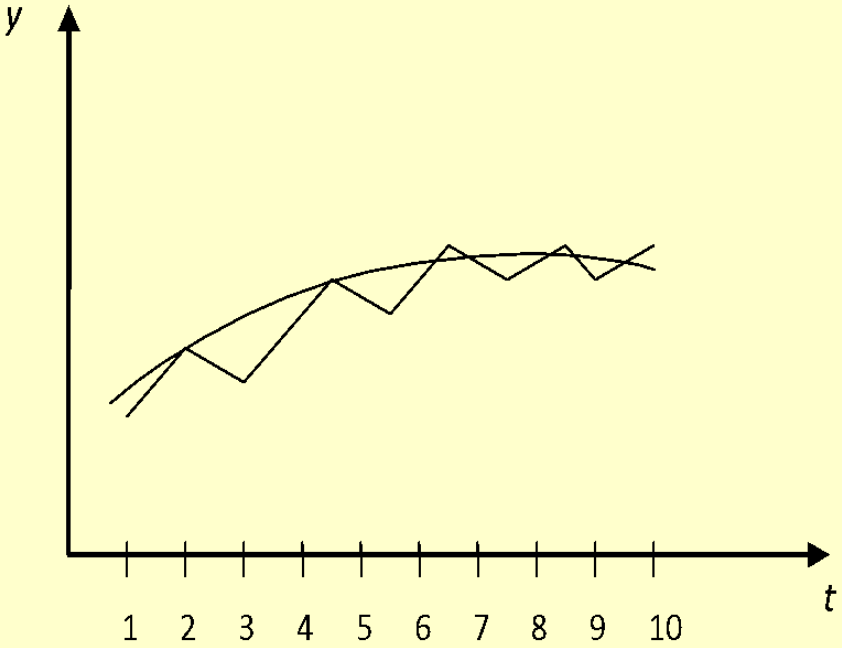
$$y_t = f(T, P, E)$$

Ряд без тенденции и периодических колебаний

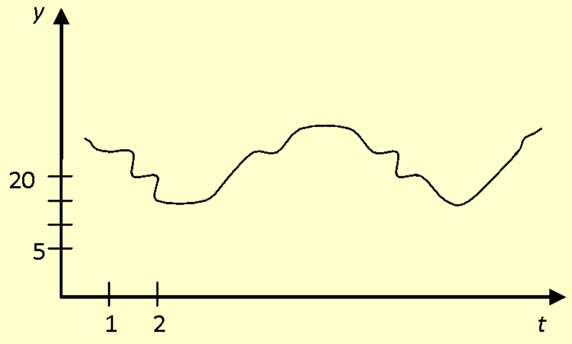


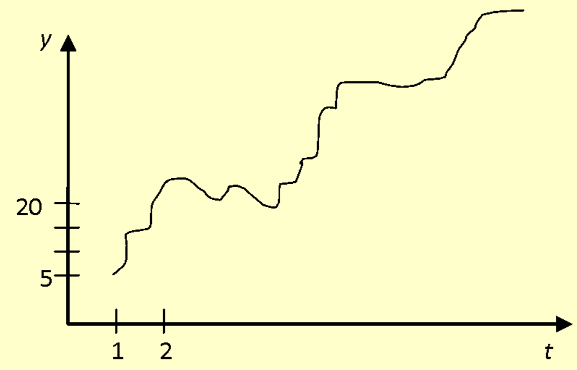
$$y_t = \bar{y} + E$$

Ряд с тенденцией



$$y_t = f(T) + E$$





- Ряд с периодическими и случайными колебаниями

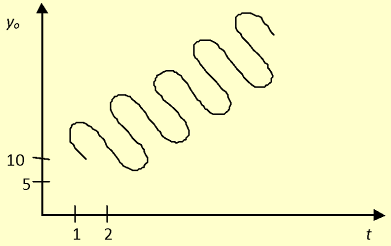
$$y_t = f(P, E)$$

- Ряд с тенденцией, периодическими и случайными колебаниями

$$y_t = f(T, P, E)$$

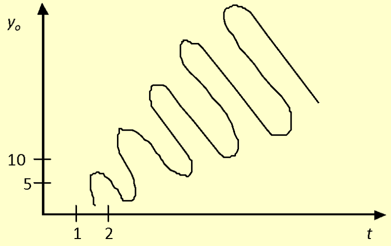
- Аддитивная модель

$$y_t = T + P + E$$



- Мультипликативная модель

$$y_t = T \times P \times E$$



Автокорреляция уровней ряда и ее последствия

- Корреляционная зависимость между последовательными значениями уровней временного ряда называется *автокорреляцией* уровней ряда

$$r_{y_t y_{t-1}} = \frac{\overline{y_t y_{t-1}} - \overline{y_t} \cdot \overline{y_{t-1}}}{\sigma_{y_t} \sigma_{y_{t-1}}}$$

$$r_{y_t y_{t-1}} = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - \bar{y}_t\right)\left(y_{t-1} - \bar{y}_{t-1}\right)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}\left(y_t - \bar{y}_t\right)^2 \sum_{t=2}^{n}\left(y_{t-1} - \bar{y}_{t-1}\right)^2}}$$

Пример

- *Имеются данные о расходах на конечное потребление и уровне дохода за 7 промежутков времени в д.е. y_t - расходы на потребление, x_t- доходы.*
-

t	1	2	3	4	5	6	7
y_t	7	8	10	9	11	12	14
x_t	12	13	16	15	16	18	19

t	x_t	x_{t-1}	$x_t-\overline{x_t}$	$\left(x_t-\overline{x_t}\right)^2$	$x_{t-1}-\bar{x}_{t-1}$	$\left(x_{t-1}-\bar{x}_{t-1}\right)^2$	$(x_t-\bar{x}_t)(x_{t-1}-\bar{x}_{t-1})$
1	12	-	-	-	-	-	-
2	13	12	-3,17	10,05	-3	9	9,51
3	16	13	-0,17	0,03	-2	4	0,34
4	15	16	-1,17	1,37	1	1	-1,17
5	16	15	-0,17	0,03	0	0	0
6	18	16	1,83	3,35	1	1	1,83
7	19	18	2,83	8,01	3	9	8,49
Итого	X	X	X	22,84	X	24	19

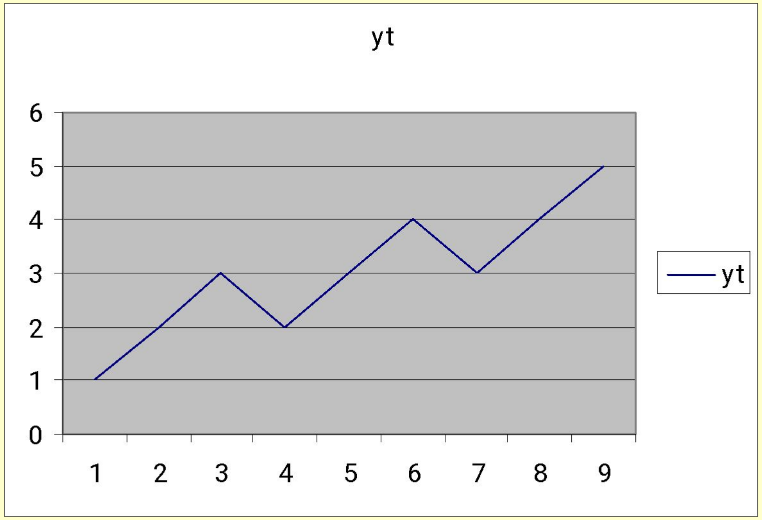
$$\overline{x_t}=\frac{13+16+15+16+18+19}{6}=16,17$$

$$\overline{x_{t-1}}=\frac{12+13+16+15+16+18}{6}=15$$

$$r_{x_t,x_{t-1}}=\frac{19}{\sqrt{22,84\cdot 24}}=0,81$$

$$r_{y_t y_{t-1}}=0,84$$

t	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}
1	1	-	-	-
2	2	1	-	-
3	3	2	1	-
4	2	3	2	1
5	3	2	3	2
6	4	3	2	3
7	3	4	3	2
8	4	3	4	3
9	5	4	3	4



$$r_1 = 0,6; r_2 = 0,4; r_3 = 1$$

Моделирование тенденций временного ряда

- ***Метод аналитического выравнивания*** сводится к замене фактических данных сглаженными, определенными по выбранной математической функции. При этом, уровни временного ряда рассматриваются как функция от времени: $y_t = f(t)$

Этапы построения модели тенденции (уравнения тренда)

- Выбор математической функции, описывающей тенденцию
- Оценка параметров модели
- Проверка адекватности выбранной функции и оценка точности модели
- Расчет точечного и интервального прогнозов

Виды математических функций, описывающих тенденцию

- Функции с монотонным характером возрастания (убывания) и отсутствием пределов роста (снижения)
- Кривые с насыщением, т. е. устанавливается нижняя или верхняя граница изменения уровней ряда
- *S*-образные кривые, т. е. кривые с насыщением, имеющие точку перегиба

Уравнения трендов

- линейная: $y = a + bt$
- параболическая: $y = a + bt + ct^2$
- степенная: $y = at^b$
- гипербола: $y = a + \frac{b}{t}$
- показательная: $y = a \cdot b^t$
- экспонента: $y = e^{a+bt}$

Линейный тренд

$$y = a + bt$$

t	$y = a + bt$	$\Delta y = y_t - y_{t-1}$
1	$a + b$	-
2	$a + 2b$	b
3	$a + 3b$	b
4	$a + 4b$	b

$$b = \frac{\overline{y_t t} - \bar{y}_t \bar{t}}{\overline{t^2} - \bar{t}^2}$$

$$a = \bar{y}_t - b\bar{t}$$

$$\sum t = 0$$

$$\begin{cases} \sum y = na + b\sum t; \\ \sum yt = a\sum t + b\sum t^2. \end{cases}$$

$$a = \frac{\sum y}{n}; b = \frac{\sum yt}{\sum t^2}$$

Парабола 2-го порядка

t	$y_t = a + bt + ct^2$	$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$	$\Delta_t = \Delta_t - \Delta_{t-1}$
1	$a + b +$	-	-
2	$a + 2b + 4$	$b + 3$	-
3	$a + 3b + 9c$	$b + 5$	$2c$
4	$a + 4b + 16c$	$b + 7$	$2c$

$$
\begin{cases}
\sum y_t = na + b\sum t + c\sum t^2 \\
\sum yt = a\sum t + b\sum t^2 + c\sum t^3 \\
\sum yt^2 = a\sum t^2 + b\sum t^3 + c\sum t^4
\end{cases}
$$

Показательная функция $y = a \cdot b^t$

t	$y = a \cdot b^t$	$K = y_t / y_{t-1}$
1	ab	-
2	ab^2	b
3	ab^3	b
4	ab^4	b

Использование трендовых моделей для прогнозирования

$$S_{e(\hat{y}_p)} = \sqrt{MS_{ост}\left[1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(t_p - \bar{t}\right)^2}{\sum\left(t - \bar{t}\right)^2}\right]}$$

$$MS_{ост} = \frac{\sum\left(y - \hat{y}\right)^2}{n - m - 1}$$

$$\hat{y}_p - t_{табл} \cdot S_{e(\hat{y}_p)} \leq y_p \leq \hat{y}_p + t_{табл} \cdot S_{e(\hat{y}_p)}$$