



# Интегральное исчисление

Лекция 1. Неопределенный  
интеграл

# План

Первообразная

Таблица интегралов

Замена переменных в неопределенном  
интеграле

Метод интегрирования по частям

Интегрирование простейших рациональных  
дробей

Интегрирование некоторых видов  
иррациональностей.

Интегрирование тригонометрических функций

## П.1 Первообразная

*Определение.* Первообразной функцией для данной функции  $f(x)$  на промежутке  $(a, b)$  называется такая функция  $F(x)$ , производная которой равна  $f(x)$  или дифференциал которой равен  $f(x)dx$  на рассматриваемом промежутке.

*Теорема.* Если функция  $F(x)$  есть первообразная от функции  $f(x)$  на отрезке  $(a, b)$ , то всякая другая первообразная от  $f(x)$  отличается от  $F(x)$  на постоянное слагаемое, т.е. может быть представлена в виде

$$F(x) + C, \text{ где } C \text{ – постоянная.}$$

**Определение.** Если на отрезке  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , функция  $F(x)$  является первообразной для  $f(x)$ , то выражение  $F(x) + C$ , где  $C$  - произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции  $f(x)$ . Обозначается:  $\int f(x)dx = F(x) + C$ .

**Геометрический смысл неопределенного интеграла.** С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет совокупность (семейство) кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз, т.е. вдоль оси  $Oy$ . График первообразной функции  $f(x)$  называется *интегральной кривой*.

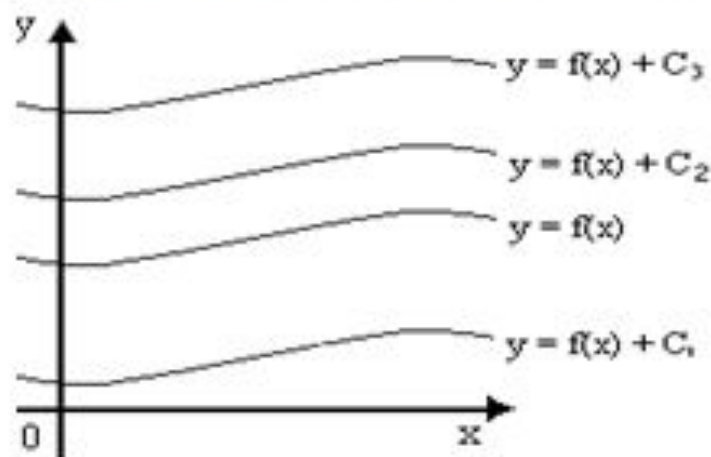


Рис.

*Основные свойства неопределенного интеграла.* Опираясь на определение неопределенного интеграла, выведем основные его свойства.

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.:  $d\int f(x)dx = f(x)dx$  и  $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$ .

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого т.е.:  $\int dF(x) = F(x) + C$ , где  $C$  - произвольное постоянное.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е.  $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$ .

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных на отрезке  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, т.е.

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx.$$

## П.2 Таблица интегралов

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, x \neq 0.$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, a \neq 0.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C; \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, a \neq 0.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + C, a \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi k}{a}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad \int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax + C, a \neq 0, x \neq \frac{\pi k}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, |x| < 1; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < a.$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, a \neq 0, x \neq \pm a.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C.$$

При вычислении неопределенных интегралов полезно иметь в виду следующие преобразования дифференциала, которые основываются на определении дифференциала  $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$ :

1.  $dx = \frac{1}{a}d(ax + b)$ , где  $a = \text{const} \neq 0$

2.  $\frac{dx}{x} = d \ln|x|$ .

3.  $\sin x dx = -d(\cos x)$ .

4.  $\cos x dx = d(\sin x)$ .

5.  $x dx = \frac{1}{2}d(x^2)$ .

### **Методы интегрирования.**

- 1) метод разложения;
- 2) метод подстановки;
- 3) метод интегрирования по частям.

## П.3 Замена переменной в неопределенном интеграле

*Метод замены переменной (подстановка).* Данный способ часто бывает полезным в тех случаях, когда интеграл  $\int f(x)dx$  не может быть непосредственно преобразован к виду табличного. Он заключается в переходе от данной переменной интегрирования к другой переменной для упрощения подынтегрального выражения.

Данная формула (1) называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

В интеграле  $\int f(x)dx$  сделаем подстановку  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  - функция, имеющая непрерывную производную, тогда

$$f(x) = f[\varphi(t)], \quad dx = \varphi'(t)dt,$$

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt. \quad (1)$$



## П.4 Метод интегрирования по частям

Пусть  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  - две функции от  $x$ , имеющие непрерывные производные на отрезке  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

Из дифференциального исчисления мы знаем, что  $d(uv) = u dv + v du$ .

Интегрируя обе части этого равенства, имеем

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (2)$$

Формула (2) называется формулой интегрирования по частям, её применяют для вычисления интегралов вида:  $\int P(x) f(x) dx$ , где  $P(x)$  - многочлен (в частности, степенная функция  $x^n$ ),  $f(x)$  - одна из следующих функций -  $e^{ax}$ ,  $\sin ax$ ,  $\cos ax$ ,  $\ln x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctg x$ ,  $\text{arcctg} x$ .

При этом для интегралов вида:  $\int P(x) e^{ax} dx$ ,  $\int P(x) \sin ax dx$ ,  $\int P(x) \cos ax dx$ , за  $u$  принимается многочлен  $P(x)$ , а для интегралов вида:

$$\int P(x) \ln x dx, \int P(x) \arcsin x dx, \int P(x) \arccos x dx, \int P(x) \arctg x dx, \int P(x) \text{arcctg} x dx,$$

за  $u$  принимается  $\ln x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctg x$ ,  $\text{arcctg} x$ .

**Пример** Найти  $\int 2^x dx$ .

Решение. Применяя формулу 3 из таблиц интегралов, получаем  $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ .

**Пример** Найти  $\int (2x^3 - 3 \sin x + 5\sqrt{x}) dx, x \geq 0$ .

Решение.

$$\begin{aligned}\int (2x^3 - 3 \sin x + 5\sqrt{x}) dx &= \int 2x^3 dx - \int 3 \sin x dx + \int 5\sqrt{x} dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int \sin x dx + 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= 2 \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} x^4 + 3 \cos x + \frac{10}{3} x\sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

**Пример** Найти  $\int \frac{dx}{ax+b}, a \neq 0$ .

Решение. Используя преобразование 1, получим

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

**Пример** Найти  $\int \sqrt{x-2} \, dx$ .

Решение. Так как выражение  $\sqrt{x-2}$  можно записать в виде  $(x-2)^{\frac{1}{2}}$ , тогда, применив преобразование 1, имеем

$$\int \sqrt{x-2} \, dx = \int (x-2)^{\frac{1}{2}} d(x-2) = \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

**Пример** Найти  $\int \sin 5x \, dx$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

Решение. Используя преобразование 1, имеем

$$\int \sin 5x \, dx = \frac{1}{5} \int \sin 5x \, d(5x) = -\frac{1}{5} \cos 5x + C.$$

**Пример** . Найти  $\int \frac{x \, dx}{x^2+1}$ .

Решение. Применив преобразование 5, получим

$$\int \frac{x \, dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

**Пример** Найти  $\int \frac{x^3 + 4x + 2}{2x} dx, x \neq 0$ .

**Решение.** Так как подынтегральную функцию можно разложить следующим образом

$$\frac{x^3 + 4x + 2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x}, \quad \text{то}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 4x + 2}{2x} dx &= \int \left( \frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \int x^2 dx + 2 \int dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C = \\ &= \frac{x^3}{6} + 2x + \ln|x| + C. \end{aligned}$$

**Пример** Найти  $\int x\sqrt{x-5} dx$ .

**Решение.** Данный интеграл не является табличным, поэтому произведем замену, пусть  $\sqrt{x-5} = t$ , отсюда  $x = t^2 + 5$  и, следовательно,  $dx = 2t dt$ . Производя подстановку, последовательно получим

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-5} dx &= \int (t^2 + 5) \cdot t \cdot 2t dt = \int (2t^4 + 10t^2) dt = 2 \int t^4 dt + 10 \int t^2 dt = \\ &= 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 10 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

**Пример** Найти  $\int \frac{\sqrt[3]{1 + ctgx}}{\sin^2 x} dx$ .

**Решение.** Преобразуем подынтегральное выражение следующим образом.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1 + ctgx}}{\sin^2 x} dx = \int \sqrt[3]{1 + ctgx} \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + ctgx)^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Произведем замену:  $t = 1 + ctgx$ , следовательно,  $dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ , тогда получим

$$\int (1 + ctgx)^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\int t^{\frac{1}{3}} dt = -\frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{3}{4} (1 + ctgx)^{\frac{4}{3}} + C.$$

**Пример** Найти  $\int x \sin x dx$ .

**Решение.** Исходя из правила, положим, что  $u = x$ ,  $\sin x dx = dv$ ; отсюда найдем  $du = dx$ ,  $v = -\cos x$ . Применяя формулу (2), имеем

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx,$$

а  $\int \cos x dx = \sin x + C$ . Поэтому окончательно получаем

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

**Пример** Найти  $\int e^{2x} \cos 3x dx$ .

Решение. Положим  $u = e^{2x}$ ,  $dv = \cos 3x dx$ , откуда  $du = 2e^{2x} dx$ ,  $v = \frac{1}{3} \sin 3x$ . Тогда

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx.$$

К последнему интегралу снова применим интегрирование по частям, положив  $u = e^{2x}$ ,  $dv = \sin 3x dx$ , тогда  $du = 2e^{2x} dx$ ,  $v = -\frac{1}{3} \cos 3x$ . Следовательно,

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx.$$

Таким образом,

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \cdot \left( -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx \right), \text{ или}$$

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} (\sin 3x + \frac{2}{3} \cos 3x) - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cos 3x dx.$$

В правой части последнего соотношения стоит искомый интеграл  $\int e^{2x} \cos 3x dx$ . Переносим его в левую часть, получим

$$\left(1 + \frac{4}{9}\right) \int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} e^{2x} \left( \sin 3x + \frac{2}{3} \cos 3x \right).$$

Отсюда

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x}(3 \sin 3x + 2 \cos 3x)}{13}.$$

Полученная функция есть одна из первообразных от функции  $e^{2x} \cos 3x$ . Чтобы найти все первообразные, остается к правой части прибавить произвольную постоянную  $C$ :

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x}(3 \sin 3x + 2 \cos 3x)}{13} + C.$$

## П.5 Интегрирование простейших рациональных дробей

### *Рациональные дроби.*

#### *Выделение правильной рациональной дроби*

дробной рациональной функцией или просто рациональной дробью называется функция, равная частному от деления двух многочленов:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где  $P_m(x)$  — многочлен степени  $m$ , а  $Q_n(x)$  — многочлен степени  $n$ .

Например: 
$$R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x - 1}.$$

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя; в противном случае рациональная дробь называется *неправильной*. Приведенная выше рациональная дробь *неправильна*.

Отметим прежде всего, что *всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.*



В самом деле, пусть  $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  — неправильная рациональная дробь, т. е. степень  $P(x)$  больше или равна степени  $Q(x)$ . Разделив числитель на знаменатель, получим тождество

$$P(x) - Q(x)L(x) = r(x),$$

где  $L(x)$  и  $r(x)$  — многочлены, причем степень остатка  $r(x)$  меньше степени знаменателя дроби  $Q(x)$ .

Отсюда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)},$$

где  $\frac{r(x)}{Q(x)}$  — правильная рациональная дробь.

Например, пусть  $R(x) = \frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x - 1}$ . Разделив  $x^4 + 5x^3 - 6x + 5$  на  $x^3 + 2x - 1$ , получим частное  $L(x) = x + 5$  и остаток  $r(x) = -2x^2 - 15x + 10$ .

Следовательно,

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x - 1} = x + 5 + \frac{-2x^2 - 15x + 10}{x^3 + 2x - 1}.$$

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  сводится к интегрированию многочлена  $L(x)$  и правильной рациональной дроби  $\frac{r(x)}{Q(x)}$ :

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left[ L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)} \right] dx = \int L(x) dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx.$$

Так как многочлен мы интегрировать умеем, то остается рассмотреть интегрирование правильных рациональных дробей.

Как мы увидим ниже всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа так называемых *простейших* дробей следующих четырех типов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \text{ II. } \frac{A}{(x-a)^n} (n = 2, 3, \dots); \text{ III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \text{ IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} (n = 2, 3, \dots)$$

где  $A, a, p, q, M$  и  $N$  — действительные числа, а трехчлен  $x^2+px+q$  не имеет действительных корней, т. е.  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ .

## Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование простейших дробей I и II типов не представляет никакого труда. В самом деле:

$$\text{I. } \int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A dx}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n} d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Перейдем теперь к интегрированию рациональных дробей III и IV типов.

$$\text{III. } \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx.$$

Рассмотрим отдельно знаменатель  $x^2 + px + q$  и дополним  $x^2 + px$  до полного квадрата:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2 \frac{p}{2} x + \frac{p^2}{4} + \left( q - \frac{p^2}{4} \right) = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 + \left( q - \frac{p^2}{4} \right).$$

Так как по условию трехчлен  $x^2 + px + q$  не имеет действительных корней, то выражение  $q - \frac{p^2}{4} > 0$ . Введем обозначение  $q - \frac{p^2}{4} = a^2$ . Применим теперь к интегралу замену переменной, положив  $t = x + \frac{p}{2}$  \*. Отсюда

\* Эту подстановку легко запомнить, если заметить, что  $t$  равно половине производной знаменателя:  $t = \frac{1}{2} (x^2 + px + q)' = x + \frac{p}{2}$ .

$$x = t - \frac{p}{2}, \quad dx = dt, \quad x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = t^2 + a^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{M \left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2} dt = M \int \frac{t dt}{t^2 + a^2} + \\ &+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C. \end{aligned}$$

Заменяя, наконец,  $t$  и  $a$  их выражениями, получим

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{4}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

**Пример.** Найти

$$\int \frac{3x + 5}{x^2 + 2x + 10} dx.$$

**Решение.** Введем новую переменную  $t$ , положив ее равной половине производной знаменателя Тогда

$$t = \frac{1}{2} (x^2 + 2x + 10)' = x + 1, \quad x = t - 1, \quad dx = dt.$$

$$x^2 + 2x + 10 = (t - 1)^2 + 2(t - 1) + 10 = t^2 + 9.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x + 5}{x^2 + 2x + 10} dx &= \int \frac{3(t - 1) + 5}{t^2 + 9} dt = 3 \int \frac{t dt}{t^2 + 9} + 2 \int \frac{dt}{t^2 + 9} = \\ &= \frac{3}{2} \ln(t^2 + 9) + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2x + 10) + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{3} + C. \end{aligned}$$

## П.6 Интегрирование простейших иррациональных дробей

### 1. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx$

Интегралы вида

$$\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx$$

где  $n$  — целое число, а  $R(x; \sqrt[n]{ax+b})$  — рациональное выражение относительно  $x$  и  $\sqrt[n]{ax+b}$ , могут быть сведены к интегралам от рациональных функций. В самом деле, сделаем в интеграле

замену переменной, положив  $ax+b = z^n$ ; тогда  $x = \frac{z^n - b}{a}$ ,  $dx = \frac{nz^{n-1}}{a} dz$ ,  $\sqrt[n]{ax+b} = z$ .

Следовательно,

$$\int R(x; \sqrt[n]{ax+b}) dx = \int R\left(\frac{z^n - b}{a}; z\right) \frac{nz^{n-1}}{a} dz.$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства, есть интеграл от рациональной функции относительно переменной интегрирования  $z$ , следовательно, может быть найден

**Пример** Найти  $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} dx$ .

**Решение.** Здесь  $ax+b=x$ ,  $n=2$ . Полагаем  $x=z^2$ , откуда  $dx=2z dz$ .

Следовательно,

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} dx = \int \frac{(1-z)2z dz}{z^2-2z} = 2 \int \frac{(1-z) dz}{z-2}.$$

Таким образом, мы свели наш интеграл к интегралу от рациональной функции.

$$2 \int \frac{(1-z) dz}{z-2} = 2 \int \left( -1 - \frac{1}{z-2} \right) dz = -2z - 2 \ln|z-2| + C.$$

Подставляя вместо  $z$  его выражение через  $x$ , т. е.  $z=\sqrt{x}$ , имеем

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} dx = -2(\sqrt{x} + \ln|\sqrt{x}-2|) + C.$$

**Пример** Найти  $\int \frac{2x + \sqrt{2x-3}}{3 \sqrt[4]{2x-3} + \sqrt[4]{(2x-3)^3}} dx$ .

**Решение.** Приводя в подынтегральном выражении радикалы к одному показателю, убеждаемся, что оно рационально зависит от  $x$  и от  $\sqrt[4]{2x-3}$ :

$$\frac{2x + \sqrt{2x-3}}{3 \sqrt[4]{2x-3} + \sqrt[4]{(2x-3)^3}} = \frac{2x + (\sqrt[4]{2x-3})^2}{3 \sqrt[4]{2x-3} + (\sqrt[4]{2x-3})^3}.$$

$n = 4$ , поэтому полагаем  $2x - 3 = z^4$ . Отсюда  $x = \frac{z^4 + 3}{2}$ ,  
 $dx = 2z^3 dz$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + \sqrt{2x-3}}{3 \sqrt[4]{2x-3} + \sqrt[4]{(2x-3)^3}} dx &= \int \frac{(z^4 + 3 + z^2) 2z^3}{3z + z^3} dz = 2 \int \frac{z^6 + z^4 + 3z^2}{3 + z^2} dz = \\ &= 2 \int \left( z^4 - 2z^2 + 9 - \frac{27}{3 + z^2} \right) dz = \\ &= 2 \left( \frac{z^5}{5} - \frac{2z^3}{3} + 9z - \frac{27}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{3}} \right) + C, \text{ где } z = \sqrt[4]{2x-3}. \end{aligned}$$



Интегралы более общего вида:

$$\int R \left( x; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx,$$

где  $R$  — рациональное выражение от  $x$  и  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ , приводятся к интегралам от рациональной функции подстановкой  $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$ .

*Интеграл вида* 
$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} dx.$$

Частными видами этих интегралов являются интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}}.$$

Первый интеграл табличный:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (1)$$

Для вычисления второго интеграла сделаем замену переменной, полагая  $\sqrt{x^2 + m} = -x + t$ . Возведя обе части равенства в квадрат, получим  $x^2 + m = x^2 - 2xt + t^2$ . Отсюда

$$x = \frac{t^2 - m}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + m}{2t^2} dt.$$

Так как, кроме того,  $\sqrt{x^2 + m} = -x + t = -\frac{t^2 - m}{2t} + t = \frac{t^2 + m}{2t}$ , то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \int \frac{\frac{t^2 + m}{2t^2} dt}{\frac{t^2 + m}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C.$$

Но так как  $t = \sqrt{x^2 + m} + x$ , то окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + m}| + C. \quad (2)$$

Этот интеграл часто встречается, поэтому формулу (2) необходимо запомнить.

Перейдем теперь к интегралам вида  $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} dx$ . Эти интегралы заменой переменной  $t = \frac{1}{2}(Ax^2 + Bx + C)'$  приводятся к интегралам вида  $\int \frac{Dt + E}{\sqrt{At^2 + m}} dt$ .

Вычисление последнего интеграла при  $A > 0$  сводится к интегралу вида (2), а при  $A < 0$  — к интегралу вида (1)

**Пример** Найти  $\int \frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}} dx$ .

**Решение.** Полагая  $t = \frac{1}{2}(6-2x-x^2)'$ , имеем:  $t = -1-x$ ,  $x = -1-t$ ,  $dx = -dt$  и  $6-2x-x^2 = 6-2(-1-t) - (-1-t)^2 = 7-t^2$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}} dx &= \int \frac{-1-t+5}{\sqrt{7-t^2}} (-dt) = \int \frac{t-4}{\sqrt{7-t^2}} dt = \int \frac{t dt}{\sqrt{7-t^2}} - \\ &- 4 \int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}} = -\sqrt{7-t^2} - 4 \arcsin \frac{t}{\sqrt{7}} + C = \\ &= -\sqrt{6-2x-x^2} + 4 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

Пример Найти  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$

Решение. Полагаем:  $t = \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 5)' = x + 2$ . Тогда  $x = t - 2$ ,  
 $dx = dt$ ,  $x^2 + 4x + 5 = (t - 2)^2 + 4(t - 2) + 5 = t^2 + 1$ .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} &= \int \frac{(t-2) dt}{\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{t dt}{\sqrt{t^2+1}} - 2 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \\ &= \sqrt{t^2+1} - 2 \ln |t + \sqrt{t^2+1}| + C = \sqrt{x^2+4x+5} - \\ &\quad - 2 \ln |x+2 + \sqrt{x^2+4x+5}| + C. \end{aligned}$$

## Интегралы видов $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ и $\int \sqrt{x^2 + m} dx$

Рассмотрим, например, второй интеграл

$$\int \sqrt{x^2 + m} dx = \int \frac{x^2 + m}{\sqrt{x^2 + m}} dx = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + m}} + m \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}}. \quad (3)$$

По формуле (2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + m}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + m}| + C.$

Для вычисления интеграла  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + m}}$  применим метод интегрирования по частям, полагая  $u = x$ ,  $dv = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + m}}$ ; тогда  $du = dx$ ,  $v = \sqrt{x^2 + m}$ .

Следовательно,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + m}} = x \sqrt{x^2 + m} - \int \sqrt{x^2 + m} dx.$$

Подставляя найденные значения интегралов в равенство (3), получим

$$\int \sqrt{x^2 + m} dx = x \sqrt{x^2 + m} - \int \sqrt{x^2 + m} dx + m \ln |x + \sqrt{x^2 + m}|.$$

В правой и в левой частях последнего соотношения стоит иско-  
мый интеграл  $\int \sqrt{x^2 + m} dx$ . Переносим его в левую часть, найдем

$$\int \sqrt{x^2 + m} dx = \frac{1}{2} (x \sqrt{x^2 + m} + m \ln |x + \sqrt{x^2 + m}|) + C.$$

Аналогичным приемом можно показать, что

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C.$$

## П.7 Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы вида  $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа

Рассмотрим вначале случай, когда одно из чисел  $m$  или  $n$  нечетно. В этом случае интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций. Сущность метода интегрирования ясна из следующих примеров.

**Пример** Найти  $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$ .

**Решение.** Замечая, что  $\sin x dx = -d \cos x$ , сделаем замену переменной, положив  $z = \cos x$ . Это дает  $dz = -\sin x dx$ , и, следовательно, так как  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - z^2$ , получим

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^4 x dx &= \int \sin^4 x \cos^4 x \cdot \sin x dx = - \int (1 - z^2)^2 z^4 dz = \\ &= - \int (z^4 - 2z^6 + z^8) dz = - \frac{z^5}{5} + \frac{2z^7}{7} - \frac{z^9}{9} + C = \\ &= \frac{-\cos^5 x}{5} + \frac{2 \cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C. \end{aligned}$$

**Пример** . Найти  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$ .

**Решение.** Так как  $\cos x dx = d \sin x$ , то полагая  $z = \sin x$ , получим  $dz = \cos x dx$ ,  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - z^2$ ,  $\sin^2 x = z^2$ , и

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1 - z^2}{z^2} dz = \int \left( \frac{1}{z^2} - 1 \right) dz = \\ &= -\frac{1}{z} - z + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C. \end{aligned}$$

**Замечание.** Этот же метод применим и в том случае, когда одно из чисел  $m$  или  $n$  нечетно и положительно, а другое — любое действительное число.

**Пример** Найти  $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$ .

**Решение.** Имеем:  $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx = \int \cos^{2/3} x \sin^2 x \sin x dx$ .  
Полагаем  $\cos x = z$ . Тогда  $dz = -\sin x dx$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx &= - \int z^{2/3} (1 - z^2) dz = - \int (z^{2/3} - z^{8/3}) dz = \\ &= -\frac{3z^{5/3}}{5} + \frac{3z^{11/3}}{11} + C = 3z^{5/3} \left( \frac{z^2}{11} - \frac{1}{5} \right) + \\ &+ C = 3 \cos x \sqrt[3]{\cos^2 x} \left( \frac{\cos^2 x}{11} - \frac{1}{5} \right) + C. \end{aligned}$$



Пусть теперь оба показателя  $m$  и  $n$  — четные неотрицательные числа (в частности, одно из них может быть равным нулю).

Заменяя  $\sin^2 x$ ,  $\cos^2 x$ ,  $\sin x \cos x$  по формулам

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

мы добьемся того, что произведение  $\sin^n x \cdot \cos^m x$  заменится суммой произведений подобного вида, но с меньшими показателями степеней. Метод интегрирования ясен из следующих примеров.

**Пример** Найти  $\int \cos^2 x dx$ .

**Решение.** Имеем

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

**Пример** Найти  $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ .

**Решение.** Имеем

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)^2 (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx - \\ &\quad - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \end{aligned}$$