Интегральное исчисление

Лекция 1. Неопределенный интеграл

План

Первообразная

Таблица интегралов

Замена переменных в неопределенном интеграле

Метод интегрирования по частям

Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование некоторых видов иррациональностей.

Интегрирование тригонометрических функций

П.1 Первообразная

Определение. *Первообразной функцией для данной функции* $f(x)$ *на промежутке* (a,b) *называется такая функция* $F(x)$, *производная которой равна* $f(x)$ *или дифференциал которой равен* $f(x)dx$ *на рассматриваемом промежутке.*

Теорема. *Если функция* $F(x)$ *есть первообразная от функции* $f(x)$ *на отрезке* (a,b), *то всякая другая первообразная от* $f(x)$ *отличается от* $F(x)$ *на постоянное слагаемое, т.е. может быть представлена в виде*

$$F(x)+C, \quad \text{где } C \text{ – постоянная.}$$

Определение. *Если на отрезке* (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, *функция* $F(x)$ *является первообразной для* $f(x)$, *то выражение* $F(x)+C$, *где* C - *произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции* $f(x)$. *Обозначается:* $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Геометрический смысл неопределенного интеграла. С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет совокупность (семейство) кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз, т.е. вдоль оси Oy

График первообразной функции $f(x)$ называется *интегральной кривой.*

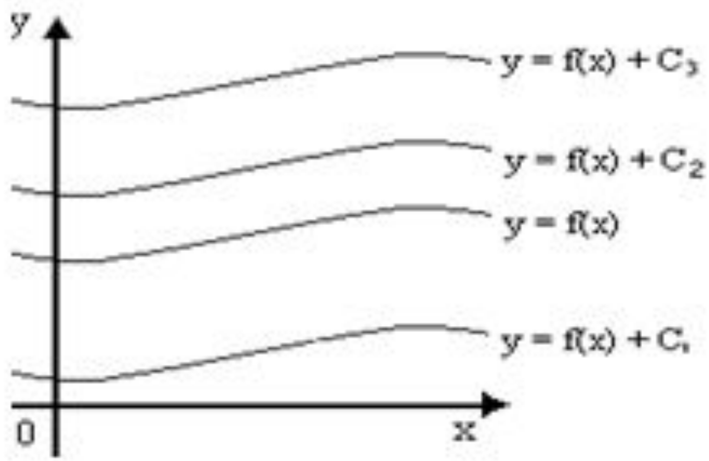

Рис.

Основные свойства неопределенного интеграла. Опираясь на определение неопределенного интеграла, выведем основные его свойства.

1. *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.:* $d\int f(x)dx = f(x)dx$ *и* $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$.

2. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого т.е.:* $\int dF(x) = F(x) + C$, *где* C *-произвольное постоянное.*

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е.* $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$.

4. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных на отрезке* (a,b), $-\infty \le a < b \le +\infty$, *функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, т.е.*

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx.$$

П.2 Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$.

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0, a \neq 1$.

4. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$; $\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, a \neq 0$.

6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$; $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, a \neq 0$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$; $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} tgax + C, a \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi k}{a}, k \in Z$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, x \neq \pi k, k \in Z$; $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} ctgax + C, a \neq 0, x \neq \frac{\pi k}{2} + \pi k, k \in Z$.

9. $\int tgx \, dx = -\ln|\cos x| + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$.

10. $\int ctgx \, dx = \ln|\sin x| + C$, $x \neq \pi k, k \in Z$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$; $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, |x| < 1$; $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, |x| < a$.

13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$, $a \neq 0, x \neq \pm a$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$.

При вычислении неопределенных интегралов полезно иметь в виду следующие преобразования дифференциала, которые основываются на определении дифференциала $\varphi'(x)dx = d\varphi(x)$:

1. $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$, где $a = const \neq 0$

2. $\frac{dx}{x} = d\ln|x|$.

3. $\sin x dx = -d(\cos x)$.

4. $\cos x dx = d(\sin x)$.

5. $x dx = \frac{1}{2}d(x^2)$.

Методы интегрирования.

1) метод разложения;
2) метод подстановки;
3) метод интегрирования по частям.

П.3 Замена переменной в неопределенном интеграле

Метод замены переменной *(подстановка).* Данный способ часто бывает полезным в тех случаях, когда интеграл $\int f(x)dx$ не может быть непосредственно преобразован к виду табличного. Он заключается в переходе от данной переменной интегрирования к другой переменной для упрощения подынтегральног

Данная формула (1) называется формулой *замены переменной* в неопределенном интеграле.

абличных. В интеграле $\int f(x)dx$ сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - функция, имеющая непрерывную производную, тогда

$$f(x) = f[\varphi(t)], \qquad dx = \varphi'(t)dt,$$

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\, dt. \qquad (1)$$

П.4 Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$- две функции от x, имеющие непрерывные производные на отрезке $(a, b), -\infty \le a < b \le +\infty$.

Из дифференциального исчисления мы знаем, что $d(uv) = udv + vdu$.

Интегрируя обе части этого равенства, имеем

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (2)$$

Формула (2) называется формулой *интегрирования по частям*, её применяют для вычисления интегралов вида: $\int P(x) f(x)dx$, где $P(x)$ - многочлен (в частности, степенная функция x^n), $f(x)$-одна из следующих функций - e^{ax}, $\sin ax$, $\cos ax$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

При этом для интегралов вида: $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$, за u принимается многочлен $P(x)$, а для интегралов вида:

$\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} xdx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} xdx$,

за u принимается $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Пример Найти $\int 2^x dx$.

Решение. Применяя формулу 3 из таблиц интегралов, получаем $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Пример Найти $\int \left(2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right) dx$, $x \geq 0$.

Решение.

$$\int \left(2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right) dx = \int 2x^3 dx - \int 3\sin x\, dx + \int 5\sqrt{x}\, dx = 2\int x^3 dx - 3\int \sin x\, dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= 2\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Пример Найти $\int \frac{dx}{ax+b}$, $a \neq 0$.

Решение. Используя преобразование 1, получим

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

Пример Найти $\int \sqrt{x-2}\,dx$.

Решение. Так как выражение $\sqrt{x-2}$ можно записать в виде $(x-2)^{\frac{1}{2}}$, тогда, применив преобразование 1, имеем

$$\int \sqrt{x-2}\,dx = \int (x-2)^{\frac{1}{2}} d(x-2) = \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример Найти $\int \sin 5x\,dx$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Решение. Использовав преобразование 1, имеем

$$\int \sin 5x\,dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x\,d(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + C.$$

Пример . Найти $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

Решение. Применив преобразование 5, получим

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$

Пример Найти $\int \frac{x^3+4x+2}{2x}dx$, $x \neq 0$.

Р е ш е н и е. Так как подынтегральную функцию можно разложить следующим образом

$$\frac{x^3+4x+2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + 2 + \frac{1}{x}, \quad \text{то}$$

$$\int \frac{x^3+4x+2}{2x}dx = \int\left(\frac{1}{2}x^2+2+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\int x^2dx + 2\int dx + \int\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + 2x + \ln|x| + C =$$

$$= \frac{x^3}{6} + 2x + \ln|x| + C.$$

Пример Найти $\int x\sqrt{x-5}dx$.

Р е ш е н и е. Данный интеграл не является табличным, поэтому произведем замену, пусть $\sqrt{x-5}=t$, отсюда $x = t^2+5$ и, следовательно, $dx = 2tdt$. Производя подстановку, последовательно получим

$$\int x\sqrt{x-5}dx = \int(t^2+5)\cdot t\cdot 2tdt = \int(2t^4+10t^2)dt = 2\int t^4dt + 10\int t^2dt =$$

$$= 2\cdot\frac{t^5}{5} + 10\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример Найти $\int \frac{\sqrt[3]{1+ctgx}}{\sin^2 x}dx$.

Р е ш е н и е. Преобразуем подынтегральное выражение следующим образом.

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+ctgx}}{\sin^2 x}dx = \int \sqrt[3]{1+ctgx}\frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1+ctgx)^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

Произведем замену: $t = 1+ctgx$, следовательно, $dt = -\frac{dx}{\sin^2 x}$, тогда получим

$$\int (1+ctgx)^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sin^2 x} = -\int t^{\frac{1}{3}}dt = -\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{3}{4}(1+ctgx)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Пример Найти $\int x\sin xdx$.

Р е ш е н и е. Исходя из правила, положим, что $u = x$, $\sin xdx = dv$; отсюда найдем $du = dx$, $v = -\cos x$. Применяя формулу (2), имеем

$$\int x\sin xdx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos xdx,$$

а $\int \cos xdx = \sin x + C$. Поэтому окончательно получаем

$$\int x\sin xdx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Пример Найти $\int e^{2x}\cos 3x dx$.

Решение. Положим $u = e^{2x}$, $dv = \cos 3x dx$, откуда $du = 2e^{2x} dx$, $v = \frac{1}{3}\sin 3x$. Тогда

$$\int e^{2x}\cos 3x\, dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x dx.$$

К последнему интегралу снова применим интегрирование по частям, положив $u = e^{2x}$, $dv = \sin 3x\, dx$, тогда $du = 2e^{2x} dx$, $v = -\frac{1}{3}\cos 3x$. Следовательно,

$$\int e^{2x}\sin 3x dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx.$$

Таким образом,

$$\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx\right),$$ или

$$\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{3}e^{2x}\left(\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x\right) - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos 3x dx.$$

В правой части последнего соотношения стоит искомый интеграл $\int e^{2x}\cos 3x dx$. Перенося его в левую часть, получим

$$\left(1+\frac{4}{9}\right)\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{1}{3}e^{2x}\left(\sin 3x+\frac{2}{3}\cos 3x\right).$$

Отсюда

$$\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{e^{2x}(3\sin 3x+2\cos 3x)}{13}.$$

Полученная функция есть одна из первообразных от функции $e^{2x}\cos 3x$. Чтобы найти все первообразные, остается к правой части прибавить произвольную постоянную C:

$$\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{e^{2x}(3\sin 3x+2\cos 3x)}{13}+C.$$

П.5 Интегрирование простейших рациональных дробей

Рациональные дроби. Выделение правильной рациональной дроби

Дробной рациональной функцией или просто *рациональной дробью* называется функция, равная частному от деления двух многочленов:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$ — многочлен степени m, а $Q_n(x)$ — многочлен степени n.

Например: $R(x) = \dfrac{x^4 + 5x^3 - 6x + 5}{x^3 + 2x - 1}$.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя; в противном случае рациональная дробь называется *неправильной*. Приведенная выше рациональная дробь неправильна.

Отметим прежде всего, что *всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.*

В самом деле, пусть $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ — неправильная рациональная дробь, т. е. степень $P(x)$ больше или равна степени $Q(x)$. Разделив числитель на знаменатель, получим тождество

$$P(x)-Q(x)L(x)=r(x),$$

где $L(x)$ и $r(x)$ — многочлены, причем степень остатка $r(x)$ меньше степени знаменателя дроби $Q(x)$.

Отсюда

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\frac{r(x)}{Q(x)},$$

где $\frac{r(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь.

Например, пусть $R(x)=\frac{x^4+5x^3-6x+5}{x^3+2x-1}$. Разделив x^4+5x^3-6x+5 на x^3+2x-1, получим частное $L(x)=x+5$ и остаток $r(x)=$ $=-2x^2-15x+10$.

Следовательно,

$$\frac{x^4+5x^3-6x+5}{x^3+2x-1}=x+5+\frac{-2x^2-15x+10}{x^3+2x-1}.$$

Таким образом, интегрирование неправильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ сводится к интегрированию многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{r(x)}{Q(x)}$:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left[L(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}\right] dx = \int L(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx.$$

Так как многочлен мы интегрировать умеем, то остается рассмотреть интегрирование правильных рациональных дробей.

Как мы увидим ниже всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы конечного числа так называемых *простейших* дробей следующих четырех типов:

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^n}$ $(n=2, 3, \ldots)$; III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n=2, 3, \ldots)$

где A, a, p, q, M и N — действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $\frac{p^2}{4}-q<0$.

Интегрирование простейших рациональных дробей

Интегрирование простейших дробей I и II типов не представляет никакого труда. В самом деле:

$$\text{I. } \int \frac{A\,dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A \int (x-a)^{-n}\, d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Перейдем теперь к интегрированию рациональных дробей III и IV типов.

$$\text{III. } \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx.$$

Рассмотрим отдельно знаменатель x^2+px+q и дополним x^2+px до полного квадрата:

$$x^2+px+q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Так как по условию трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, то выражение $q-\frac{p^2}{4} > 0$. Введем обозначение $q-\frac{p^2}{4} = a^2$. Применим теперь к интегралу замену переменной, положив $t = x+\frac{p}{2}$*. Отсюда

* Эту подстановку легко запомнить, если заметить, что t равно половине роизводной знаменателя: $t = \frac{1}{2}(x^2+px+q)' = x+\frac{p}{2}$.

$$x = t - \frac{p}{2}, \quad dx = dt, \quad x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = t^2 + a^2.$$

Следовательно,

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx = \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2}\,dt = M \int \frac{t\,dt}{t^2 + a^2} +$$

$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{M}{2} \ln (t^2 + a^2) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

Заменяя, наконец, t и a их выражениями, получим

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx = \frac{M}{2} \ln (x^2 + px + q) + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{4}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

Пример. Найти

$$\int \frac{3x + 5}{x^2 + 2x + 10}\,dx.$$

Решение. Введем новую переменную t, положив ее равной половине производной знаменателя Тогда

$$t = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 10)' = x + 1, \ x = t - 1, \ dx = dt.$$

$$x^2 + 2x + 10 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 10 = t^2 + 9.$$

Следовательно,

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3(t-1)+5}{t^2+9}\,dt = 3\int \frac{t\,dt}{t^2+9} + 2\int \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+9) + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$

П.6 Интегрирование простейших иррациональных дробей

1. Интегралы вида $\int R(x; \sqrt[n]{ax+b})\,dx$

Интегралы вида

$$\int R\left(x; \sqrt[n]{ax+b}\right) dx$$

где n — целое число, а $R\left(x; \sqrt[n]{ax+b}\right)$ — рациональное выражение относительно x и $\sqrt[n]{ax+b}$, могут быть сведены к интегралам от рациональных функций. В самом деле, сделаем в интеграле замену переменной, положив $ax+b=z^n$; тогда $x=\frac{z^n-b}{a}$, $dx=\frac{nz^{n-1}}{a}dz$, $\sqrt[n]{ax+b}=z$.

Следовательно,

$$\int R\left(x; \sqrt[n]{ax+b}\right) dx=\int R\left(\frac{z^n-b}{a}; z\right)\frac{nz^{n-1}}{a}dz.$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства, есть интеграл от рациональной функции относительно переменной интегрирования z и, следовательно, может быть найден

Пример Найти $\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Здесь $ax+b=x$, $n=2$. Полагаем $x=z^2$, откуда $dx=2z\,dz$.

Следовательно,

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{(1-z)\,2z\,dz}{z^2-2z}=2\int \frac{(1-z)\,dz}{z-2}.$$

Таким образом, мы свели наш интеграл к интегралу от рациональной функции.

$$2\int \frac{(1-z)\,dz}{z-2}=2\int \left(-1-\frac{1}{z-2}\right)dz=-2z-2\ln|z-2|+C.$$

Подставляя вместо z его выражение через x, т. е. $z=\sqrt{x}$, имеем

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}\,dx=-2\left(\sqrt{x}+\ln\left|\sqrt{x}-2\right|\right)+C.$$

Пример Найти $\int \frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}\,dx.$

Решение. Приводя в подынтегральном выражении радикалы к одному показателю, убеждаемся, что оно рационально зависит от x и от $\sqrt[4]{2x-3}$:

$$\frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}=\frac{2x+\left(\sqrt[4]{2x-3}\right)^2}{3\sqrt[4]{2x-3}+\left(\sqrt[4]{2x-3}\right)^3}.$$

$n=4$, поэтому полагаем $2x-3=z^4$. Отсюда $x=\frac{z^4+3}{2}$, $dx=2z^3\,dz$.

Следовательно,

$$\int \frac{2x+\sqrt{2x-3}}{3\sqrt[4]{2x-3}+\sqrt[4]{(2x-3)^3}}\,dx=\int\frac{(z^4+3+z^2)\,2z^3}{3z+z^3}\,dz=2\int\frac{z^6+z^4+3z^2}{3+z^2}\,dz=$$

$$=2\int\left(z^4-2z^2+9-\frac{27}{3+z^2}\right)dz=$$

$$2\left(\frac{z^5}{5}-\frac{2z^3}{3}+9z-\frac{27}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}\right)+C,\text{ где } z=\sqrt[4]{2x-3}.$$

Интегралы более общего вида:

$$\int R\left(x;\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

где R — рациональное выражение от x и $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, приводятся к интегралам от рациональной функции подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$.

Интеграл вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx$.

Частными видами этих интегралов являются интегралы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}.$$

Первый интеграл табличный:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (1)$$

Для вычисления второго интеграла сделаем замену переменной, полагая $\sqrt{x^2+m} = -x+t$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим $x^2+m = x^2-2xt+t^2$. Отсюда

$$x = \frac{t^2-m}{2t}, \quad dx = \frac{t^2+m}{2t^2}\,dt.$$

Так как, кроме того, $\sqrt{x^2+m} = -x+t = -\frac{t^2-m}{2t}+t = \frac{t^2+m}{2t}$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \int \frac{\frac{t^2+m}{2t^2}\,dt}{\frac{t^2+m}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C.$$

Но так как $t = \sqrt{x^2+m}+x$, то окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right| + C. \qquad (2)$$

Этот интеграл часто встречается, поэтому формулу (2) необходимо запомнить.

Перейдем теперь к интегралам вида $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}\,dx$. Эти интегралы заменой переменной $t=\frac{1}{2}(Ax^2+Bx+C)'$ приводятся к интегралам вида $\int \frac{Dt+E}{\sqrt{At^2+m}}\,dt$.

Вычисление последнего интеграла при $A>0$ сводится к интегралу вида (2), а при $A<0$ — к интегралу вида (1)

Пример Найти $\int \frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}}\,dx$.

Решение. Полагая $t=\frac{1}{2}(6-2x-x^2)'$, имеем: $t=-1-x$, $x=-1-t$, $dx=-dt$ и $6-2x-x^2=6-2(-1-t)-(-1-t)^2=7-t^2$.

Таким образом,

$$\int \frac{x+5}{\sqrt{6-2x-x^2}}\,dx=\int \frac{-1-t+5}{\sqrt{7-t^2}}(-dt)=\int \frac{t-4}{\sqrt{7-t^2}}\,dt=\int \frac{t\,dt}{\sqrt{7-t^2}}-$$

$$-4\int \frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}=-\sqrt{7-t^2}-4\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=$$

$$=-\sqrt{6-2x-x^2}+4\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Пример Найти $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

Решение. Полагаем: $t=\frac{1}{2}(x^2+4x+5)'=x+2$. Тогда $x=t-2$, $dx=dt$, $x^2+4x+5=(t-2)^2+4(t-2)+5=t^2+1$.

Следовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}=\int \frac{(t-2)\,dt}{\sqrt{t^2+1}}=\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}-2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$
$$=\sqrt{t^2+1}-2\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=\sqrt{x^2+4x+5}-$$
$$-2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C.$$

Интегралы видов $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ и $\int\sqrt{x^2+m}\,dx$

Рассмотрим, например, второй интеграл

$$\int\sqrt{x^2+m}\,dx=\int\frac{x^2+m}{\sqrt{x^2+m}}\,dx=\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+m}}+m\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}. \qquad (3)$$

По формуле (2) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|+C.$

Для вычисления интеграла $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+m}}$ применим метод интегрирования по частям, полагая $u=x$, $dv=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+m}}$; тогда $du=dx$, $v=\sqrt{x^2+m}$.

Следовательно,

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+m}}=x\sqrt{x^2+m}-\int\sqrt{x^2+m}\,dx.$$

Подставляя найденные значения интегралов в равенство (3), получим

$$\int\sqrt{x^2+m}\,dx=x\sqrt{x^2+m}-\int\sqrt{x^2+m}\,dx+m\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|.$$

В правой и в левой частях последнего соотношения стоит искомый интеграл $\int \sqrt{x^2+m}\,dx$. Перенося его в левую часть, найдем

$$\int \sqrt{x^2+m}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+m} + m\ln\left|x+\sqrt{x^2+m}\right|\right) + C.$$

Аналогичным приемом можно показать, что

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C.$$

П.7 Интегрирование тригонометрических функций

1. *Интегралы вида* $\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,dx$, ***где m и n — целые числа***

Рассмотрим вначале случай, когда одно из чисел m или n нечетно. В этом случае интегралы сводятся к интегралам от рациональных функций. Сущность метода интегрирования ясна из следующих примеров.

Пример Найти $\int \sin^5 x \cos^4 x\,dx$.

Решение. Замечая, что $\sin x\,dx = -d\cos x$, сделаем замену переменной, положив $z = \cos x$. Это дает $dz = -\sin x\,dx$, и, следовательно, так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - z^2$, получим

$$\int \sin^5 x \cos^4 x\,dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cdot \sin x\,dx = -\int (1-z^2)^2 z^4\,dz =$$

$$= -\int (z^4 - 2z^6 + z^8)\,dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{2z^7}{7} - \frac{z^9}{9} + C =$$

$$= \frac{-\cos^5 x}{5} + \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + C.$$

Пример . Найти $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx$.

Решение. Так как $\cos x\,dx = d\sin x$, то полагая $z = \sin x$, получим $dz = \cos x\,dx$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - z^2$, $\sin^2 x = z^2$, и

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1-z^2}{z^2}\,dz = \int \left(\frac{1}{z^2} - 1\right) dz =$$

$$= -\frac{1}{z} - z + C = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

Замечание. Этот же метод применим и в том случае, когда одно из чисел m или n нечетно и положительно, а другое — любое действительное число.

Пример Найти $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\,\sin^3 x\,dx$.

Решение. Имеем: $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\,\sin^3 x\,dx = \int \cos^{2/3} x\,\sin^2 x\,\sin x\,dx$. Полагаем $\cos x = z$. Тогда $dz = -\sin x\,dx$. Следовательно,

$$\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\,\sin^3 x\,dx = -\int z^{2/3}(1-z^2)\,dz = -\int (z^{2/3} - z^{8/3})\,dz =$$

$$= -\frac{3z^{5/3}}{5} + \frac{3z^{11/3}}{11} + C = 3z^{5/3}\left(\frac{z^2}{11} - \frac{1}{5}\right) +$$

$$+ C = 3\cos x\,\sqrt[3]{\cos^2 x}\left(\frac{\cos^2 x}{11} - \frac{1}{5}\right) + C.$$

Пусть теперь оба показателя m и n — четные неотрицательные числа (в частности, одно из них может быть равным нулю).

Заменяя $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, $\sin x \cos x$ по формулам

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

мы добьемся того, что произведение $\sin^n x \cdot \cos^m x$ заменится суммой произведений подобного вида, но с меньшими показателями степеней. Метод интегрирования ясен из следующих примеров.

Пример Найти $\int \cos^2 x\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Пример Найти $\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)^2 (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,(1-\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\,dx -$$

$$- \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,d\sin 2x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$