



4. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

4.1. Уравнение прямой на плоскости

Уравнением линии на плоскости XOY называется уравнение, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

В общем случае уравнение линии может быть записано в виде

$$F(x, y) = 0$$

или

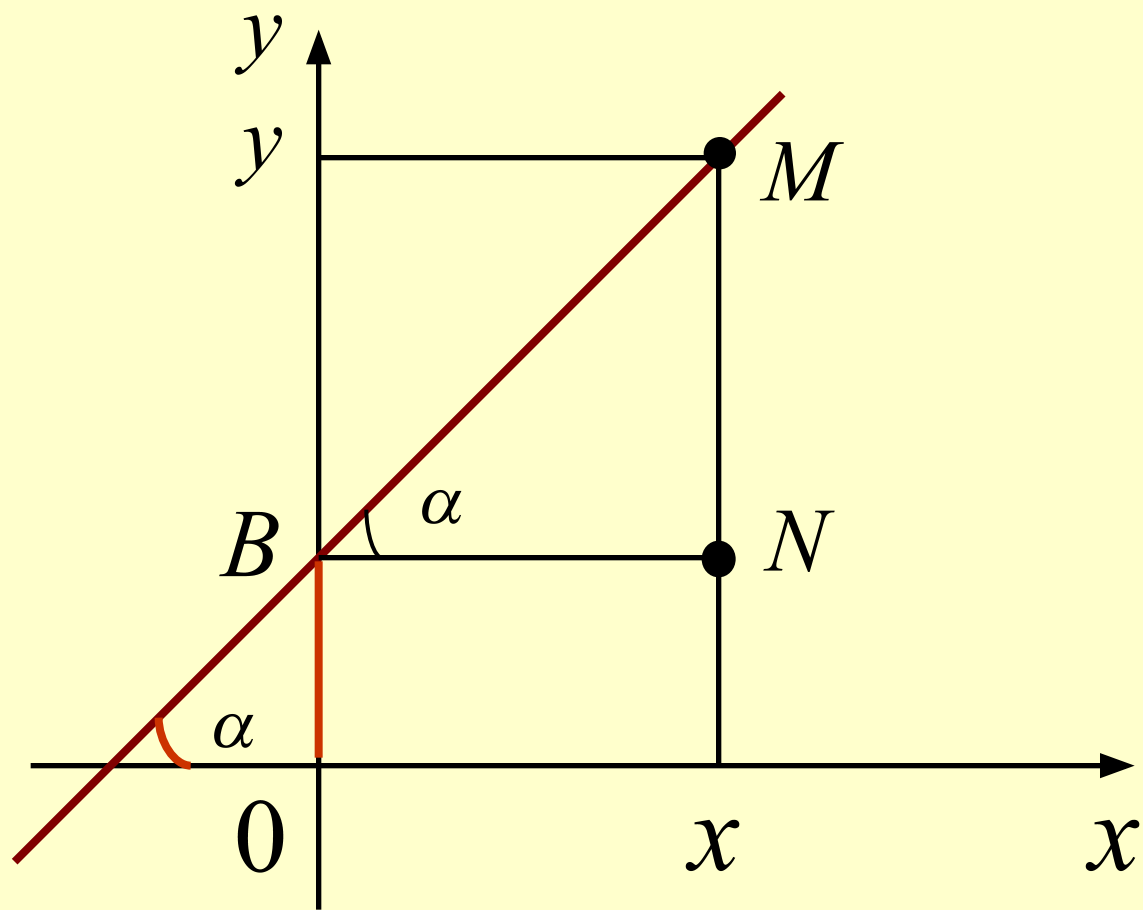
$$y = f(x)$$

Способы задания прямой на плоскости

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть задана прямая, пересекающая ось y в точке $B(0, b)$ и образующая с осью x угол α $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Выберем на прямой произвольную точку $M(x, y)$.



Координаты точки $N(x, y)$. Из треугольника BMN :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{NB} = \frac{y - b}{x} = k$$

k – угловой коэффициент прямой.


$$y = kx + b$$

1

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим частные случаи:

1 $b = 0 \Rightarrow y = kx$

- уравнение прямой, проходящей через начало координат.

2 $\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 \Rightarrow y = b$

- уравнение прямой, параллельной оси x .

3 $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ - не существует

т.е. у вертикальной прямой нет углового коэффициента.

Уравнение прямой, параллельной оси y , в этом случае имеет вид

$$x = a$$

где a – отрезок, отсекаемый прямой на оси x .

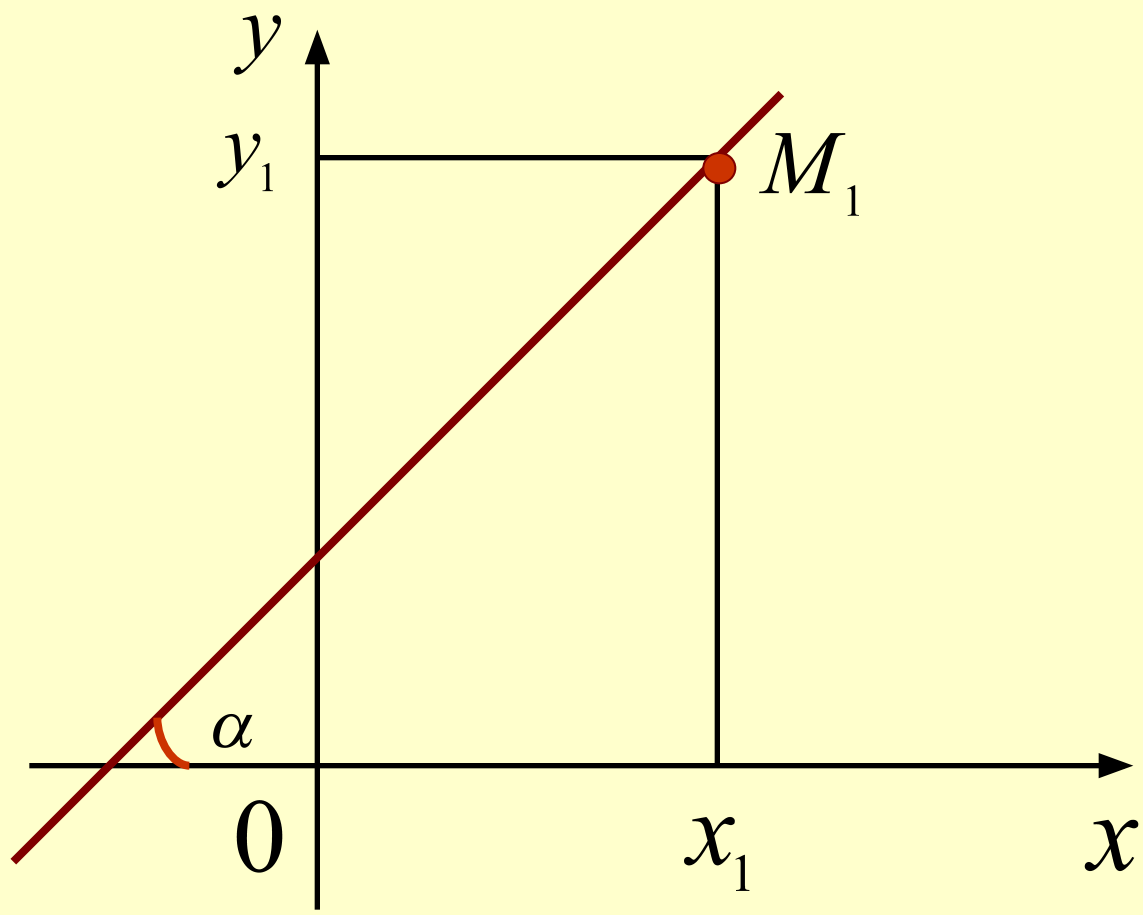
2. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении

Пусть задана прямая, проходящая через заданную точку

$$M_1(x_1, y_1)$$

и образующая с осью x угол α

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$$



Т.к. точка M_1 лежит на прямой, ее координаты должны удовлетворять уравнению (1):

$$y_1 = kx_1 + b$$

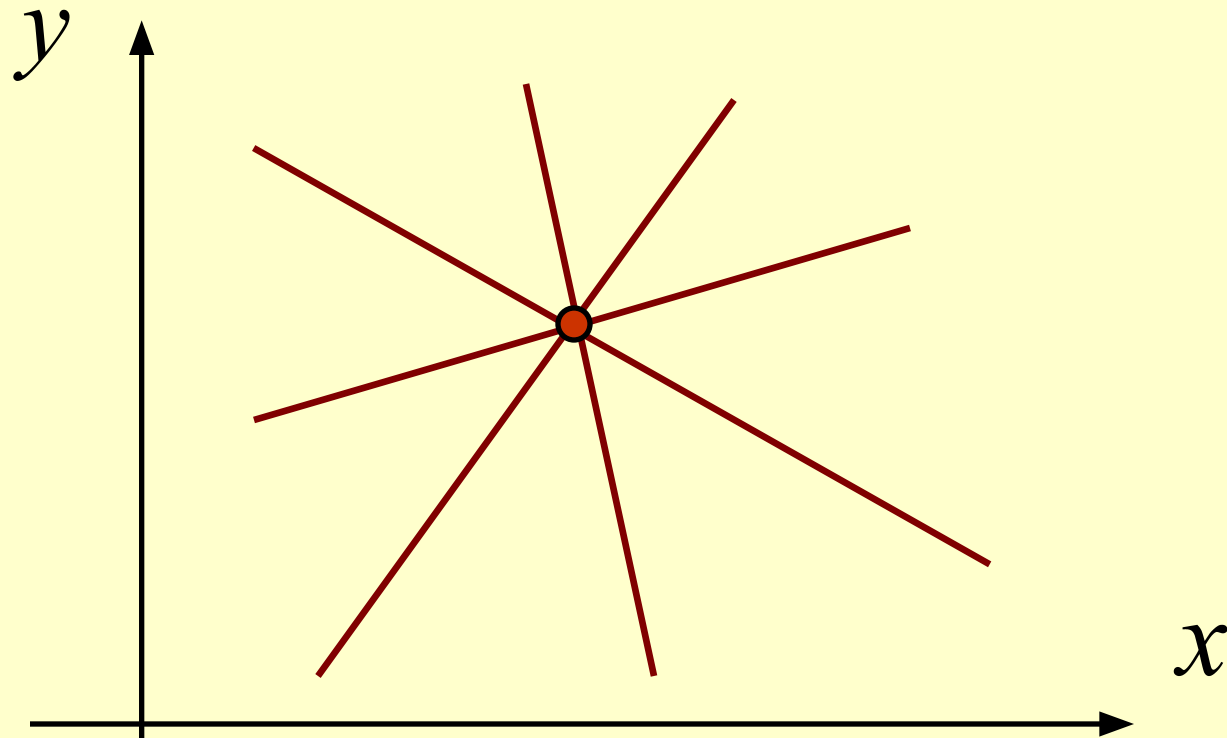
Вычитаем это уравнение из уравнения (1):

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

2

Уравнение прямой,
проходящей через данную
точку в данном направлени

Если в этом уравнении угловой коэффициент не определен, то оно задает пучок прямых, проходящих через данную точку, кроме прямой, параллельной оси y , не имеющей углового коэффициента.



3. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть задана прямая, проходящая через две точки:

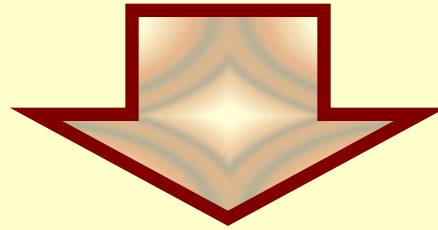
$$M_1(x_1, y_1) \quad M_2(x_2, y_2)$$

Запишем уравнение пучка прямых, проходящих
через точку M_1 :

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Т.к. точка M_2 лежит на данной прямой, подставим ее координаты в уравнение пучка прямых:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$



$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Подставляем k в уравнение пучка прямых. Тем самым мы выделяем из этого пучка прямую, проходящую через две данные точки:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

ИЛИ

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



**Уравнение прямой,
проходящей через две т**

ПРИМЕР.

*Составить уравнение прямой,
проходящей через точки $A(-5,4)$ и
 $B(3,-2)$.*

РЕШЕНИЕ.

Подставляем координаты точек в уравнение прямой, проходящей через две точки.

$$\frac{y - 4}{-2 - 4} = \frac{x + 5}{3 + 5}$$

$$y - 4 = -\frac{6}{8}(x + 5)$$



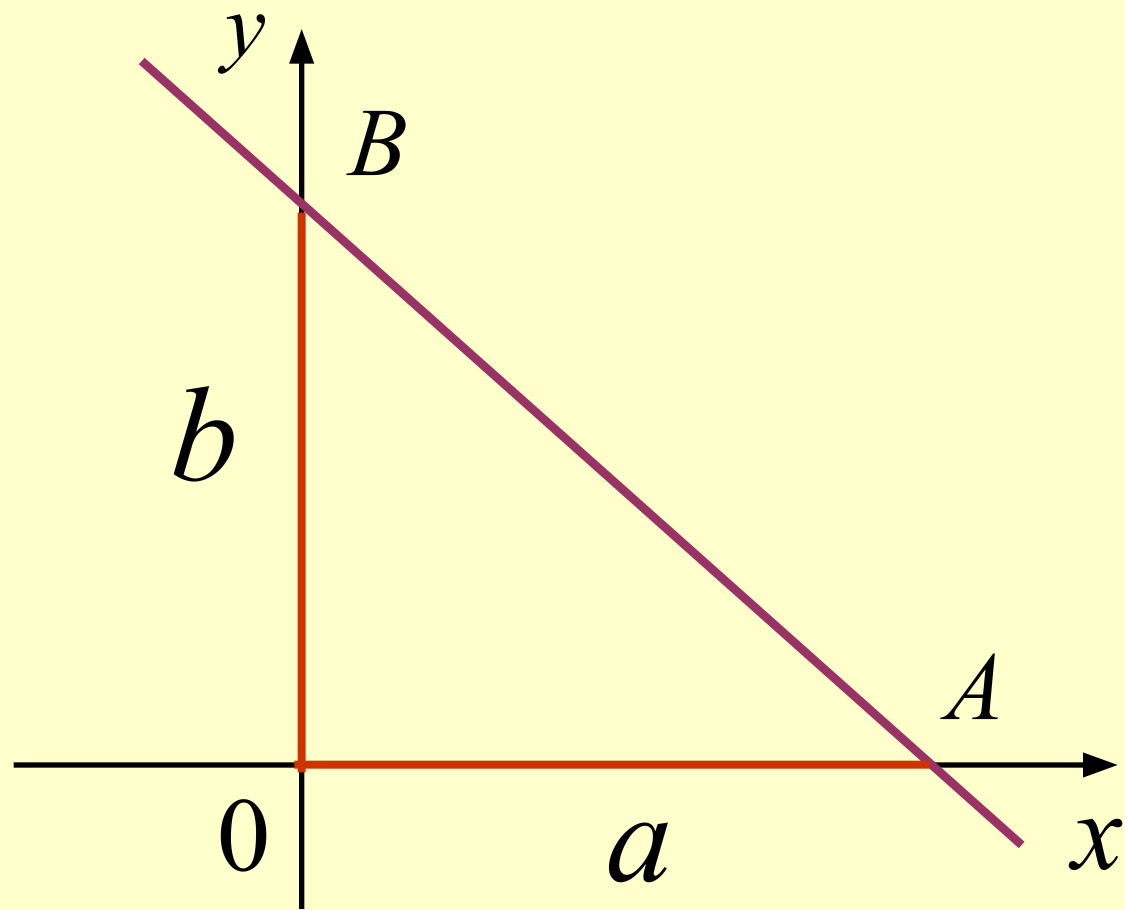
$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

4. Уравнение прямой в отрезках
Пусть задана прямая, отсекающая на осях
координат отрезки, равные a и b .

Это значит, что она проходит через точки

$$A(a, 0) \quad B(0, b)$$

Найдем уравнение этой прямой.



Подставим координаты точек А и В в уравнение прямой, проходящей через две точки (3):

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b} = -\frac{x-a}{a} + 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \text{④}$$

Уравнение прямой
в отрезках

ПРИМЕР.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-1)$ если она отсекает от положительной полуоси y отрезок, вдвое больший, чем на положительной полуоси x .

РЕШЕНИЕ.

По условию задачи, $b = 2a$

Подставляем в уравнение (4): $\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} = 1$

Точка $A(2,-1)$ лежит на этой прямой, следовательно ее координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$\frac{2}{a} + \frac{-1}{2a} = 1$$

$$\frac{-1+4}{2a} = 1$$

$$a = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x}{1.5} + \frac{y}{3} = 1$$

5. Общее уравнение пря

Рассмотрим уравнение:

$$Ax + By + C = 0$$

5

Рассмотрим частные случаи этого уравнения и покажем, что при любых значениях коэффициентов A , B (не равных нулю одновременно) и C , это уравнение есть уравнение прямой на плоскости.



$$B \neq 0$$

Тогда уравнение (5) можно представить в виде:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

Обозначим: $-\frac{A}{B} = k$ $-\frac{C}{B} = b$

Тогда получаем уравнение (1):

$$y = kx + b$$



$$B \neq 0 \quad A \neq 0 \quad C = 0$$

Тогда уравнение имеет вид: $y = -\frac{A}{B}x$

- уравнение прямой, проходящей через начало координат.



$$B \neq 0 \quad A = 0 \quad C \neq 0$$

Получаем уравнение: $y = -\frac{C}{B}$

- уравнение прямой, параллельной оси x .



$$B \neq 0 \quad A = 0 \quad C = 0$$

Тогда уравнение имеет вид: $y = 0$
- уравнение оси x .



$$B = 0 \quad A \neq 0 \quad C \neq 0$$

Получаем уравнение: $x = -\frac{C}{A}$

- уравнение прямой, параллельной оси y .



$$B = 0 \quad A \neq 0 \quad C = 0$$

Тогда уравнение имеет вид: $x = 0$

- уравнение оси y .

Таким образом, при любых значениях коэффициентов A , B (не равных нулю одновременно) и C , уравнение (5) есть уравнение прямой на плоскости.

Это

Общее уравнение прямой