**1. Расстояние между точками в пространстве**

$$\left|\text{ÀÂ}\right| = \sqrt{(\text{õ}_{\text{Â}} - \text{õ}_{\text{À}})^2 + (\text{ó}_{\text{Â}} - \text{ó}_{\text{À}})^2 + (z_{\text{Â}} - z_{\text{À}})^2}$$

**2. Координаты вектора $\overline{AB}$**

$$\overline{AB} = \{x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A\}$$

**3. Скалярное произведение векторов**

$$(\overline{a}, \overline{b}) = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos(\overline{a} \wedge \overline{b}) \qquad \cos(\overline{a} \wedge \overline{b}) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|}$$

**3. а. Скалярное произведение в координатной форме**

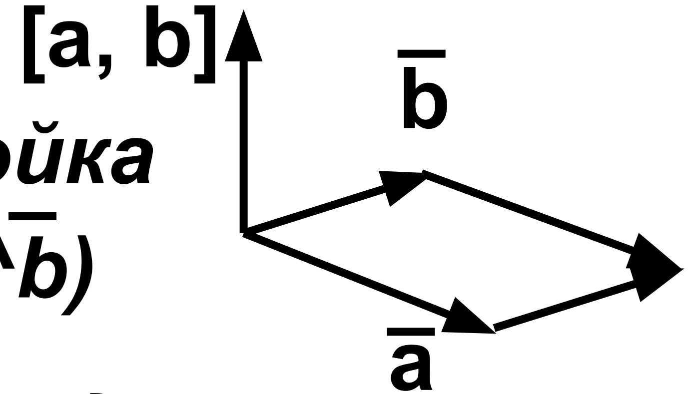
$$(\overline{a}, \overline{b}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

***4. Векторным произведением*** *двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется*
***ВЕКТОР $\bar{c}$= [$\bar{a}$, $\bar{b}$ ]*** такой, что

***1. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$***

***2. $\bar{a}$, $\bar{b}$, [$\bar{a}$, $\bar{b}$] – правая тройка***

***3. $|\bar{c}|=|[\bar{a}, \bar{b}]|= |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin(\bar{a}\hat{\ }\bar{b})$***




***4.а*** *Геометрический смысл модуля векторного произведения* **$|[\bar{a}, \bar{b}]|$ - $S_{пар\text{-}ма}$**

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

*Векторное произведение в координатной форме*

**5. Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$ , $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется ЧИСЛО**

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a},[\overline{b},\overline{c}]) = ([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})$$

**5.а Геометрический смысл модуля смешанного произведения**

$$V_{параллелепипеда} = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| \qquad V_{пирамиды} = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$$

**Смешанное произведение в координатной форме**

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

# ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$$y = kx + b$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{r}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\bar{s}=\{p, r\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $N(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=\{A, B\}$

$$Ax + By + C = 0$$

Общее уравнение прямой

# Угол между прямыми на плоскости

$$y = k_1 x + b_1 \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

$$y = k_2 x + b_2 \qquad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad \cos\varphi = \frac{(\overline{n_1},\ \overline{n_2})}{\left|\overline{n_1}\right| \cdot \left|\overline{n_2}\right|}$$

# Условие параллельности прямых

$$k_1 = k_2 \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

# Условие перпендикулярности прямых

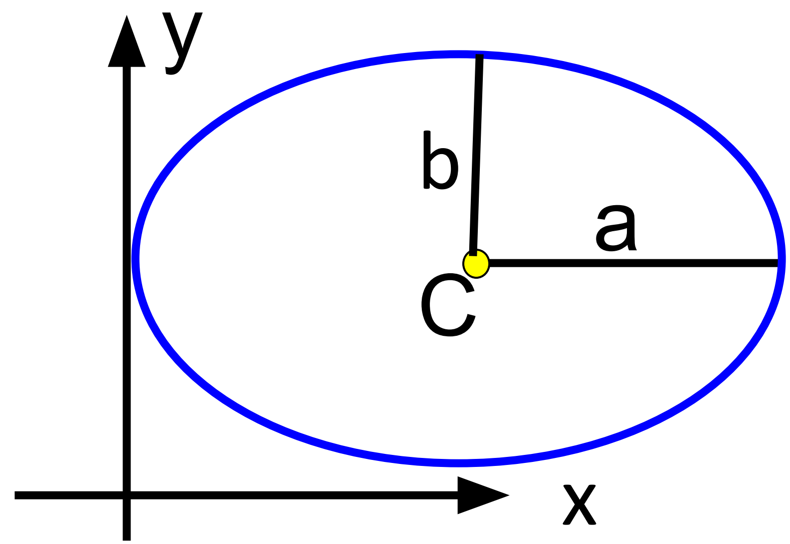
$$k_1 = -\frac{1}{k_2} \qquad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

# Кривые второго порядка

## Окружность

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

Каноническое уравнение окружности с центром в т. $C(x_0, y_0)$ и радиусом R




## Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Каноническое уравнение эллипса с центром в т. C(0, 0) и полуосями a и b

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

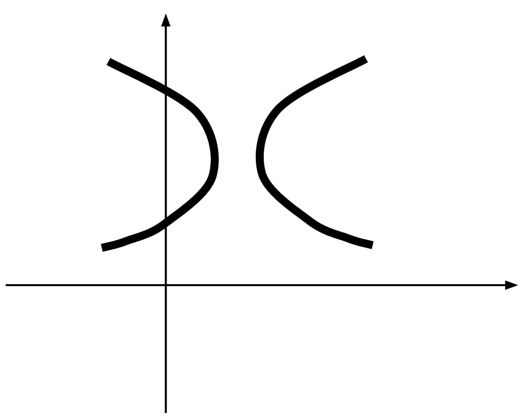
Каноническое уравнение эллипса с центром в т. $C(x_0, y_0)$ и полуосями a и b

# Гипербола

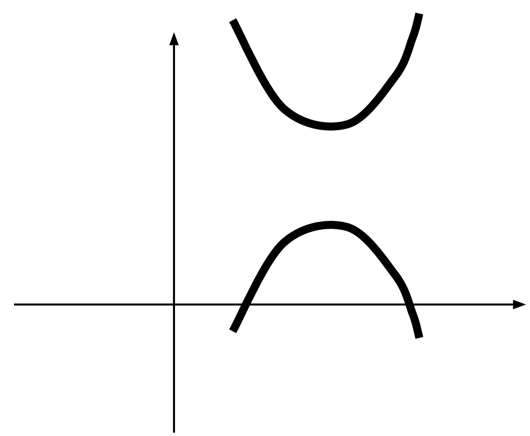
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

**Каноническое уравнение гиперболы с центром в т. C($x_0$, $y_0$), с**

**действительной полуосью a и мнимой полуосью b**



**мнимой полуосью a и действительной полуосью b**

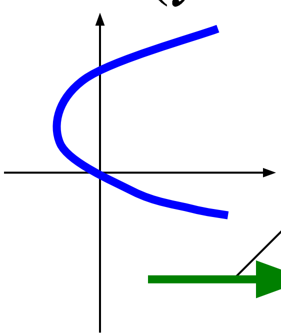


# Парабола

## Каноническое уравнение параболы с вершиной в т. С($x_0$, $y_0$), с с осью симметрии параллельной

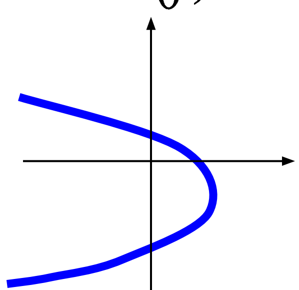
**ОХ**

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$$



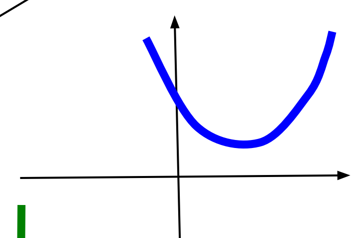
**направление ветвей**

$$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$$

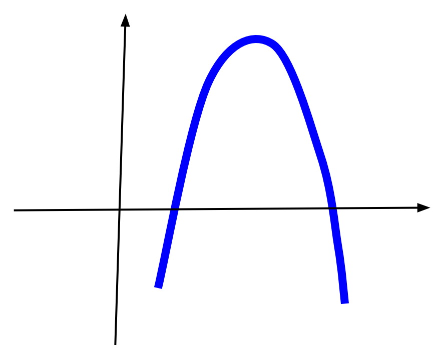


**ОУ**

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$$



$$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$$



# Правила дифференцирования

$$(C)' = 0 \qquad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' \qquad (Cu)' = Cu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \qquad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$$

# Производная сложной функции

$$y = f(\varphi(\psi(\mu(x))))$$

$$f'(x) = f'(\varphi(\psi(\mu(x)))) \cdot \varphi'(\psi(\mu(x))) \cdot \psi'(\mu(x))$$

# Таблица производных

$$x' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$1. \int dx = x + C$$

$$2a. \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$2b. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$3. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$5. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$$

$$10. \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

$$6. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$$

$$11. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$12. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$8. \int e^x dx = e^x + C$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a}) + C$$

# Свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ 2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

3. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ 4. $\int df(x) = f(x) + C$

5. $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$

6. $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$

7. $\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C$
$u = \varphi(x)$

8. $\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$

9. $\int f(kx)dx = \frac{1}{k}F(kx) + C$

10. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$

**Дифференциал функции** $dy = f'(x)dx$

**Формула интегрирования по частям**

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

$$\int P_n(x)\sin x dx$$

$$\int P_n(x)\cos x dx$$

$$\int P_n(x)a^x dx$$

$$\int P_n(x)\ln x dx$$

$$\int P_n(x)\arcsin x dx$$

$$\int P_n(x)\arccos x dx$$

$$\int P_n(x) arctg x dx$$

$$\int a^x \cos x d \qquad \int a^x \sin x d$$

**КРУГОВО**

**Й**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$S = \int_a^b f(x)dx$$ Площадь плоской фигуры

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx \qquad L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$$

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho')^2 + (\rho)^2}\,d\varphi$$ Длина кривой

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$ Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси OX

# Дифференциальные уравнения первого порядка

1. С разделенными переменными $M(x)\,dx + S(y)dy=0$

2. С разделяющимися переменными

А) $M(x)\,K(y)dx + S(y)R(x)dy=0$ Б) $y' = L(y)T(x)$

3. Однородные первого порядка

А) $f\,(x,y)dx + g(x,\,y)dy=0$

*функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ являются однородными одинаковой степени*

Б) $y' = f\,(y/x)$

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

$$y' + p(x)y = q(x)$$

5. Уравнение Бернулли $y' + p(x)y = q(x)y^n$

# Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0$$

*y= z(x)* *и* *y= g(x)* **частные решения уравнения**

*Их линейная комбинация* $\boxed{y=C_1 z(x)+C_2 g(x)}$

**общее решение уравнения**

$$k^2 + pk + q = 0$$ ***Характеристическое уравнение***

**1. D>0 $k_1 \neq k_2$**

*Частные решения* $y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$

**2. D=0 $k_1 = k_2 = k$**

*Частные решения* $y_1 = e^{kx}$ $y_2 = xe^{kx}$

**3. D<0 $k_{1,2} = a \pm ib$**

*Частные решения* $y_1 = e^{ax} \cdot \cos bx$ $y_2 = e^{ax} \cdot \sin bx$

# Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

*Сумма* ***у=у$_{оо}$ +у$_{чн}$*** *- общее решение уравнения, где*

***у$_{оо}$*** *- решение однородной части неоднородного д.у.,*

***у$_{чн}$*** *какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения*

**Стандартная правая часть 1.** $f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$

частное решение $\boxed{y_{чн} = x^s e^{ax} \cdot Q_n(x)}$

$Q_n(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Dx + F$

$s$=0, если $a \neq k_i$  $s$=1, если $a = k_i$  $s$=2, если $a = k_1 = k_2$

$k_i$ – *корни характеристического уравнения*

**Стандартная правая часть 2.** $f(x) = e^x \cdot (P_n(x) \cdot \cos bx + S_r(x) \cdot \sin bx)$

частное решение $\boxed{y_{чн} = x^s e^{ax} \cdot (Q_m(x) \cdot \cos bx + R_m(x) \cdot \sin bx)}$

$m$=max{n, r}

$s$=0, если $a \pm ib \neq k_{1,2}$  $s$=1, если $a \pm ib = k_{1,2}$

$k_i$ – *корни характеристического уравнения*

# Числовые ряды

О.1. Бесконечная сумма элементов последовательности вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется числовым рядом,

$a_n -$ общий член ряда

О.2. $S_1 = a_1 \quad S_2 = a_1 + a_2 \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\dots \; S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ частичные суммы ряда

$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ последовательность частичных сумм ряда

О.3. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ - ряд сходится, $S$ - сумма ряда

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или $\nexists$ - ряд расходящийся

**Теорема**.

(*необходимый признак сходимости ряда*)

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

# Достаточные признаки сходимости числовых рядов

## 1. Интегральный признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \ a_n = f(n),\ \ y = f(x) > 0,\ \text{непрер,}\ \searrow\ \text{при}\ \ x \in [1,\ \infty)$$

$\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится / расходится $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится / расходится

Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$: $k > 1$ — сходится; $k \le 1$ — расходится

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Гармонический ряд расходится

## 2. Признак сравнения по величине $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (2)

$a_n \le b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ -\text{сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n -\text{сходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n -\text{расходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ -\text{расходится}$$

## 3. Предельный признак сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = C \neq 0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Одинаковы по сходимости

## 4. Признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = D$$

$< 1$ → сходится

$> 1$ → расходится

## 5. Радикальный признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = K$$

$< 1$ → сходится

$> 1$ → расходится

**<u>Т. Лейбница</u>** Если в знакочередующемся ряде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots, \text{ и}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

ряд сходится и его сумма $S < a_1$