

# **1. Расстояние между точками в**

**пространстве**

$$|\overline{AA}| = \sqrt{(\tilde{o}_{\hat{A}} - \tilde{o}_{\check{A}})^2 + (\acute{o}_{\hat{A}} - \acute{o}_{\check{A}})^2 + (z_{\hat{A}} - z_{\check{A}})^2}$$

## **2. Координаты вектора $\overline{AB}$**

$$\overline{AB} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$$

## **3. Скалярное произведение векторов**

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos(\overline{a} \wedge \overline{b}) \quad \cos(\overline{a} \wedge \overline{b}) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$$

### **3. а. Скалярное произведение в координатной форме**

$$(\overline{a}, \overline{b}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

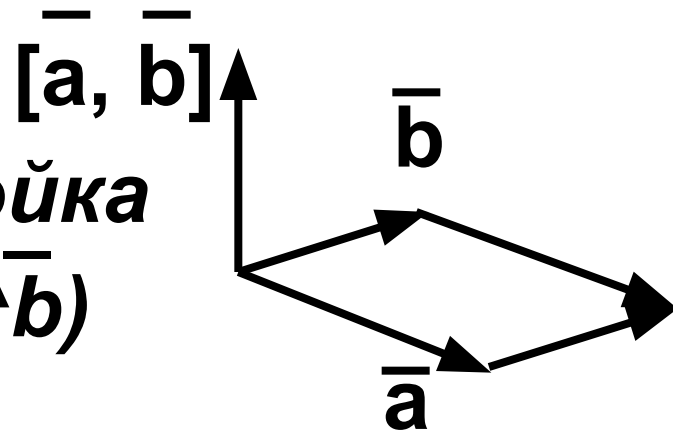
**4. Векторным произведением** двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется

**ВЕКТОР**  $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$  такой, что

1.  $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$

2.  $\vec{a}, \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$  – правая тройка

3.  $|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$



**4.a Геометрический смысл модуля**

**векторного произведения**

$|[\vec{a}, \vec{b}]| - S_{\text{пар-ма}}$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

*Векторное произведение в координатной форме*

**5. Смешанным произведением трех векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  называется ЧИСЛО**

$$\overline{abc} = (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c})$$

**5.a Геометрический смысл модуля смешанного произведения**

$$V_{\text{параллелепипеда}} = |\overline{abc}| \quad V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} |\overline{abc}|$$

**Смешанное произведение в координатной форме**

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$$

# ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

$$y = kx + b$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{r}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку  $A(x_0, y_0)$  параллельно вектору  $\vec{s} = \{p, r\}$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Уравнение прямой, проходящей через точку  $N(x_0, y_0)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = \{A, B\}$

$$Ax + By + C = 0$$

Общее уравнение прямой

## Угол между прямыми на плоскости

$$y = k_1x + b_1$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$y = k_2x + b_2$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

$$\cos \varphi = \frac{(\overline{n_1}, \overline{n_2})}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}$$

## Условие параллельности прямых

$$k_1 = k_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

## Условие перпендикулярности прямых

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

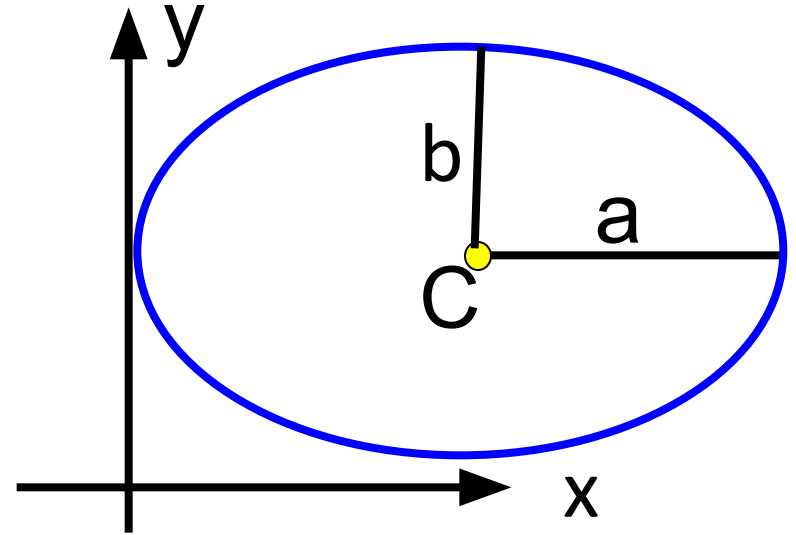
$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

# Кривые второго порядка

## Окружность

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Каноническое уравнение окружности с центром в т.  $C(x_0, y_0)$  и радиусом  $R$



## Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Каноническое уравнение эллипса с центром в т.  $C(0, 0)$  и полуосями  $a$  и  $b$

$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$  Каноническое уравнение эллипса с центром в т.  $C(x_0, y_0)$  и полуосями  $a$  и  $b$

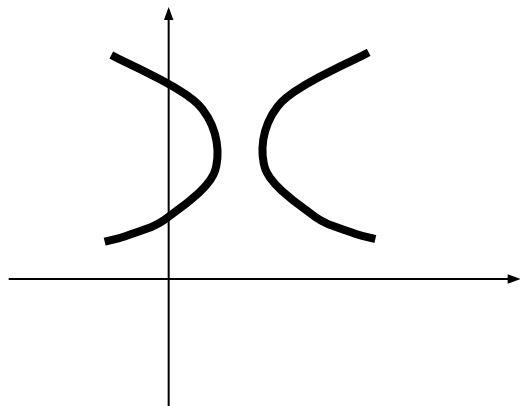
# Гипербола

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

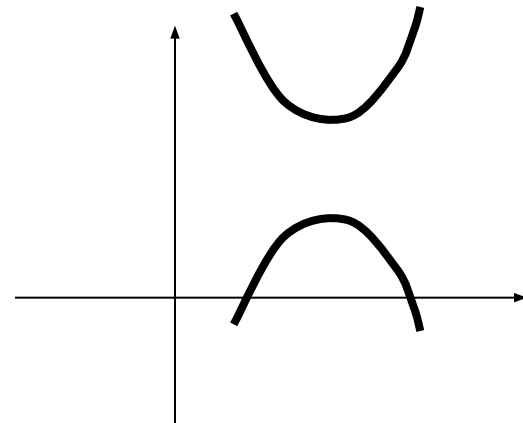
$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Каноническое уравнение гиперболы  
с центром в т.  $C(x_0, y_0)$ , с

действительной  
полуосью  $a$  и  
мнимой полуосью  $b$



мнимой полуосью  $a$   
и действительной  
полуосью  $b$

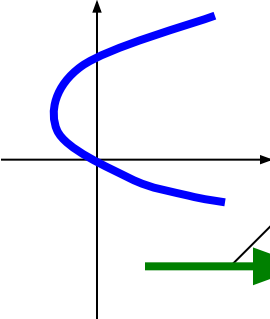


# Парабола

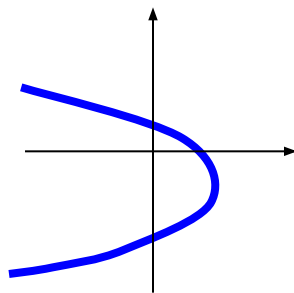
Каноническое уравнение параболы  
с вершиной в т.  $C(x_0, y_0)$ , с  
с осью симметрии параллельной

**OX**

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$



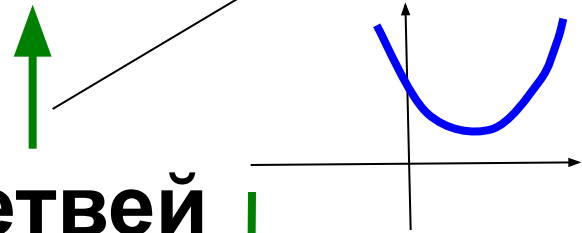
$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$



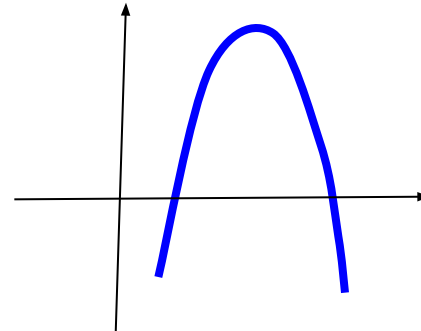
**направление ветвей**

**OY**

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$



$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$





# Правила дифференцирования

$$(C)' = 0 \quad (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv' \quad (Cu)' = Cu'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2} \quad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$$

## Производная сложной функции

$$y = f(\varphi(\psi(\mu(x))))$$

$$f'(x) = f'(\varphi(\psi(\mu(x)))) \cdot \varphi'(\psi(\mu(x))) \cdot \psi'(\mu(x))$$

# Таблица производных

$$x' = 1$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\text{arcctgx})' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$1. \int dx = x + C$$

$$2a. \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$2b. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$3. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$5. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$10. \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$6. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$11. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$12. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$8. \int e^x dx = e^x + C$$

$$13. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a}) + C$$

# Свойства неопределенного интеграла

$$1. (\int f(x)dx)' = f(x) \quad 2. d \int f(x)dx = f(x)dx$$

$$3. \int f'(x)dx = f(x) + C \quad 4. \int df(x) = f(x) + C$$

$$5. \int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$$

$$6. \int k f(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$7. \int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C$$

$u = \varphi(x)$

$$8. \int f(x+b)dx = F(x+b) + C$$

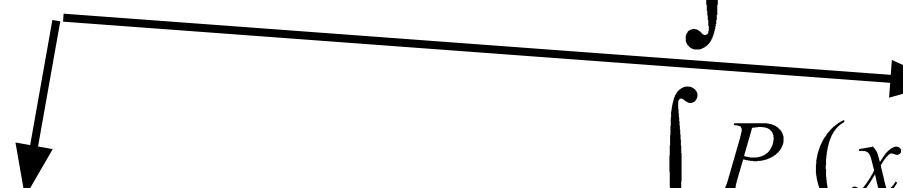
$$9. \int f(kx)dx = \frac{1}{k} F(kx) + C$$

$$10. \int f(kx+b)dx = \frac{1}{k} F(kx+b) + C$$

Дифференциал функции  $dy = f'(x)dx$

Формула интегрирования по

частям  $\int U dV = UV - \int V dU$



$\int P_n(x) \sin x dx$   
 $\int P_n(x) \cos x dx$   
 $\int P_n(x) a^x dx$

$\int P_n(x) \ln x dx$   
 $\int P_n(x) \arcsin x dx$   
 $\int P_n(x) \arccos x dx$   
 $\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx$

$\int a^x \cos x dx$      $\int a^x \sin x dx$

**КРУГОВО**

**Й**

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad \text{Площадь плоской фигуры}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho')^2 + (\rho)^2} d\varphi \quad \text{Длина кривой}$$

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси OX

# Дифференциальные уравнения первого

1. С разделенными переменными  $M(x) dx + S(y) dy = 0$

2. С разделяющимися переменными

А)  $M(x) K(y) dx + S(y) R(x) dy = 0$       Б)  $y' = L(y) T(x)$

3. Однородные первого порядка

А)  $f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0$

*функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  являются однородными  
одинаковой степени*

Б)  $y' = f(y/x)$

4. Линейные дифференциальные уравнения первого  
порядка

$$y' + p(x)y = q(x)$$

5. Уравнение Бернулли  $y' + p(x)y = q(x)y^n$

# Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$y = z(x)$  и  $y = g(x)$  частные решения

уравнения

$$y = C_1 z(x) + C_2 g(x)$$

общее решение

уравнения  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  Характеристическое уравнение

1.  $D > 0$   $k_1 \neq k_2$

Частные решения

$$y_1 = e^{k_1 x} \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

2.  $D = 0$   $k_1 = k_2 = k$

Частные решения

$$y_1 = e^{kx} \quad y_2 = xe^{kx}$$

3.  $D < 0$   $k_{1,2} = a \pm ib$

Частные решения

$$y_1 = e^{ax} \cdot \cos bx \quad y_2 = e^{ax} \cdot \sin bx$$



# Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Сумма  $y = y_{oo} + y_{чн}$  - общее решение уравнения, где  $y_{oo}$  - решение однородной части неоднородного д.у.,  $y_{чн}$  какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения

**Стандартная правая часть.**  $f(x) = e^{ax} \cdot P_n(x)$

частное

$$y_{чн} = x^s e^{ax} \cdot Q_n(x)$$

решение  $Q_n(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \dots + Dx + F$

$s=0$ , если  $a \neq k_i$      $s=1$ , если  $a = k_i$      $s=2$ , если  $a = k_1 = k_2$

$k_i$  - корни характеристического уравнения

**Стандартная правая**

**часть**  $= e^x \cdot (P_n(x) \cdot \cos bx + S_r(x) \cdot \sin bx)$

частное

$$y_{чн} = x^s e^{ax} \cdot (Q_m(x) \cdot \cos bx + R_m(x) \cdot \sin bx)$$

решение

$s=0$ , если  $a \pm ib \neq k_{1,2}$      $s=1$ , если  $a \pm ib = k_{1,2}$      $m = \max\{n, r\}$

$k_i$  - корни характеристического уравнения

# Числовые ряды

О.1. Бесконечная сумма элементов последовательности вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{называется числовым рядом,}$$

$a_n$  – общий член ряда

$$\text{О.2. } S_1 = a_1 \quad S_2 = a_1 + a_2 \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  Последовательность частичных сумм ряда

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

О.3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  – ряд сходится,  $S$  – сумма ряда

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$  или  $\nexists$  – ряд расходящийся

**Теорема.**

*(необходимый признак сходимости ряда)*

Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

# Достаточные признаки сходимости числовых рядов

## 1. Интегральный признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = f(n), \quad y = f(x) > 0, \text{ непрер, } \searrow \text{ при } x \in [1, \infty)$$

$$\int_1^{\infty} f(x) dx \begin{cases} \nearrow \text{сходится} \\ \searrow \text{расходится} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \nearrow \text{сходится} \\ \searrow \text{расходится} \end{cases}$$

Ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$   $\begin{cases} k > 1 \nearrow \text{сходится} \\ k \leq 1 \searrow \text{расходится} \end{cases}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  Гармонический ряд расходится

## 2. Признак сравнения по величине

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2)$$

$$a_n \leq b_n \quad \begin{matrix} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ — сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ — сходится} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ — расходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ — расходится} \end{matrix}$$

### 3. Предельный признак сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C \neq 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Одинаковы по сходимости

### 4. Признак Даламбера

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D \begin{cases} < 1 & \rightarrow \text{сходится} \\ > 1 & \rightarrow \text{расходится} \end{cases}$$

### 5. Радикальный признак Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = K \begin{cases} < 1 & \rightarrow \text{сходится} \\ > 1 & \rightarrow \text{расходится} \end{cases}$$

**Т. Лейбница** Если в знакочередующемся ряде

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots, \text{ и}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ряд сходится и его сумма  $S < a_1$