

# Коэффициент размножения в бесконечной среде

$$K_{\infty} = \eta \cdot \mu \cdot \phi \cdot \theta$$

$$K_{\infty} = \frac{\int_0^{\infty} \int_V v(E) \cdot \Sigma_f(E) dE dV}{\int_0^{\infty} \int_V \Sigma_a(E) dE dV}$$

- $\mu$  - коэффициент размножения на быстрых нейтронах

$$\left( \mu = \frac{\int_0^{\infty} \int_V v(E) \Sigma_f(E) dE dV}{\int_0^{\infty} \int_V \Sigma_a(E) dE dV} \right)$$

- $\phi$  - вероятность нейтрону избежать резонансного захвата (вероятность нейтрону не поглотиться при замедлении до тепловой энергии)
- $\theta$  - коэффициент теплового использования (вероятность теплому нейтрону поглотиться в материале ядерного горючего)

$$\frac{dN}{d\tau}$$

$$d\tau$$

- $\eta$  - число вторичных быстрых нейтронов приходящихся на один поглощённый в топливе тепловой нейтрон

$$\eta = \frac{\overline{v \Sigma_f}}{\overline{\Sigma_a}}$$

# Баланс нейтронов

(однотемпературное приближение, реактор однородный)

$$+ \text{Рождение} - \text{поглощение} - \text{утечка} = \frac{dN}{d\tau}$$

$$q - \Sigma_a \cdot \Phi - \text{div} \mathbf{j} = \frac{dN}{d\tau}$$

$$\mathbf{j} = -D \nabla \Phi \quad ; \quad D = \frac{1}{3 \Sigma_{tr}} \quad ; \quad \Sigma_{tr} = \Sigma_s \cdot (1 - \bar{\mu}) \quad ; \quad \bar{\mu} = \frac{2}{3A}$$

$$D \Delta \Phi - \Sigma_a \cdot \Phi + q = \frac{dN}{d\tau}$$

$$D \Delta \Phi - \Sigma_a \cdot \Phi + \nu \Sigma_f \cdot \Phi = \frac{dN}{d\tau}$$

$$K_{\infty} = \frac{\int \int_{V_0}^{\infty} \nu(E) \cdot \Sigma_f(E) dE dV}{\int \int_{V_0}^{\infty} \Sigma_a(E) dE dV} = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a}$$

$$D\Delta\Phi - \Sigma_a \cdot \Phi + K_{\infty} \cdot \Sigma_a \cdot \Phi = \frac{dN}{d\tau}$$

В стационарном случае (реактор критический)  $\frac{dN}{d\tau} = 0$

$$D\Delta\Phi + (K_{\infty} - 1) \cdot \Sigma_a \cdot \Phi = 0$$

èèè

$$\Delta\Phi + \frac{(K_{\infty} - 1)}{L^2} \cdot \Phi = 0, \quad \text{ãäå} \quad L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} - \text{êâäðàò äëéíû} \quad \text{äèôóçèè}$$

èèè

$$\Delta\Phi + B^2 \cdot \Phi = 0, \quad \text{ãäå} \quad B^2 = \frac{(K_{\infty} - 1)}{L^2} - \text{êâäðàò ìàòðèàëüí} \quad \text{îâî} \quad \text{ïàðàìàðà}$$

волновое уравнение

# Решения волнового уравнения для простейших геометрий

$$\tilde{\Delta} \Phi - \Phi(R_{\tilde{\alpha}\delta}) = 0$$

## 1. Сферический реактор

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\Phi}{dr} + \alpha^2 \cdot \Phi = 0, \quad \text{à } \Phi = f/r$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \alpha^2 \cdot f = 0 \Rightarrow \Phi(r) = C_1 \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot r)}{r} + C_2 \cdot \frac{\cos(\alpha \cdot r)}{r}$$

$$\text{èç } \Phi(r) < \infty, \quad \tilde{N}_2 = 0$$

$$\text{èç } \Phi(R) = C_1 \cdot \frac{\sin(\alpha \cdot R)}{R} = 0, \quad \tilde{N}_2 = 0 \Rightarrow \sin(\alpha \cdot R) = 0$$

$$\text{èèè } \alpha_n \cdot R = \pi \cdot (n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty; \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{R}$$

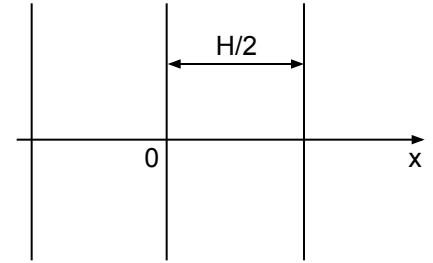
$$\hat{\Phi}(r) = C_1 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{R} \cdot r\right)}{r}$$

$$\hat{B}^2 = \alpha_0^2 \Rightarrow R_{\tilde{\alpha}\delta} = \frac{\pi}{B} = \frac{\pi \cdot L}{\sqrt{K_\infty - 1}}$$

# Решения волнового уравнения для простейших геометрий

$$\tilde{\Delta} \Phi = 0 \quad \text{в области} \quad - \Phi\left(\pm \frac{H}{2}\right) = 0$$

2. Плоский реактор



$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \alpha^2 \cdot \Phi = 0,$$

$$\Phi(x) = C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x)$$

$$\text{в } x = \pm H/2 \quad \tilde{N}_2 = 0$$

$$\text{в } x = H/2 \quad \Phi(H/2) = C_1 \cdot \cos(\alpha \cdot H/2) = 0, \quad \text{и в } x = -H/2$$

$$\alpha_n \cdot H/2 = \pi/2 \cdot (n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty; \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{H}$$

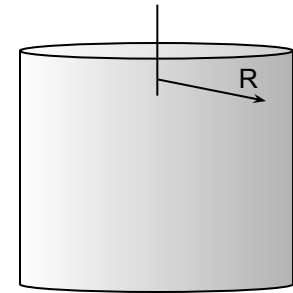
$$\text{и в } x = 0 \quad \Phi(x) = C_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{H} \cdot x\right)$$

$$\text{Глубина реактора} \quad H_{\text{ед}} = \frac{\pi}{B} = \frac{\pi \cdot L}{\sqrt{K_\infty - 1}}$$

# Решения волнового уравнения для простейших геометрий

$$\tilde{\Delta} \Phi = 0 \quad \text{в } \Phi(R_{\tilde{\Delta}}) = 0$$

## 3. Цилиндрический реактор



$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\Phi}{dr} + \alpha^2 \cdot \Phi = 0, \quad \text{или} \quad \Phi'' + \frac{1}{r} \Phi' + \alpha^2 \cdot \Phi = 0 \quad (\text{обыкновенное уравнение})$$

$$\Phi(r) = C_1 \cdot J_0(\alpha \cdot r) + C_2 \cdot N_0(\alpha \cdot r)$$

Известно, что при  $r \rightarrow 0$ ,  $N_0(\alpha \cdot r) \rightarrow -\infty$ , следовательно  $C_2 = 0$

Следовательно, решение имеет вид  $\alpha_n = \frac{\xi_{n+1}}{R}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ;

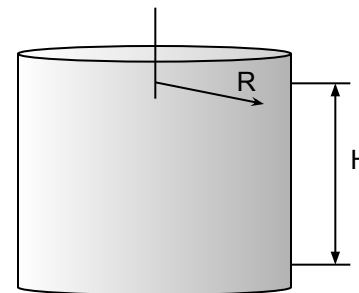
где  $\xi_n$  — корни уравнения  $J_0(\xi) = 0$ ,  $\xi_1 = 2.405$

$$\text{Итак, решение имеет вид } \Phi(r) = C_1 \cdot J_0\left(\frac{2.405}{R} \cdot r\right)$$

$$\text{Эффективный коэффициент } R_{\text{эф}} = \frac{2.405}{B} = \frac{2.405 \cdot L}{\sqrt{K_{\infty} - 1}}$$

# Решения волнового уравнения для простейших геометрий

Áðáíè÷íúá óñëíâëÿ -  $\Phi(R, z) = \Phi(r, \pm H/2) = 0; \quad \nabla_r \Phi(0, z) = \nabla_z \Phi(r, 0) = 0$



## 4. Цилиндрический реактор конечной высоты

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\Phi}{dr} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} + \alpha^2 \cdot \Phi = 0,$$

Íóñòü  $\Phi(r, z) = G(r) \cdot F(z)$  è  $\alpha^2 = \alpha_r^2 + \alpha_z^2$ . Óíããà,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dG}{dr} + \alpha_r^2 \cdot G = 0, \quad G(r) = 0, \quad G(0) < \infty \\ \frac{d^2F}{dz^2} + \alpha_z^2 \cdot F = 0, \quad F(\pm H/2) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Ðàøáíëÿ,

$$\left. \begin{aligned} G(r) &= C_1 \cdot J_0(\alpha_r \cdot r) + C_2 \cdot N_0(\alpha_r \cdot r) \\ F(r) &= C_3 \cdot \cos(\alpha_z \cdot z) + C_4 \cdot \sin(\alpha_z \cdot z) \end{aligned} \right\}$$

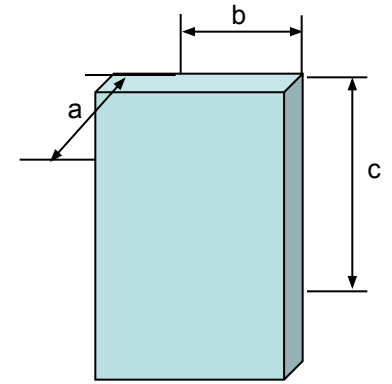
Îëí÷àòàëü íí  $\Phi(r) = C_1 \cdot J_0(\alpha_r \cdot r) \cdot \cos(\alpha_z \cdot z), \quad \alpha_r = \frac{2.405}{R}, \quad \alpha_z = \frac{\pi}{H}$

Êðèèè÷ãñëí à óñëíâëá  $B^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$

# Решения волнового уравнения для простейших геометрий

## 5. Реактор в форме параллелепипеда

$$\Phi(\pm a, y, z) = \Phi(x, \pm b, z) = \Phi(x, y, \pm c) = 0$$



$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} + \alpha^2 \cdot \Phi = 0$$

Решение уравнения Лапласа (диффузия в реакторе), удовлетворяющее граничным условиям

$$\Phi(x, y, z) = C \cdot \cos(\alpha_x \cdot x) \cdot \cos(\alpha_y \cdot y) \cdot \cos(\alpha_z \cdot z), \quad \alpha_x = \frac{\pi}{a}, \quad \alpha_y = \frac{\pi}{b}, \quad \alpha_z = \frac{\pi}{c}$$

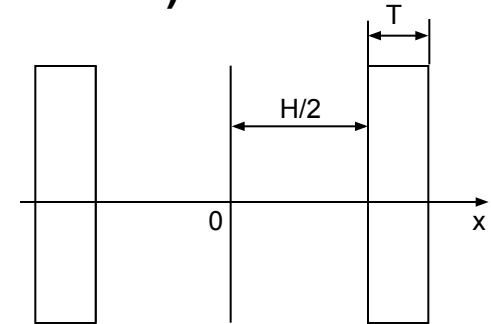
$$B^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$$



# Влияние отражателя

(однорупповое приближение, реактор плоский)

Активная зона	Отражатель
$\Delta\Phi + \frac{(K_{\infty} - 1)}{L_a^2} \cdot \Phi = 0$ $\Delta\Phi + B_a^2 \cdot \Phi = 0$	$\Delta\Phi - \frac{1}{L_r^2} \cdot \Phi = 0$ $\Phi - B_r^2 \cdot \Phi = 0$
$\Phi_a(x) = C \cdot \cos(B_a \cdot x)$	$\Phi_r(x) = C_r^1 \cdot ch(B_r \cdot x) + C_r^2 \cdot sh(B_r \cdot x)$ $\Phi_r\left(\frac{H}{2} + T\right) = 0, \text{ òì}$ $\Phi_r(x) = C_r \cdot sh\left(B_r \cdot \left(\frac{H}{2} + T - x\right)\right)$
<p>Граничные условия</p> $\Phi_a\left(\frac{H}{2}\right) = \Phi_r\left(\frac{H}{2}\right), \quad D_a \frac{d\Phi_a}{dx} \Big _{x=H/2} = D_r \frac{d\Phi_r}{dx} \Big _{x=H/2}$	
$D_a \cdot B_a \cdot tg\left(B_a \cdot \frac{H}{2}\right) = D_r \cdot B_r \cdot cth(B_r \cdot T)$	



# Эффективная добавка отражателя (однотемпературное приближение, реактор плоский)

$$\delta = \frac{H_0}{2} - \frac{H}{2}, \quad H_0 - \text{длина реактора без отражателя}$$

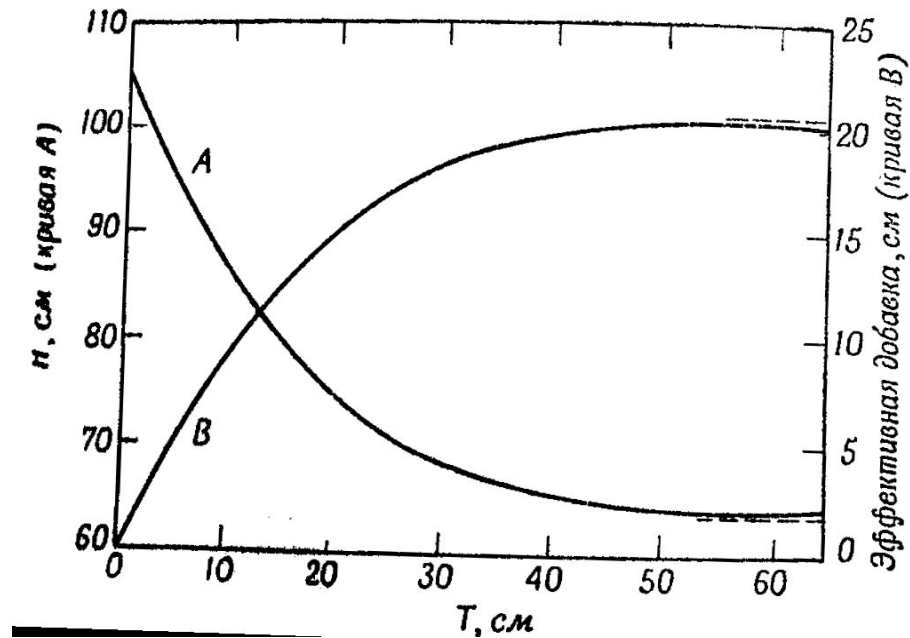
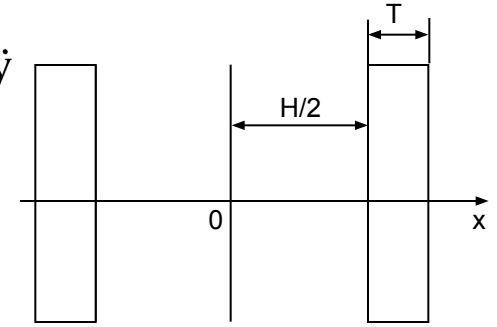
Поскольку в крит. реакторе  $B_a^2 = \left(\frac{\pi}{H_0}\right)^2 \quad (B_a^2 = \frac{K_\infty - 1}{L^2})$

$$\frac{H}{2} = \frac{\pi}{2 \cdot B_a} - \delta, \quad \text{длина реактора с отражателем}$$

$$D_a \cdot B_a \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - B_a \cdot \delta\right) = D_r \cdot B_r \cdot \operatorname{cth}(B_r \cdot T)$$

$$D_a \cdot B_a \cdot \operatorname{ctg}(B_a \cdot \delta) = D_r \cdot B_r \cdot \operatorname{cth}(B_r \cdot T)$$

$$\delta = \frac{1}{B_a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{D_a \cdot B_a}{D_r \cdot B_r} \cdot \operatorname{th}(B_r \cdot T)\right)$$



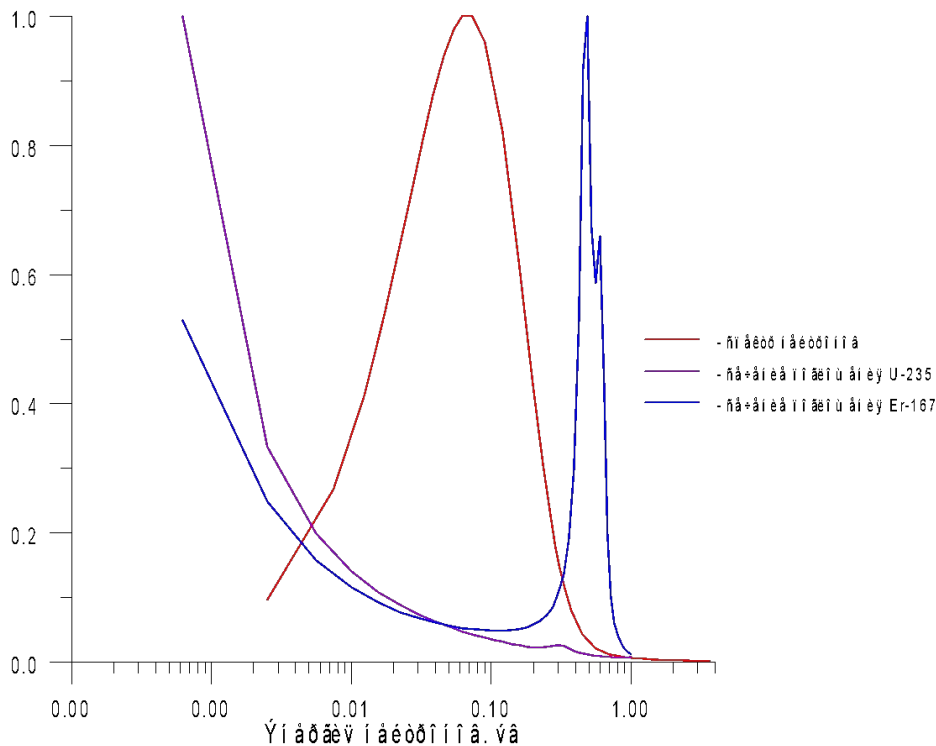
# Расчёт сечений для тепловых нейтронов

$$n(E) \approx M(E) = \tilde{N} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E}{kT_i}} \exp\left(-\frac{E}{kT_i}\right), \quad \text{iðè} \quad \int_0^{\infty} M(E, kT_i) dE = 1$$

$$T_i = T_{çàì} \cdot \left(1 + A \frac{\Sigma_a^T}{\xi \Sigma_s}\right)$$

$T_i$  - òàììáðàòó ðà íáéòðíííã í äàçà

$$\sigma_a(E) \approx \frac{1}{V} = \frac{1}{\sqrt{E}}, \quad \text{ò.á.} \quad \frac{\sigma_a(E)}{\sigma_a(E_0)} = \frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{E}} \quad \text{èèè} \quad \sigma_a(E) = \sigma_a(E_0) \frac{\sqrt{E_0}}{\sqrt{E}}$$



$$\sigma_s^T - const$$

# Расчёт сечений для тепловых нейтронов

$$\overline{\sigma}_a \cdot \overline{\Phi}^T = \int_0^{E_{\text{ад}}} \sigma(\dot{A}) \cdot \Phi(E) dE \quad ; \quad \overline{\Phi}^T = \int_0^{E_{\text{ад}}} \Phi(E) dE = \int_0^{E_{\text{ад}}} v \cdot n(E) dE, \quad !!!$$

Тогда, 
$$\overline{\sigma}_a = \frac{\int_0^{E_{\text{ад}}} \sigma(\dot{A}) \cdot \Phi(E) dE}{\overline{\Phi}^T} = \frac{\int_0^{E_{\text{ад}}} \sigma(\dot{A}) \cdot \sqrt{E} \cdot n(E) dE}{\int_0^{E_{\text{ад}}} \sqrt{E} \cdot n(E) dE} \approx \frac{\int_0^{\infty} \sigma(\dot{A}_0) \cdot \sqrt{E_0} \cdot M(E) dE}{\int_0^{\infty} \sqrt{E} \cdot M(E) dE}$$

$$n(E) \approx M(E) = \tilde{N} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{E}{kT_i}} \exp\left(-\frac{E}{kT_i}\right)$$

$E_i = kT_i$

Взяв интегралы получим:

$$\overline{\sigma}_a \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma(\dot{A}_0) \sqrt{\frac{\dot{A}_0}{\dot{A}_i}} \quad \text{èèè} \quad \overline{\sigma}_a \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sigma(\dot{A}_0) \sqrt{\frac{T_0}{T_i}} \quad \text{ïññêîëüêó} \quad E = kT$$

$$\hat{A}_0 = 0.0253 \text{ ýâ} \rightarrow V_0 = 2200 \text{ ì/ñâê} \rightarrow T_0 = 300 \text{ Ê}$$

# Сечения для тепловых нейтронов при $E_0=0.0253\text{эВ}$

	A	$\Sigma_s$	$\Sigma_a$	$\Sigma_f$	$\nu$												
H	1	20.4	0.33200	0.000	0.00	GA	70	6.5	2.90000	0.000	0.00	AU97	197	5.0	98.80000	0.000	0.00
D	2	3.4	0.00053	0.000	0.00	ZR	91	6.4	0.19000	0.000	0.00	PB	207	11.4	0.17000	0.000	0.00
HE	4	0.8	0.00700	0.000	0.00	NB	93	6.2	1.15000	0.000	0.00	BI	209	9.0	0.03300	0.000	0.00
HE3	3	1.9	5327.00000	0.000	0.00	MO	96	5.8	2.65000	0.000	0.00	TH28	228	0.0	123.30000	0.300	3.00
HE4	4	0.8	0.00000	0.000	0.00	RH	103	5.0	150.00000	0.000	0.00	TH29	229	0.0	84.50000	30.500	2.08
LI	7	1.1	70.54000	0.000	0.00	RH05	105	4.1	16000.00000	0.000	0.00	TH30	230	0.0	23.20000	0.001	3.00
LI6	6	0.7	940.00000	0.000	0.00	CD	113	5.6	2520.00000	0.000	0.00	TH31	231	0.0	0.00000	0.000	0.00
LI7	7	1.1	0.03700	0.000	0.00	CD13	113	23.0	20100.00000	0.000	0.00	TH32	232	12.7	7.40000	0.000	3.00
BE	9	6.1	0.00920	0.000	0.00	IN15	115	3.0	205.00000	0.000	0.00	TH20	232	12.7	7.40000	0.000	0.00
B	11	4.3	760.00000	0.000	0.00	XE35	135	300000.0	2650000.00000	0.000	0.00	TH33	233	0.0	1515.00000	15.000	3.00
B10	10	2.1	3836.00000	0.000	0.00	SM49	149	200.0	42100.00000	0.000	0.00	PA31	231	10.0	201.00000	0.012	3.00
B11	11	4.9	0.00550	0.000	0.00	SM51	151	22.0	15000.00000	0.000	0.00	PA32	232	0.0	1460.00000	700.000	3.00
C	12	4.7	0.00340	0.000	0.00	EU	152	8.0	4600.00000	0.000	0.00	PA33	233	14.0	41.00000	0.100	3.00
N	14	10.6	1.87500	0.000	0.00	EU51	151	8.5	9200.00000	0.000	0.00	PA4M	234	0.0	0.00000	0.000	0.00
O	16	3.8	0.00027	0.000	0.00	EU53	153	7.5	300.00000	0.000	0.00	PA4G	234	0.0	0.00000	0.000	0.00
F	19	4.0	0.00950	0.000	0.00	GD	157	165.0	49400.00000	0.000	0.00	U232	232	15.0	148.00000	75.200	3.13
NA	23	3.2	0.53000	0.000	0.00	GD55	155	60.0	61000.00000	0.000	0.00	U233	233	8.2	574.20000	528.400	2.50
MG	24	3.4	0.06300	0.000	0.00	GD57	157	1000.0	254000.00000	0.000	0.00	U234	234	12.0	100.00000	0.650	3.00
AL	27	1.5	0.23000	0.000	0.00	DY64	164	260.0	2700.00000	0.000	0.00	U235	235	13.8	681.90000	583.500	2.44
SI	28	2.2	0.16000	0.000	0.00	ER	167	5.0	162.00000	0.000	0.00	U236	236	0.0	5.20000	0.000	0.00
P	31	4.1	0.18000	0.000	0.00	ER62	162	5.0	29.00000	0.000	0.00	U237	237	0.0	380.00000	0.350	3.00
S	32	1.0	0.52000	0.000	0.00	ER64	164	9.0	2.40000	0.000	0.00	U238	238	8.0	2.71000	0.000	0.00
CL	35	16.0	34.20000	0.000	0.00	ER66	166	6.0	38.00000	0.000	0.00	U38	238	8.0	2.71000	0.000	0.00
AR	40	0.6	0.67800	0.000	0.00	ER67	167	4.0	646.00000	0.000	0.00	U239	239	0.0	36.00000	14.000	3.00
K	39	1.5	2.10000	0.000	0.00	ER68	168	5.0	2.10000	0.000	0.00	NP6M	236	0.0	0.00000	0.000	0.00
CA	40	2.6	0.43000	0.000	0.00	ER70	170	2.0	5.00000	0.000	0.00	NP6G	236	0.0	0.00000	2500.000	3.00
TI	48	4.0	6.10000	0.000	0.00	LU	175	6.7	83.00000	0.000	0.00	NP37	237	0.0	169.00000	0.019	3.00
V	51	4.9	5.04000	0.000	0.00	LU75	175	6.0	23.00000	0.000	0.00	NP38	238	0.0	0.00000	2070.000	3.00
CR	52	3.9	3.20000	0.000	0.00	LU76	176	34.0	2320.00000	0.000	0.00	NP39	239	0.0	45.00000	1.000	3.00
MN	55	2.2	13.20000	0.000	0.00	HF	179	4.4	107.00000	0.000	0.00	NP0M	240	0.0	0.00000	0.000	0.00
FE	56	11.4	2.55000	0.000	0.00	W	184	5.7	18.30000	0.000	0.00	NP0G	240	0.0	0.00000	0.000	0.00
CO	59	6.7	37.20000	0.000	0.00	W180	180	5.3	3.50000	0.000	0.00	PU36	236	0.0	0.00000	162.000	3.00
NI	59	17.3	4.40000	0.000	0.00	W182	182	7.0	20.70000	0.000	0.00	PU37	237	0.0	0.00000	2200.000	3.00
CU	64	7.9	3.79000	0.000	0.00	W183	183	7.3	10.20000	0.000	0.00	PU38	238	24.0	564.00000	16.500	2.90
ZN	65	4.2	1.10000	0.000	0.00	W184	184	6.3	1.70000	0.000	0.00	PU39	239	9.5	1012.00000	741.700	2.89
						W186	186	3.2	37.80000	0.000	0.00	PU40	240	1.5	287.00000	0.050	2.85

# Нестационарное уравнение баланса нейтронов (однотемпературное приближение, реактор однородный)

В критическом реакторе

$$\frac{dN}{d\tau} = D\Delta\Phi - \Sigma_a \cdot \Phi + \nu\Sigma_f \cdot \Phi$$

$$\Delta\Phi + \frac{(K_\infty^0 - 1)}{L_0^2} \cdot \Phi = 0$$

$$\frac{dN}{d\tau} = \Delta\Phi + \frac{(K_\infty - 1)}{L^2} \cdot \Phi$$

$$\Rightarrow \Delta\Phi + B_0^2 \cdot \Phi = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = -B_0^2 \cdot \Phi$$

Подставив это сюда получим

$$\frac{dN}{d\tau} \approx \left( \frac{(K_\infty - 1)}{L^2} - B_0^2 \right) \cdot \Phi \quad \frac{1}{v} \frac{d\Phi}{d\tau} = \left( \frac{(K_\infty - 1)}{L^2} - B_0^2 \right) \cdot \Phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\Phi}{d\tau} = v \cdot \left( \frac{(K_\infty - 1)}{L^2} - B_0^2 \right) \cdot \Phi$$

Решение с начальным условием  $\Phi(0) = \Phi_0$ , будет

$$\Phi(\tau) = \Phi_0 \cdot \exp\left( \left( v \cdot \frac{(K_\infty - 1)}{L^2} - v \cdot B_0^2 \right) \cdot \tau \right), \quad B_0^2 = \frac{(K_\infty^0 - 1)}{L_0^2}, \quad L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$$

Если  $v = \text{const}$ , то  $L^2 = L_0^2$ , тогда

$$\Phi(\tau) = \Phi_0 \cdot \exp\left( v \cdot \frac{(K_\infty - K_\infty^0)}{L^2} \cdot \tau \right)$$

# Нестационарное уравнение баланса нейтронов (однотемпературное приближение, реактор однородный)

Итак, пусть  $\Phi(t)$ ,

$$\Phi(t) = \Phi_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{T}\right), \text{ где } T = \frac{L^2}{v \cdot (K_\infty - K_0)} \text{ или } T = \frac{L^2}{v \cdot \Delta K_\infty}$$

$v$  - скорость нейтронов,  $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$ ,  $D = 1/\Sigma_a$