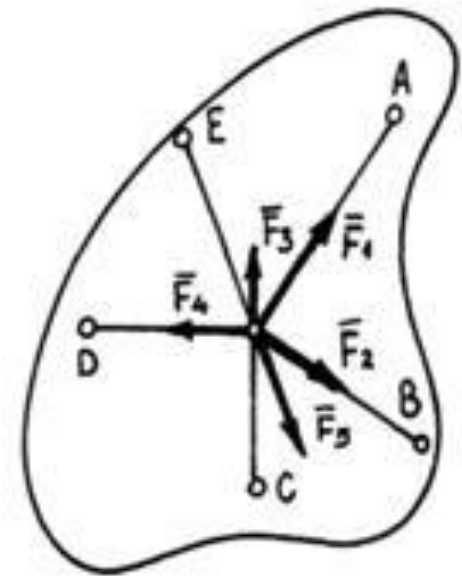
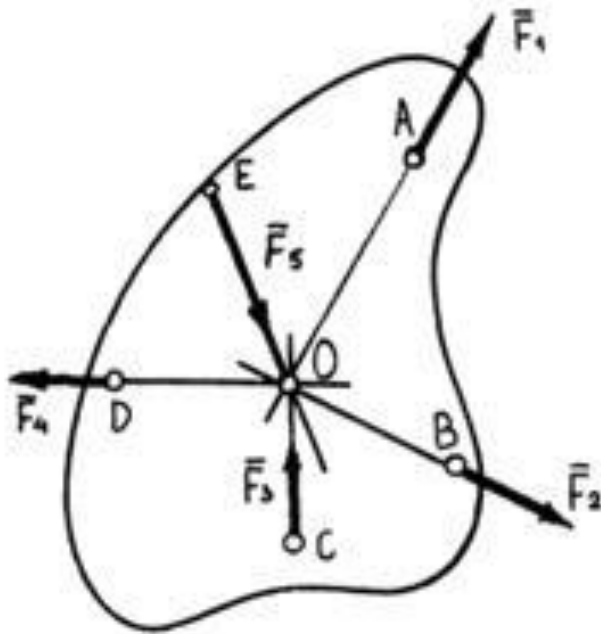


# Плоская система сходящихся сил

Техническая механика



# Плоская система сил

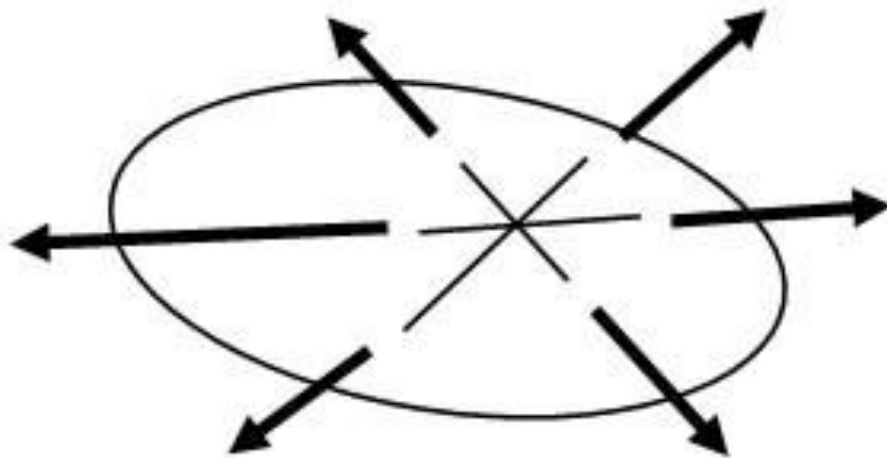
Линии действия всех сил лежат в одной плоскости

## Пространственная система сил –

если линии действия всех сил не лежат в одной плоскости

# Сходящаяся система сил

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке



Система сходящихся сил эквивалентна одной силе – ***равнодействующей***, которая

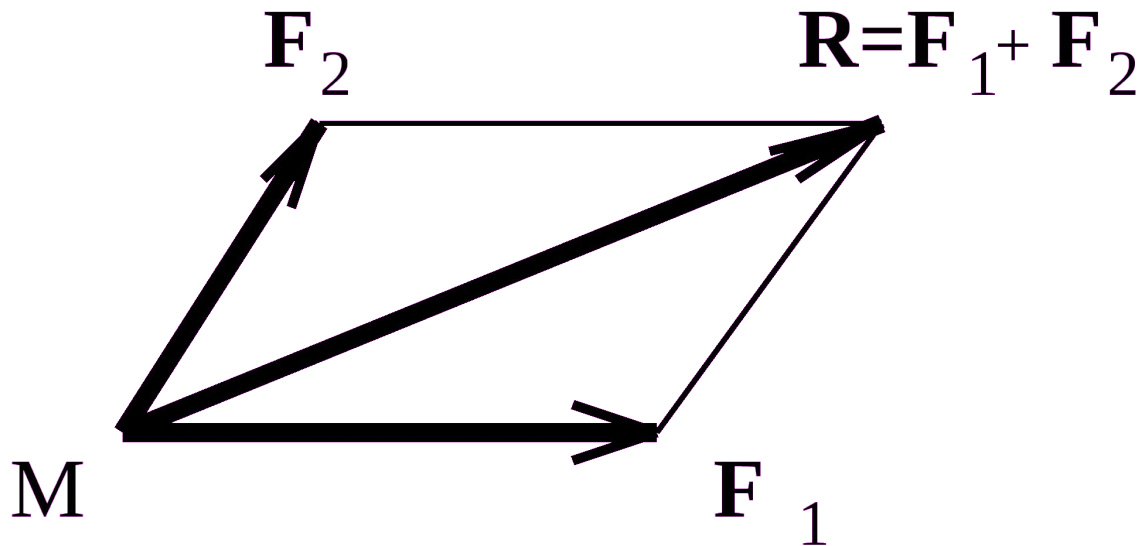
- равна векторной сумме сил
- приложена в точке пересечения линий их действия



# **МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕ Й**

# Метод параллелограмма сил

На основании аксиомы параллелограмма сил, каждые две силы системы, последовательно приводятся к одной силе – равнодействующей



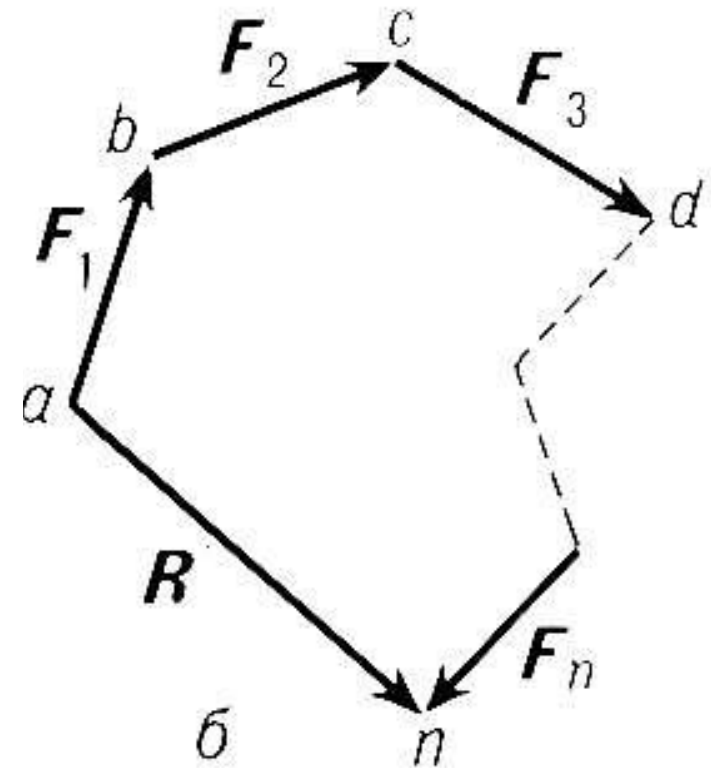
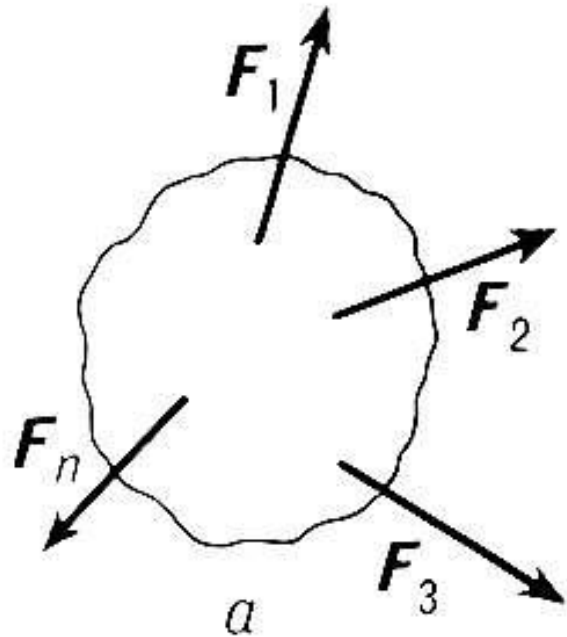
# Векторный силовой многоугольник

Поочерёдно откладываем каждый вектор силы от конечной точки предыдущего вектора

Получаем многоугольник:

- стороны – векторы сил системы,
  - замыкающая сторона – вектор равнодействующей системы
- СХОДЯЩИХСЯ СИЛ**

# Векторный силовой многоугольник





# Условия равновесия системы сходящихся сил

## Геометрическое условие

для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы векторный силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнутым

# Условия равновесия системы сходящихся сил

## Аналитические условия

Для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на координатные оси равнялись нулю



# **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА РАВНОВЕСИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБОМ**

# Геометрический способ

Удобен , если в системе три силы

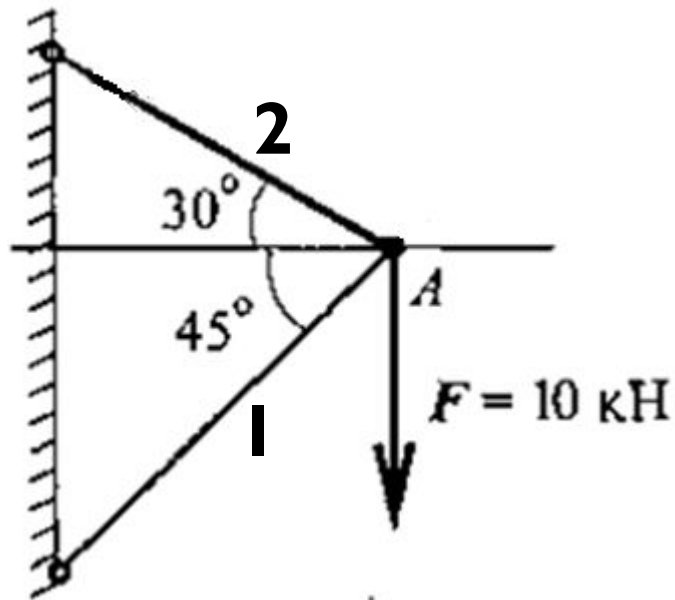
Тела считаются абсолютно твёрдым

# Алгоритм

1. Определить возможное направление реакций связей
2. Вычертить многоугольник сил системы, начиная с известных сил в некотором масштабе
3. Измерить полученные векторы сил, определить их величину, учитывая масштаб
4. Для уточнения определить величины векторов с помощью геометрических зависимостей

# Задача I

Груз подвешен на стержнях и находится в равновесии. Определить усилия в стержнях



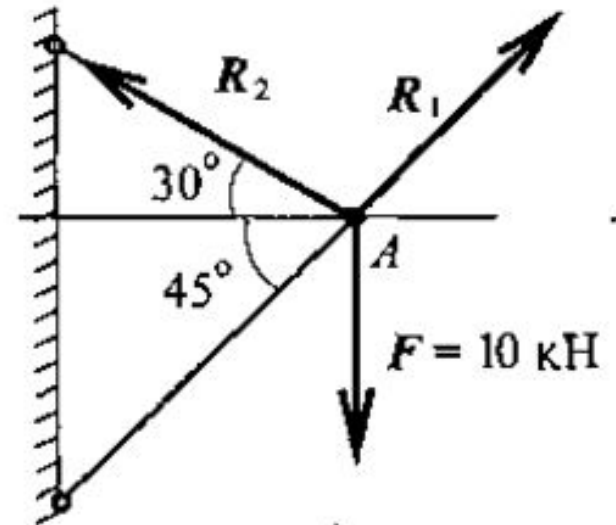
# Решение

I. Усилия, возникающие в стержнях крепления, по величине равны силам, с которыми стержни поддерживают груз

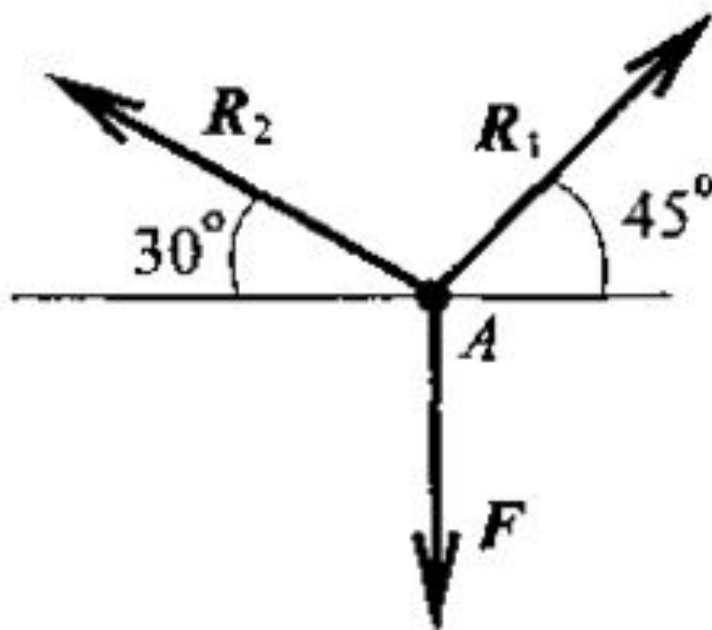
## 5 аксиома статики

Определяем возможные направления реакций связей «жёсткие стержни»

Усилия направлены вдоль стержней

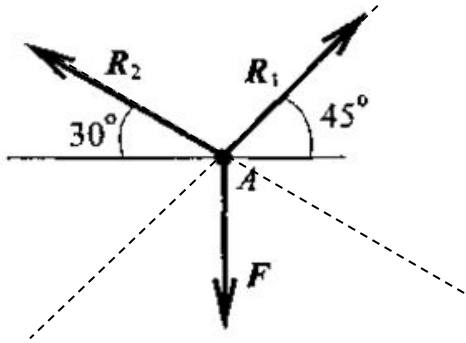


2. Освободим точку  $A$  от связей, заменив действие связей их реакциями

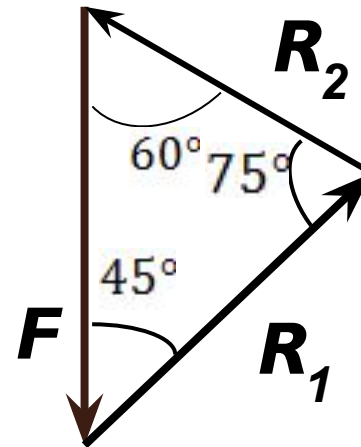




3. Система находится в равновесии.  
Построим треугольник сил



Используем параллельный перенос



Измеряем длины векторов,  
учитывая масштаб

#### 4. Для точности расчётов используем теоремой синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Для данного случая  $\gamma = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$

$$\frac{F}{\sin 75^\circ} = \frac{R_1}{\sin 60^\circ} = \frac{R_2}{\sin 45^\circ}$$

$$R_1 = \frac{F \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \quad R_2 = \frac{F \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}$$

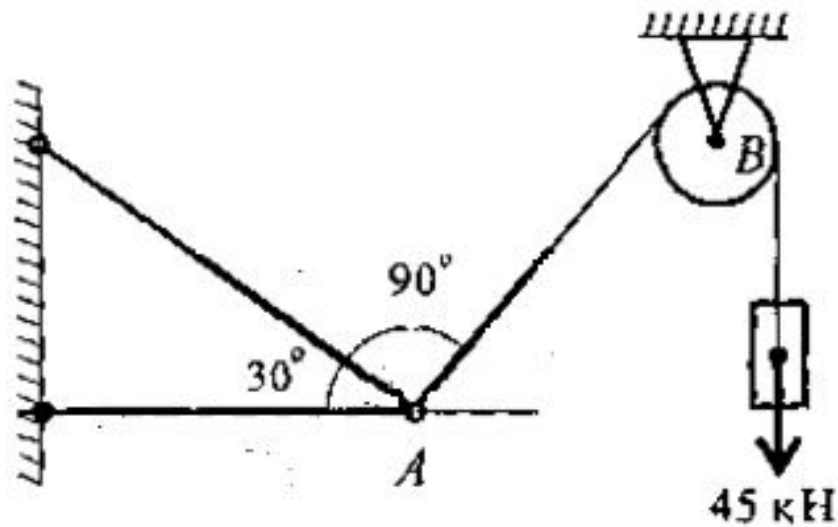
$$R_1 = \frac{10 \cdot 0.866}{0.966} = 9 \text{ кН}$$

$$R_2 = \frac{10 \cdot 0.707}{0.966} = 7,3 \text{ кН}$$

## Задача 2

Груз подвешен на стержнях и канатах и находится в равновесии.

Определить усилия в стержнях

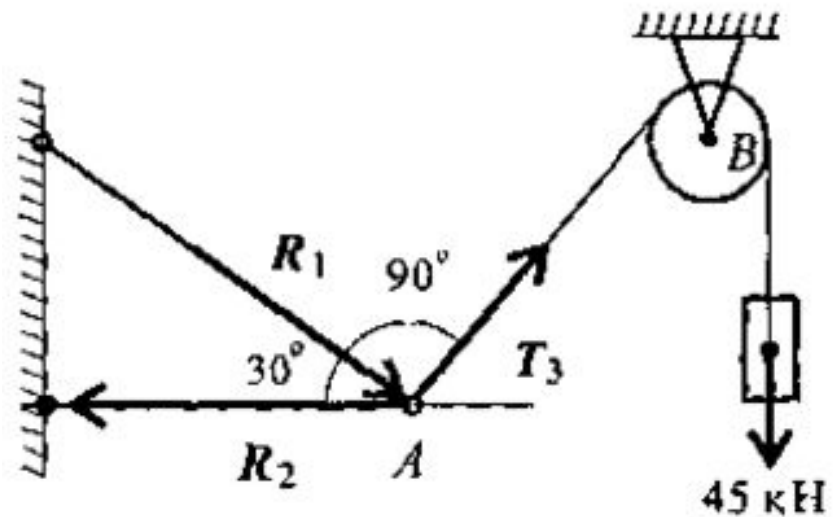


# Решение

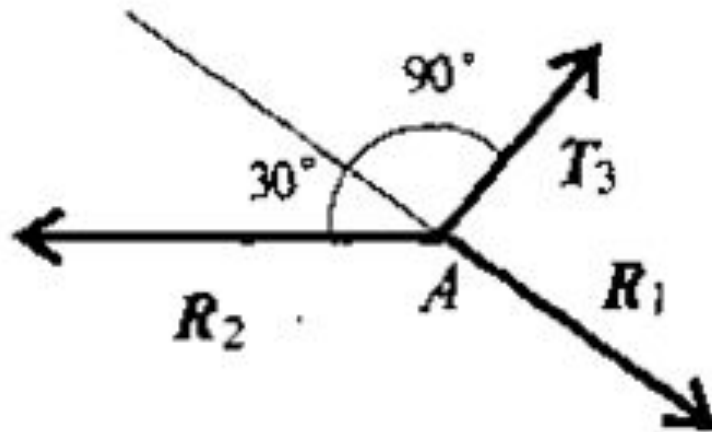
I. Определим направления усилий, приложенных в точке А

Реакции стержней – вдоль стержней.

Усилие от каната – вдоль каната от точки А к точке В

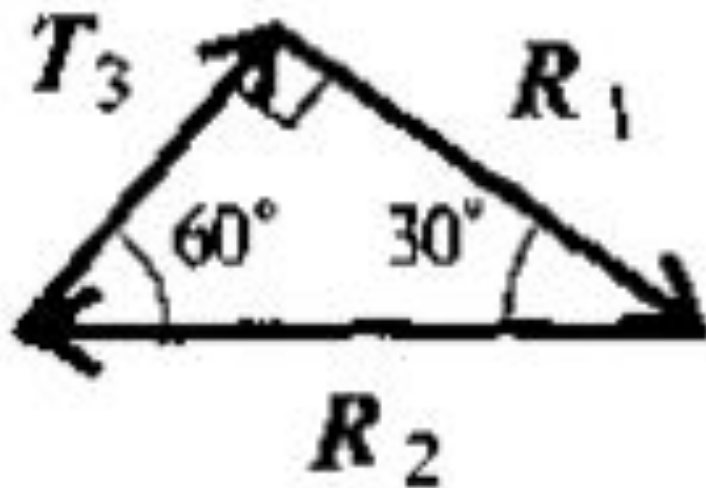


Груз находится в равновесии  $\Rightarrow$   
В равновесии находится точка **A**, в  
которой пересекаются 3 силы  
Освободим точку **A** от связей и  
рассмотрим её равновесие

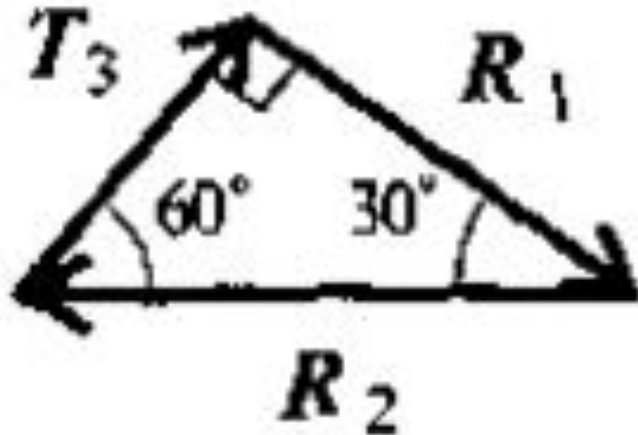


Груз растягивает  
канат силой  
**45 кН**  
 $\Rightarrow T_3 = 45 \text{ кН}$

Строим треугольник сил, приложенных к  
точке А, начиная с известной  $T_3$   
Получили прямоугольный треугольник



Неизвестные реакции стержней  
определим с помощью  
тригонометрических соотношений



$$R_2 = \frac{T_3}{\sin 30}$$

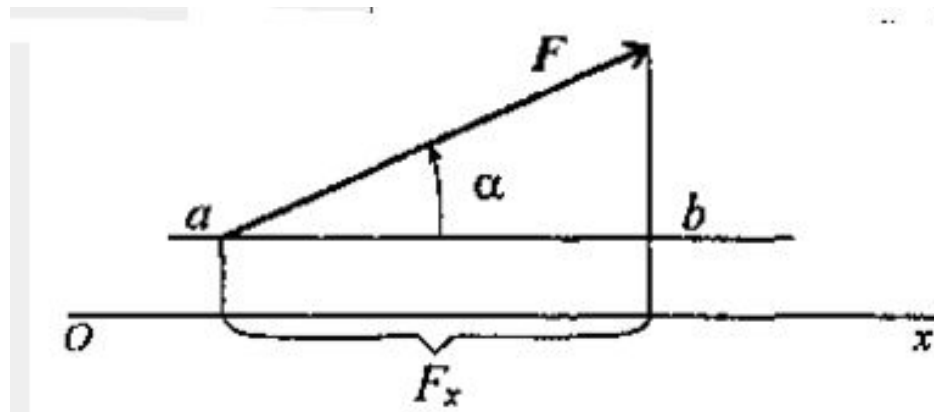
$$R_2 = \frac{45}{0.5} = 90 \text{ кН}$$

$$R_1 = R_2 \sin 60^\circ$$

$$R_1 = 90 \cdot 0,866 \approx 78 \text{ кН}$$

# Проекция силы на ось

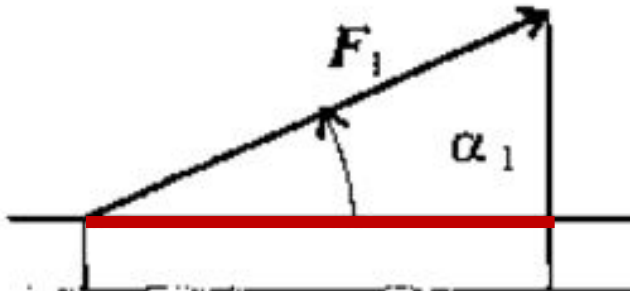
Определяется отрезком оси, отсекаемым перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора



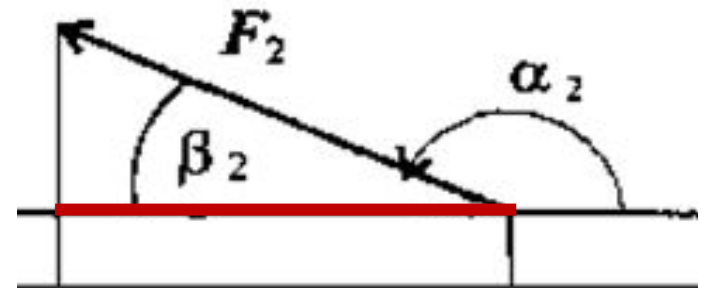
$$F_x = F \cos \alpha$$



# Знак проекции



$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1$$

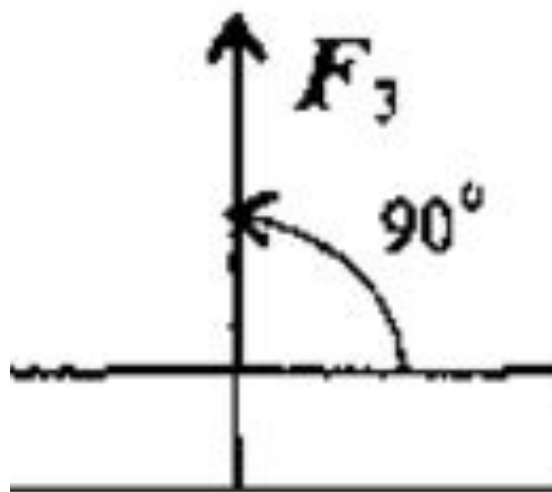


$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2$$

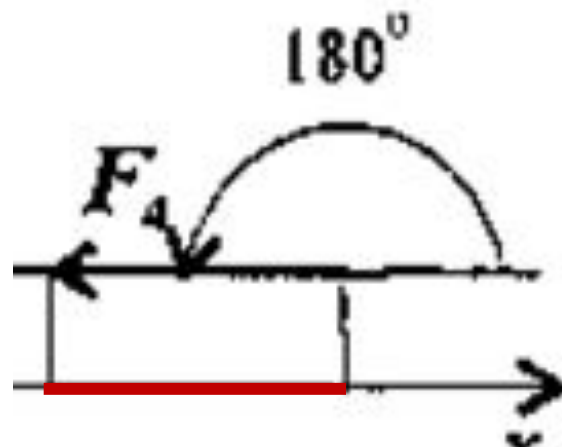
$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \cos(180 - \beta_2) = \\ &= -\cos \beta_2 \end{aligned}$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = -F_2 \cos \beta_2$$

# Знак проекции

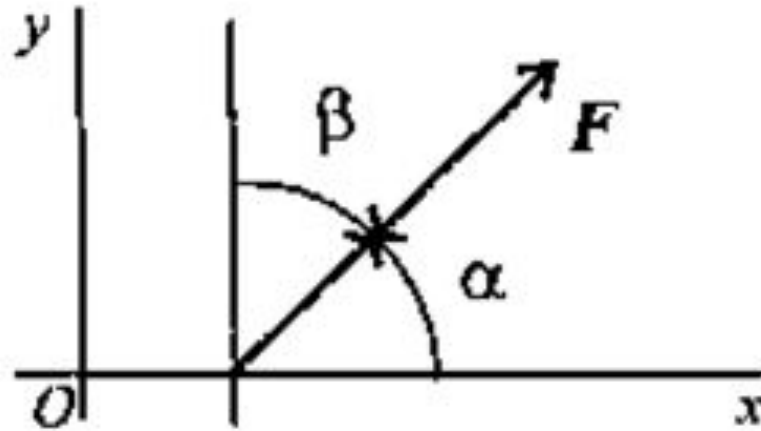


$$F_{3x} = F_3 \cos 90^\circ = 0$$



$$F_{4x} = F_4 \cos 180^\circ = -F_4$$

# Проекция силы на 2 взаимно перпендикулярные оси



$$F_x = F \cos \alpha > 0$$

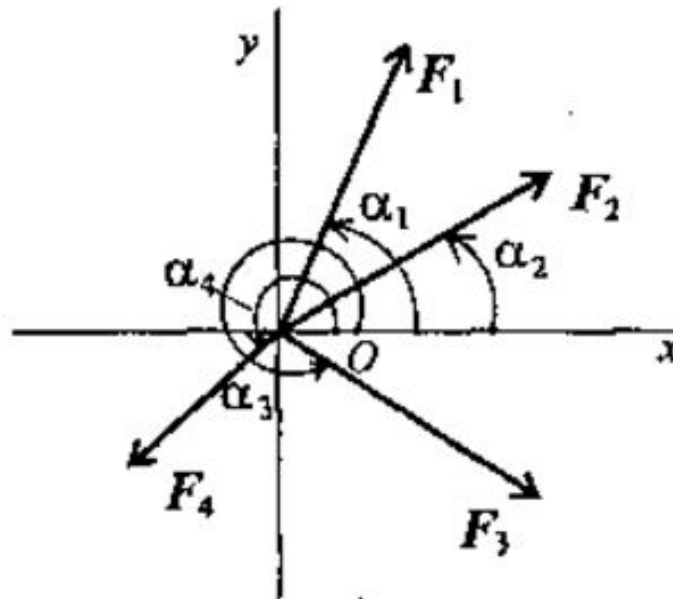
$$F_y = F \sin \alpha > 0$$

Статика

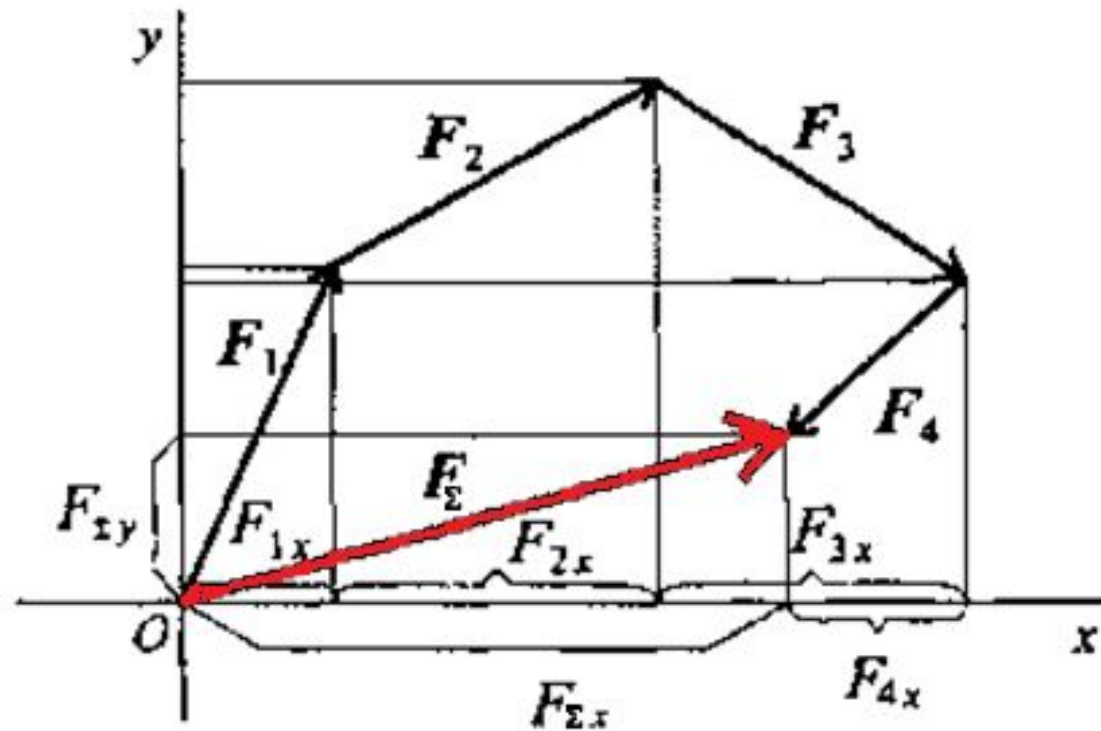


# **ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИМ СПОСОБОМ**

- Выберем систему координат
- Определим проекции векторов на оси



# Складываем проекции всех векторов на оси

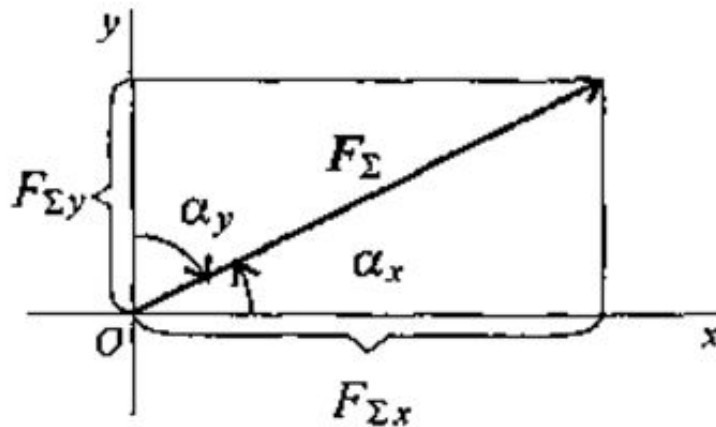


$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$$

$$F_{\Sigma x} = \sum_1^n F_{ix} \quad F_{\Sigma y} = \sum_1^n F_{iy}$$

Модуль равнодействующей найдём по теореме Пифагора



$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}$$

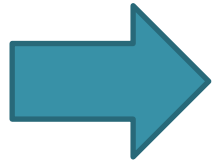
Направление равнодействующей – по величинам и знакам косинусов углов

$$\cos \alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}}$$

$$\cos \alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma}}$$

Тело в равновесии  $\Rightarrow$  равнодействующая  
равна нулю

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} = 0$$



$$F_{\Sigma x} = \sum_{1}^{n} F_{ix} = 0$$

$$F_{\Sigma y} = \sum_{1}^{n} F_{iy} = 0$$



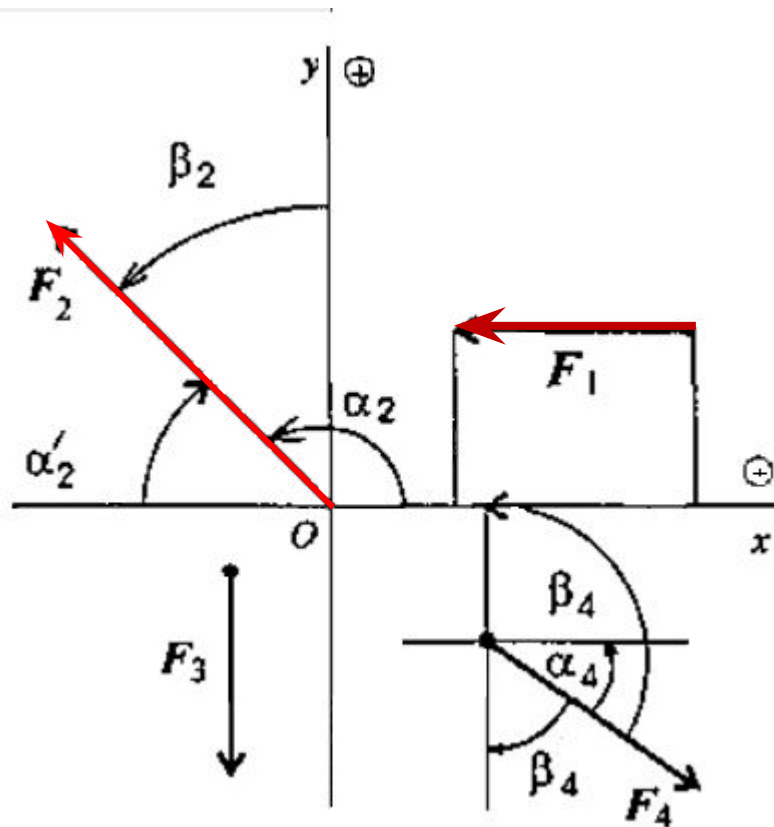
# Условие равновесия в аналитической форме

Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось системы

$$\begin{cases} \sum_{1}^n F_{ix} = 0 \\ \sum_{1}^n F_{iy} = 0 \end{cases}$$

# Задача 3

Определить величины и знаки проекций представленных сил



$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1$$

$$F_{1x} = F_1 \cos 180^\circ = -F_1 < 0$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 180^\circ = 0$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2$$

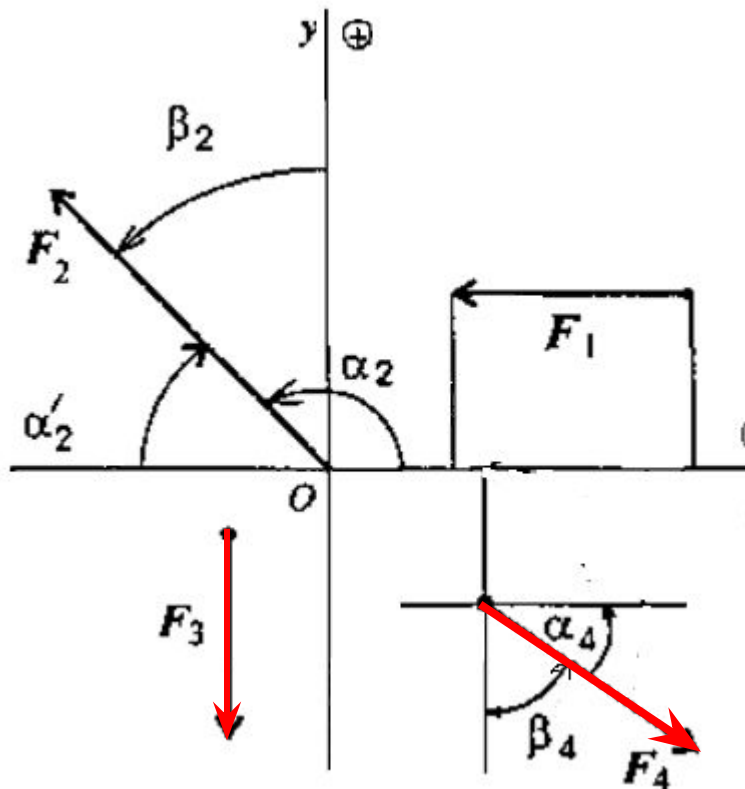
$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_2'$$

$$F_{2x} = -F_2 \cos \alpha_2' < 0$$

$$F_{2y} = F_2 \cos \beta_2 > 0$$

# Задача 3

Определить величины и знаки проекций представленных сил



$$F_{3x} = F_3 \cos 270^\circ = 0$$

$$F_{3y} = F_3 \sin 270^\circ = -F_3 < 0$$

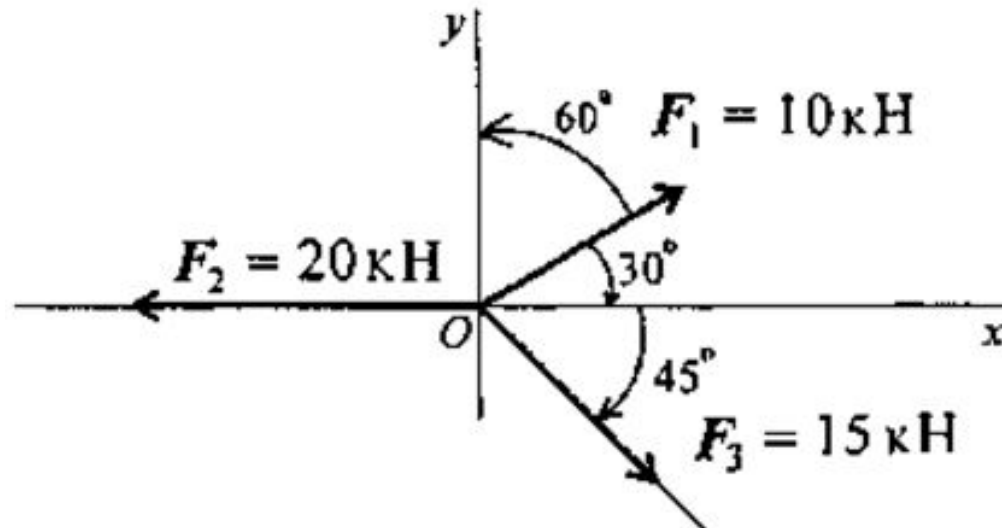
$$F_{4x} = F_4 \cos(-\alpha_4) = F_4 \cos \alpha_4 > 0$$

$$F_{4y} = F_4 \cos(180^\circ + \beta_4)$$

$$F_{4y} = -F_4 \cos \beta_4 < 0$$

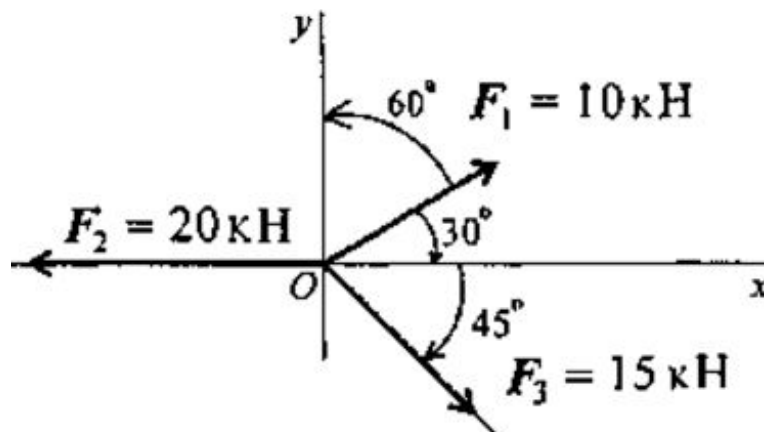
# Задача 4

Определить величину и направление равнодействующей плоской системы сил аналитическим способом



# Решение

## Проекция сил системы на ось X



$$F_{1x} = F_1 \cos 30^\circ$$

$$F_{1x} = 10 \cdot 0.866 = 8.66 \text{ кН}$$

$$F_{2x} = F_2 \cos 180^\circ$$

$$F_{2x} = 20 \cdot (-1) = -20 \text{ кН}$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 45^\circ$$

$$F_{3x} = 15 \cdot 0.707 = 10.6 \text{ кН}$$

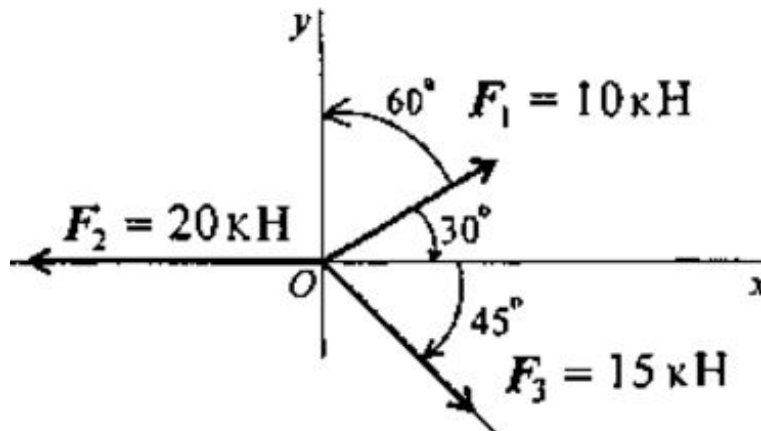
## Проекция равнодействующей на ось X

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$F_{\Sigma x} = 8.66 - 20 + 10.6 = -0.735$$

направлена  
влево

## Проекция сил системы на ось Y



$$F_{1y} = F_1 \cos 60^\circ$$

$$F_{1y} = 10 \cdot 0.5 = 5 \text{ кН}$$

$$F_{2y} = F_2 \cos 90^\circ = 0$$

$$F_{3y} = F_3 \cos 135^\circ$$

$$F_{3y} = -15 \cdot 0,707 = 10,6 \text{ кН}$$

## Проекция равнодействующей на ось Y

$$F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

$$F_{\Sigma y} = 5 - 10,6 = -5,6 \text{ кН}$$

направлена

вниз

Определяем модуль равнодействующей

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}$$

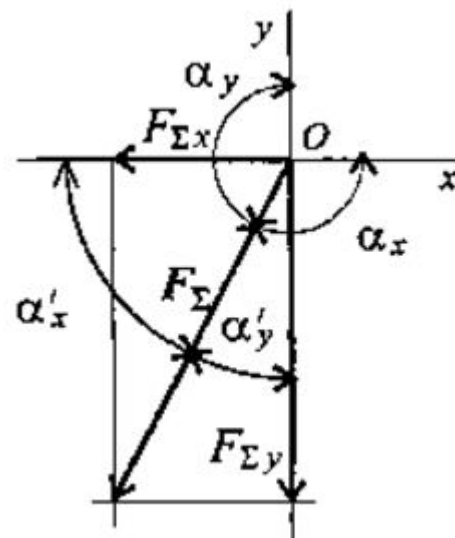
$$F_{\Sigma} = \sqrt{(-0,735)^2 + (-5,6)^2} = 5,65 \text{ кН}$$

Определяем значение углов  
равнодействующей с осями

$$\cos \alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}}, \cos \alpha_x = \frac{-0,735}{5,65} = -0,13$$

$$\cos \alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma}}, \cos \alpha_y = \frac{-5,6}{5,65} = -0,991$$

$$\alpha_x = 97^{\circ}30' \quad \alpha_y = 172^{\circ}30'$$



## Задача 5

Система трёх сил находится в равновесии. Известны проекции двух сил на взаимно перпендикулярные оси  $OX$  и  $OY$

$$F_{1x} = 10 \text{ кН}$$

$$F_{1y} = -2 \text{ кН}$$

$$F_{2x} = 5 \text{ кН}$$

$$F_{2y} = 6 \text{ кН}$$

Определить, чему равна и как направлена третья сила системы.