ВОЗВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ.ИЗВЛЕЧЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА.

РАБОТА ВЫПОЛНЕНА УЧЕНИКАМИ 10»В»:
МАЛАХОВЫМ ИВАНОМ,
ЕЛИСЕЕВЫМ НИКИТОЙ,
ШАРЫПИНЫМ ЕВГЕНИЕМ.

ТЕОРЕМА 1 (ФОРМУЛА МУАВРА)

$$Z^n = (\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha),\ n \in N$$

При возведении конкретного числа Z в квадрат произошло удвоение его аргумента, при возведении в куб – утроение аргумента , а при возведении в 7-ю степень аргумент увеличивается в 7 раз. Оказывается , подобное утверждение справедливо для любого комплексного числа и любой натуральной степени.

Для возведения комплексного числа в n-ю степень следует:

— модуль числа возвести в n-ю степень;

— аргумент числа умножить на n.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

а) $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^6$:

По формуле Муавра, $(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)^6 =$

$= \cos(15^\circ \cdot 6) + i\sin(15^\circ \cdot 6) = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ = i.$

б) $(\sqrt{3} - i)^{11}$.

Модуль числа $\sqrt{3} - i$ равен 2, а его аргумент равен $-\frac{\pi}{6}$. $\Rightarrow$

модуль числа $(\sqrt{3} - i)^{11}$ равен $2^{11} = 2048$, а $\arg\left((\sqrt{3} - i)^{11}\right) =$

$= -\frac{11\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi}{6}$. **Поэтому** $(\sqrt{3} - i)^{11} = 2048\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$

$= 2048\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = 1024(\sqrt{3} - i).$

СЛЕДСТВИЯ

Следствие 1. $(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = \rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha),\ n \in \mathbf{Z}.$

Следствие 2. $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha,\ n \in \mathbf{Z}.$

Следствие 3. Если модуль комплексного числа z равен единице, а его аргумент равен $\frac{2\pi}{m}$ $(m = 3, 4, 5, \ldots)$, то множество степеней $z^0, z^1, z^2, z^3, \ldots, z^{m-1}$ образует на комплексной плоскости множество вершин правильного m-угольника, вписанного в единичную окружность

КУБИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ

Определение. **Кубическим корнем** (или *корнем третьей степени*) из комплексного числа z называют комплексное число, куб которого равен z. Множество всех кубических корней из комплексного числа z обозначают $\sqrt[3]{z}$. *Извлечь кубический корень из комплексного числа z — это значит найти множество $\sqrt[3]{z}$.*

ТЕОРЕМА №2

$$\sqrt[3]{z} = \left\{ \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{3} \right) \middle| \, k = 0, 1, 2 \right\}.$$

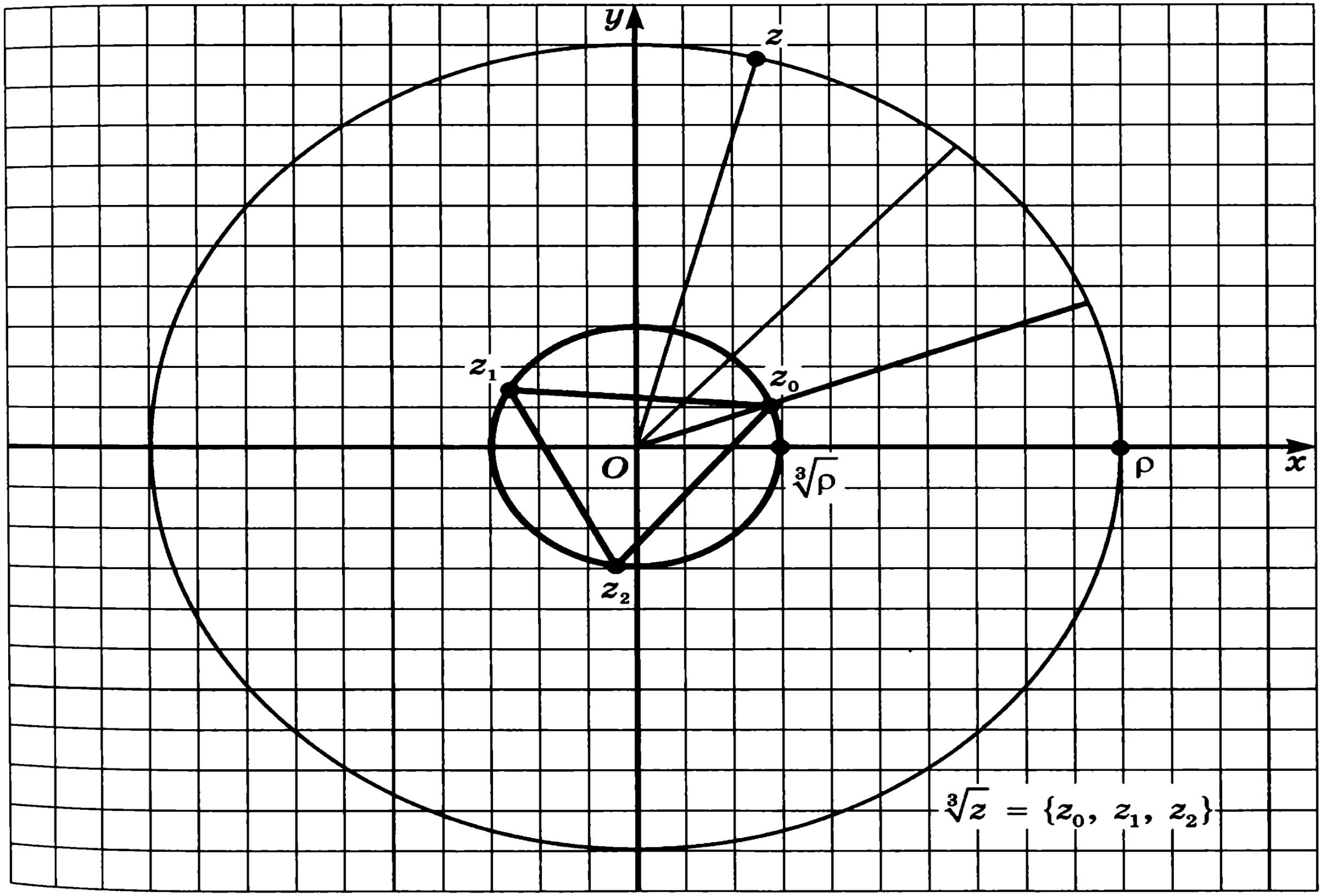
Для каждого ненулевого комплексного числа количество корней третьей степени из него равно трем.

Теорема 2 позволяет составить геометрический алгоритм извлечения кубического корня.

Алгоритм извлечения кубического корня из комплексного числа z

1. Найти модуль ρ и аргумент α этого числа.
2. Провести окружность радиусом $\sqrt[3]{\rho}$ с центром в начале координат.
3. Провести из начала координат луч под углом $\frac{\alpha}{3}$ к положительному направлению оси абсцисс.
4. Найти точку z_0 пересечения окружности и луча.
5. Построить правильный треугольник, вписанный в окружность, одна из вершин которого равна z_0.

Вершины треугольника образуют множество всех корней 3-й степени из числа z



y
z
z_1
z_0
O
$\sqrt[3]{\rho}$
ρ
x
z_2
$\sqrt[3]{z} = \{z_0, z_1, z_2\}$