

Начертательная геометрия

ЛЕКЦИЯ №7

Пересечение поверхности плоскостью общего положения

Линия пересечения поверхности с плоскостью является *линией*, одновременно принадлежащей поверхности и секущей плоскостью. Поэтому необходимо построить точки и линии, которые *одновременно принадлежат* поверхности и плоскости.

Замкнутая фигура, образованная линией пересечения поверхности тела секущей плоскостью, которая называется *сечением*.

Линия пересечения строится с использованием метода *секущих плоскостей – посредников* или способом *перемены плоскостей проекций*.

Способ *перемены плоскостей проекций* используется для преобразования плоскости общего положения в плоскость частного положения. В некоторых случаях это облегчает решение задачи.

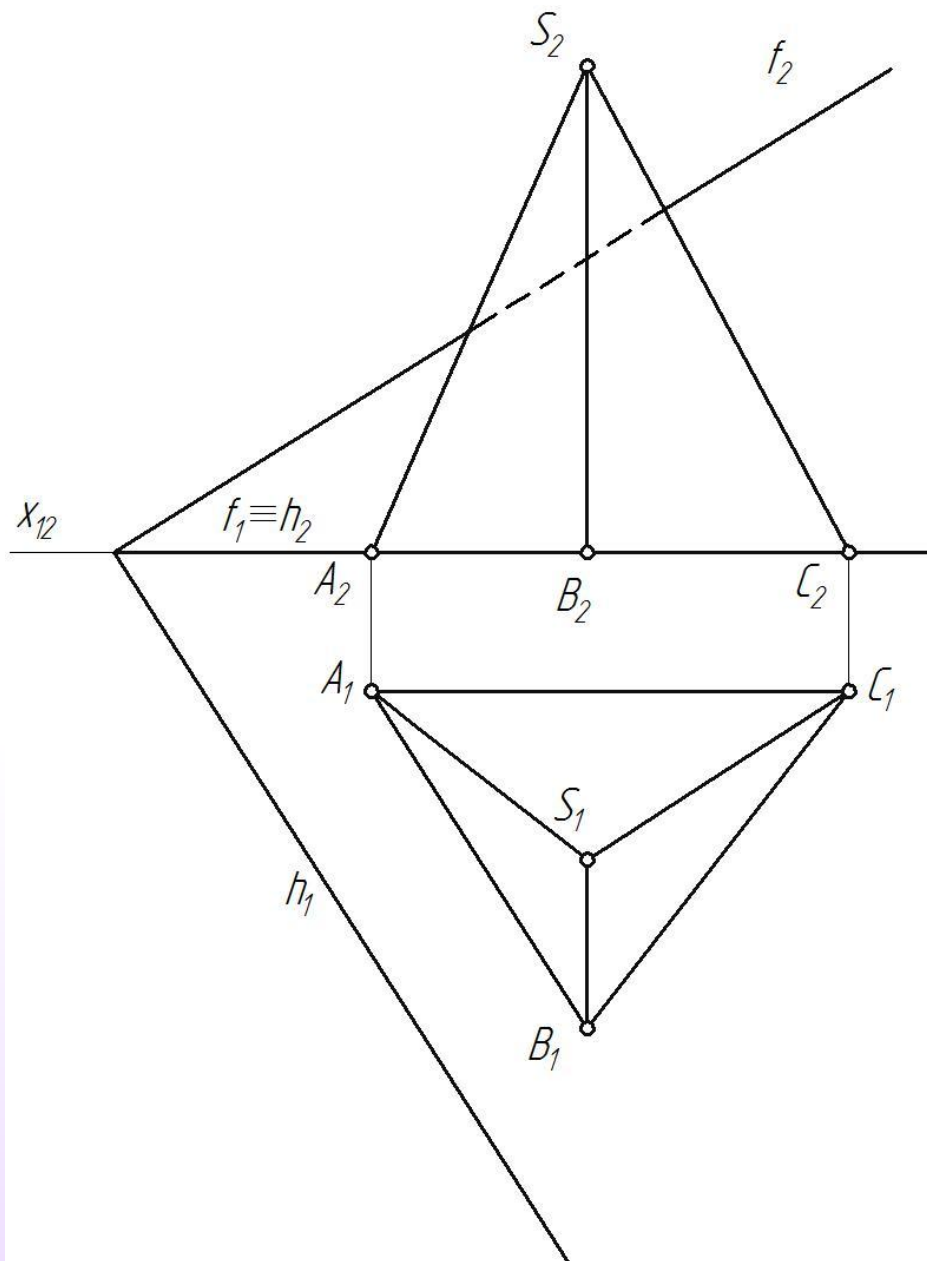
Пересечение

многогранников плоскостью

общего положения.

При сечении многогранника плоскостью образуется **ломанная линия**.

Проекциями сечения многогранников, в общем случае являются **многоугольники**, вершины которых принадлежат **ребрам**, а стороны — **граням** многогранника.

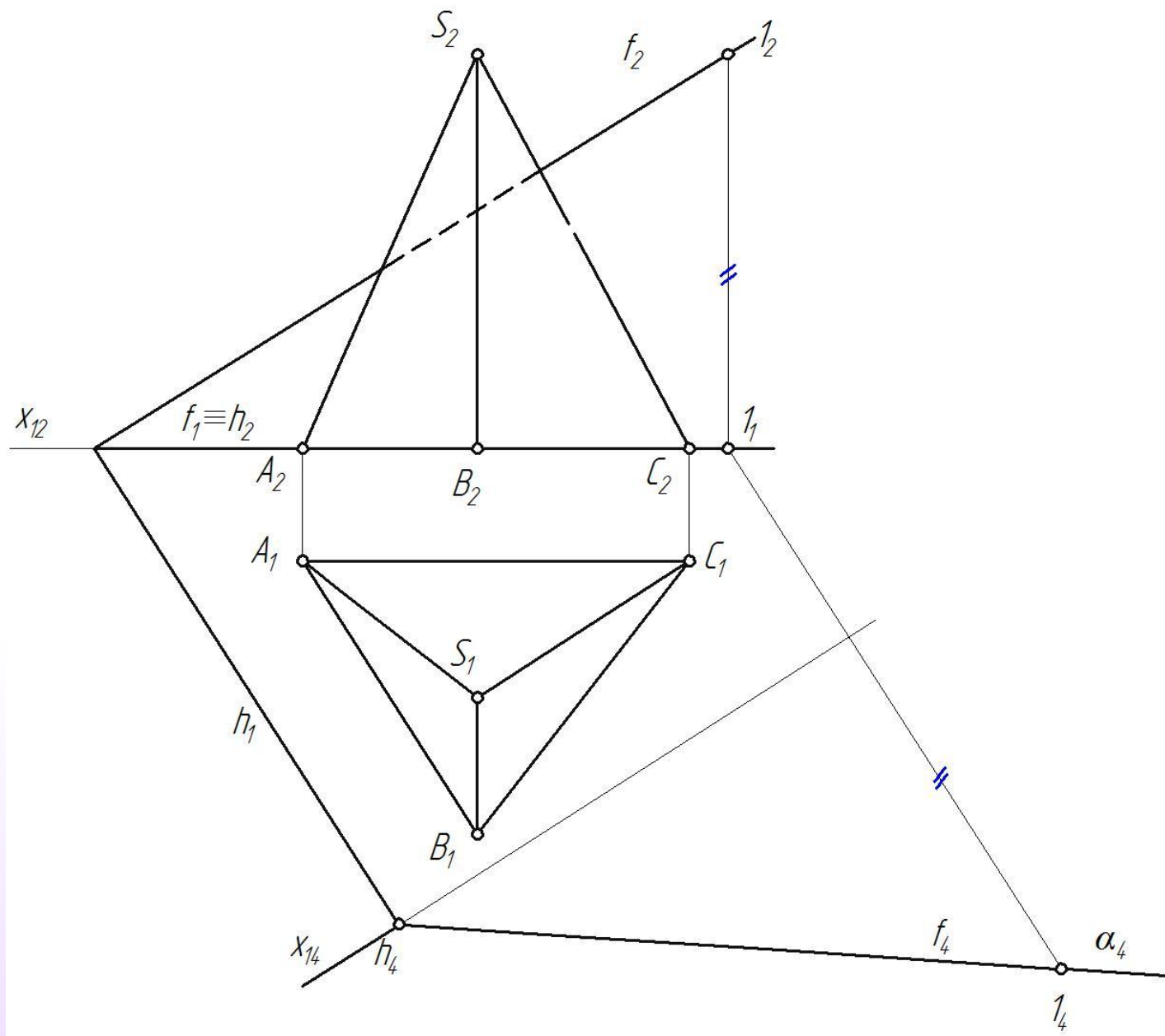


Задача 1

Пирамида $\Phi\{SABC\}$ и плоскость α
 (h,f)

$m = \Phi \cap \alpha$; $m \{M, N, K\}$ - ?

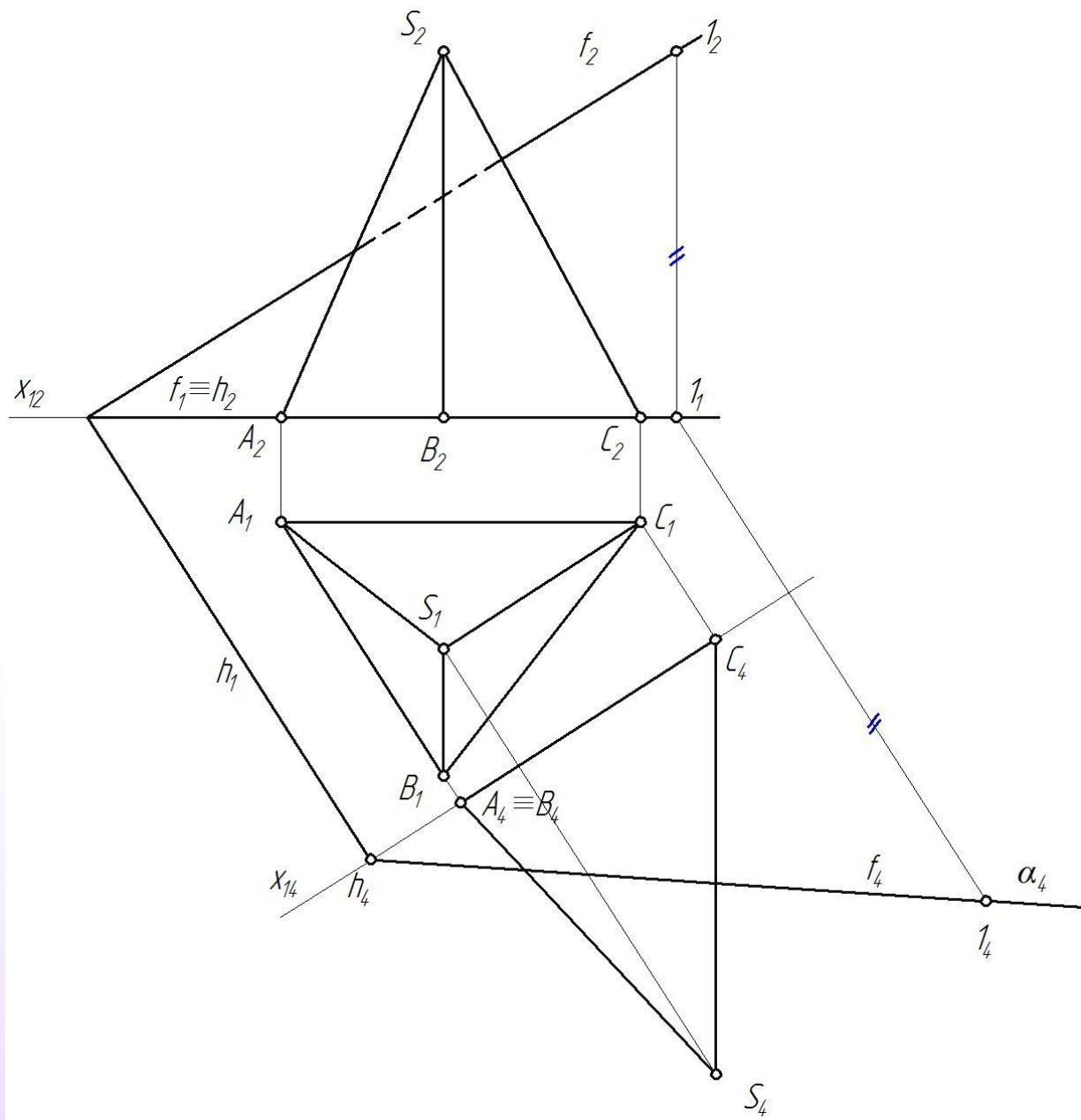
Ребро SB – профильная прямая.



Введем плоскость Π_4

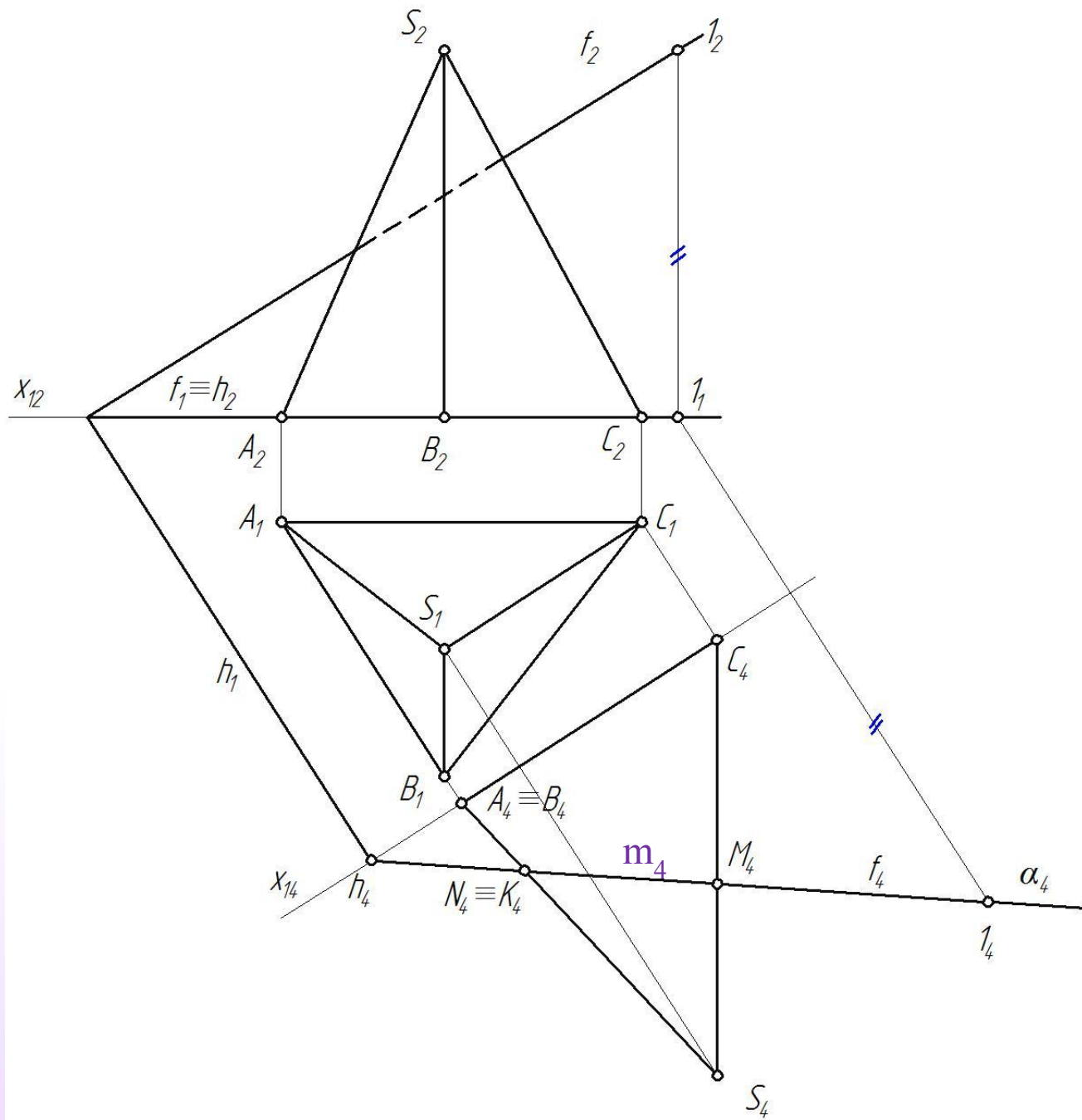
$$\Pi_4 \perp \Pi_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_4 \perp \alpha \end{array} \right\}$$



Построим пирамиду $\Phi\{SABC\}$ на плоскости Π_4 .

Ребро SB – прямая общего положения.



$$m = \Phi \cap \alpha;$$

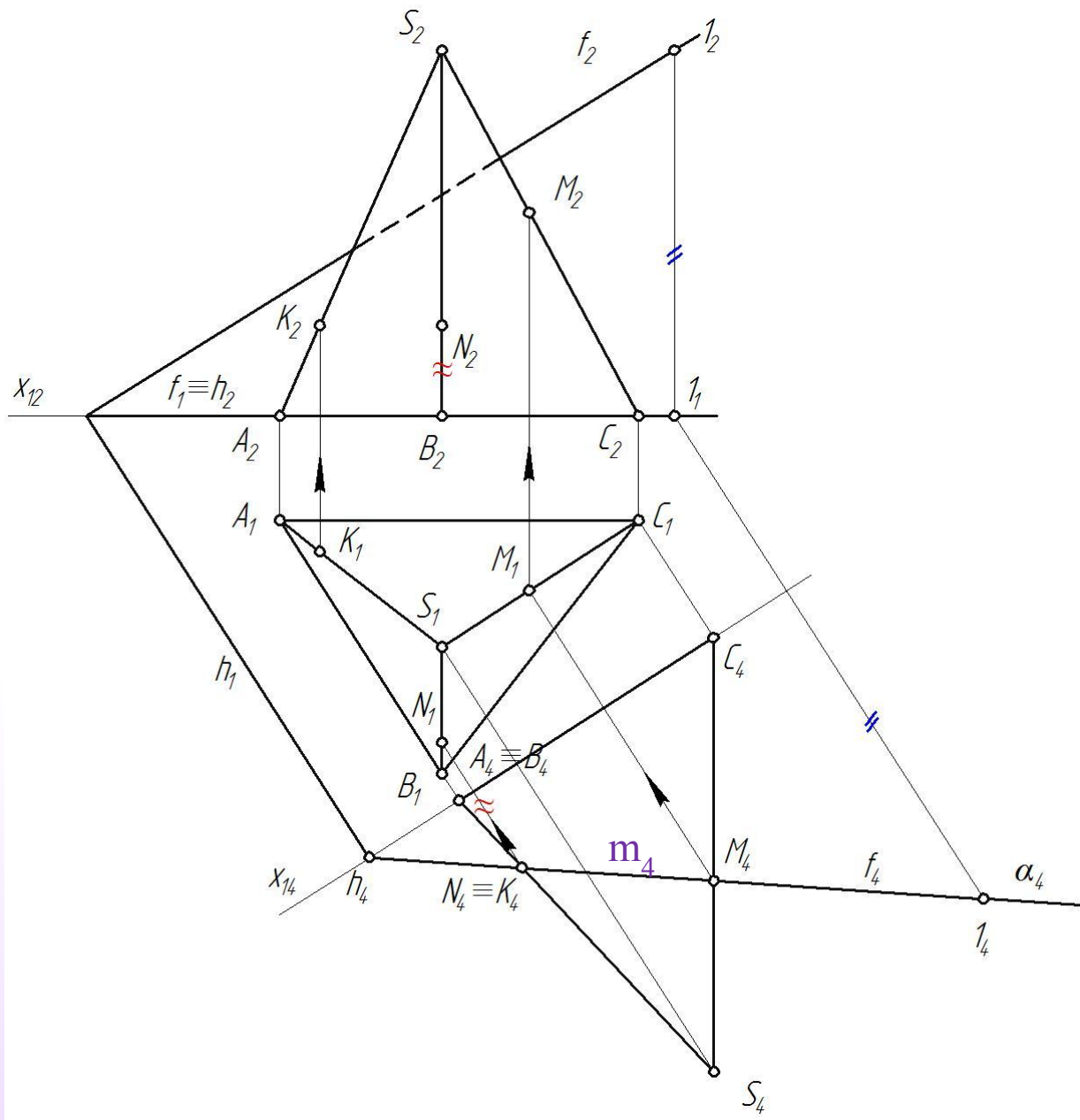
$$\alpha \perp \Pi_4 \Rightarrow \alpha_4 \equiv m_4$$

$$m \{M, N, K\}$$

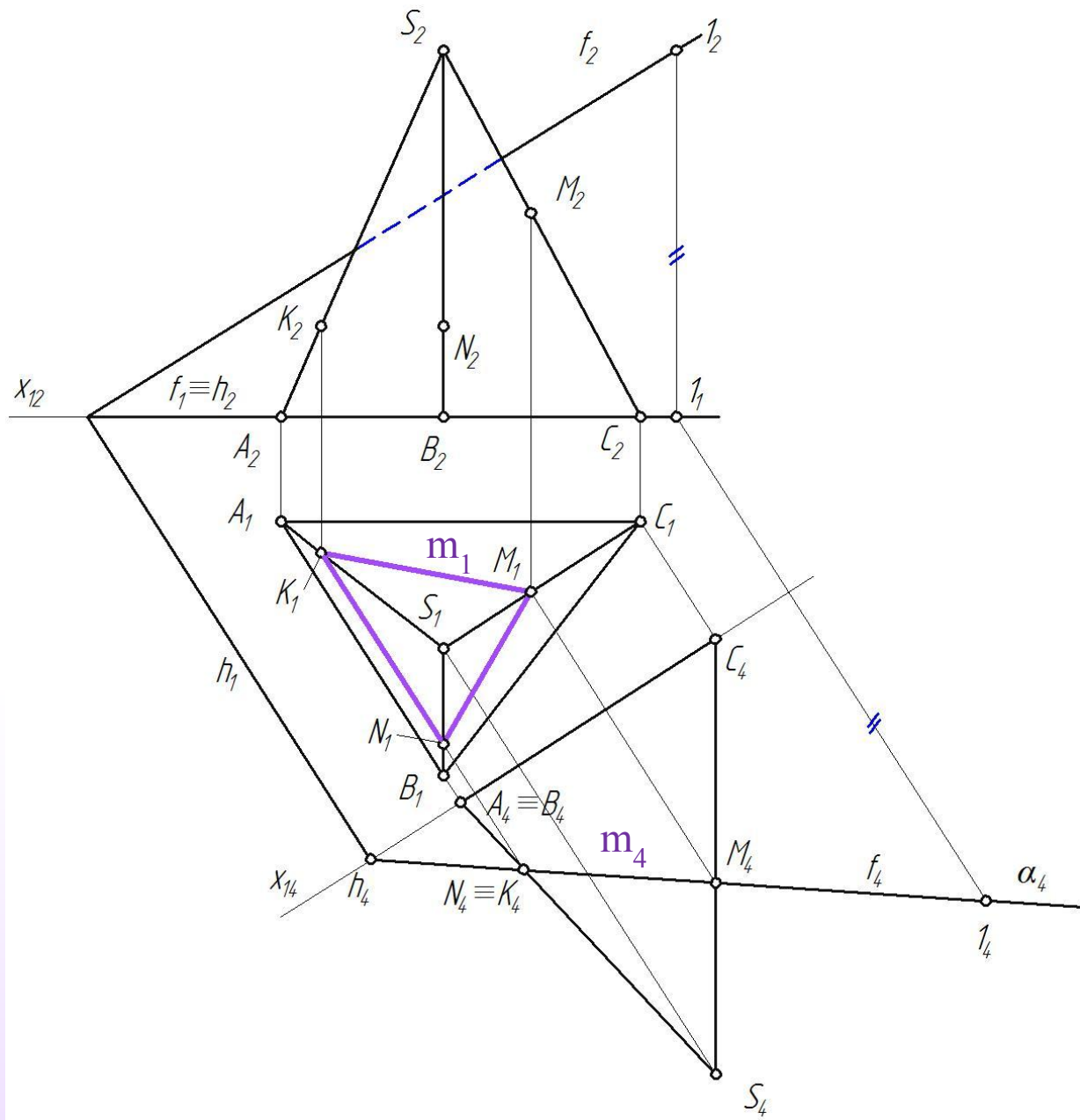
$$K = AS \cap \alpha;$$

$$M = CS \cap \alpha;$$

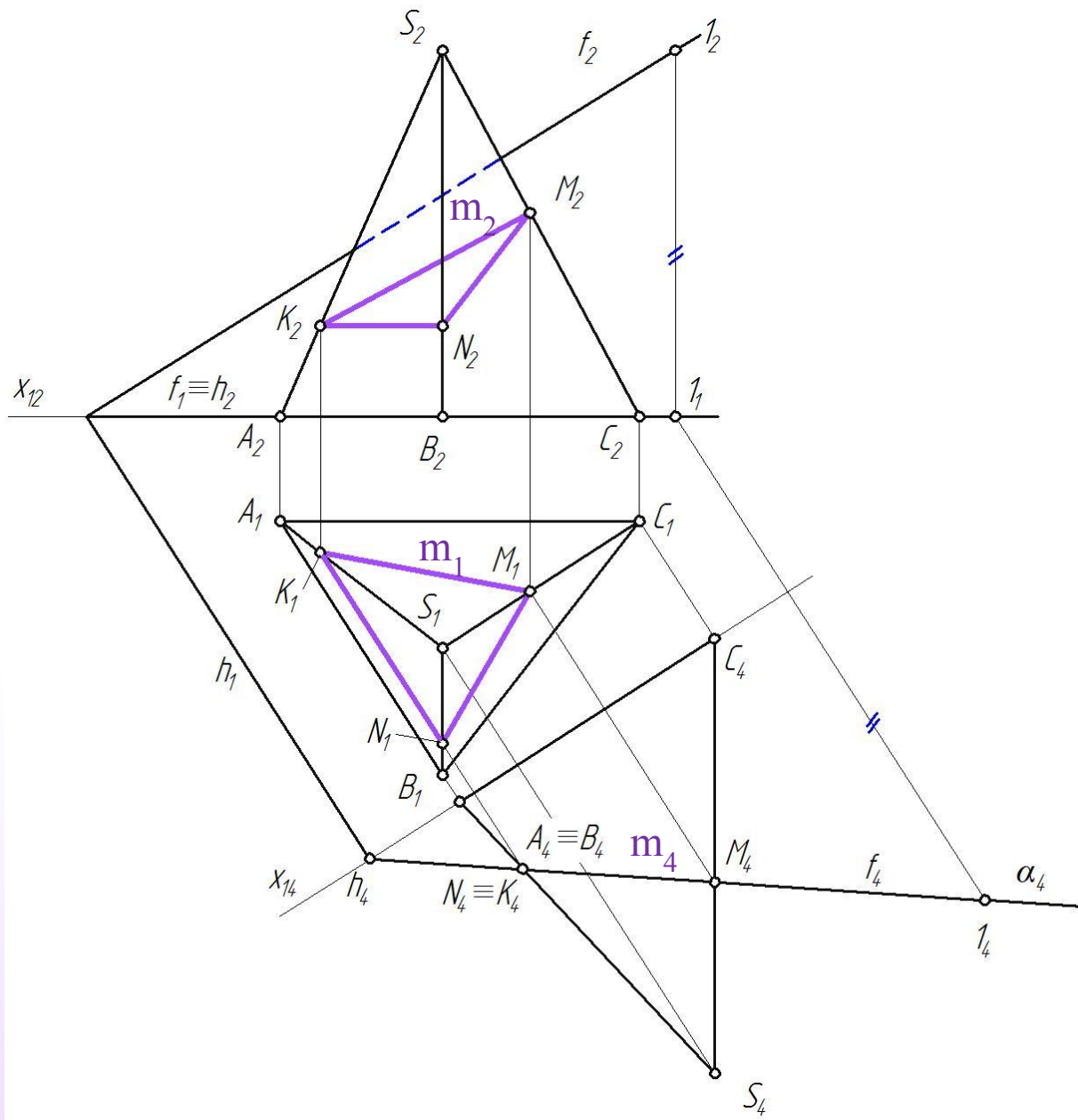
$$N = BS \cap \alpha$$



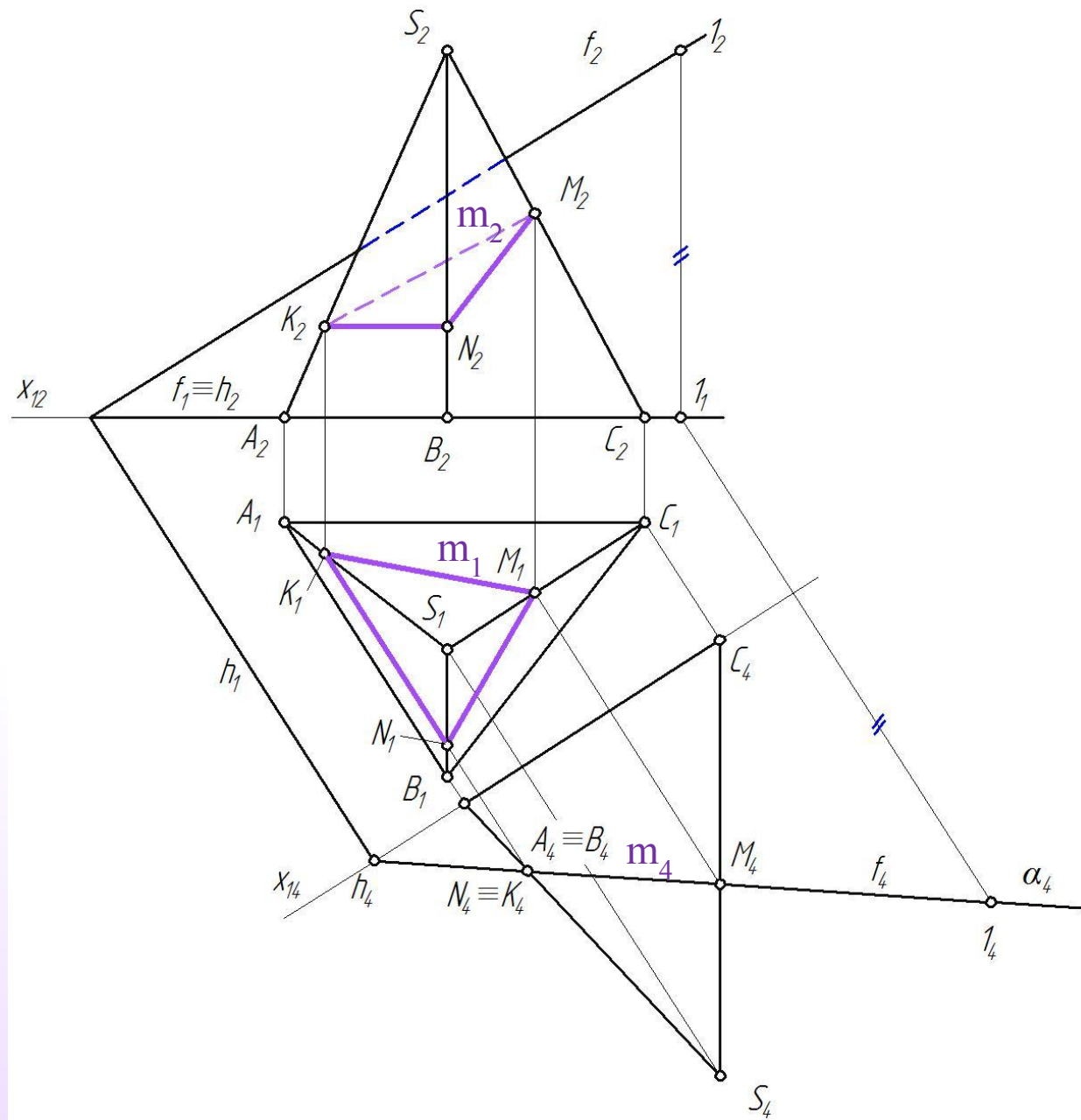
Проецируем
 точки
 пересечения
 $K = AS \cap \alpha$;
 $M = CS \cap \alpha$;
 $N = BS \cap \alpha$
 на Π_1 и Π_2



$m_1 \{M_1, N_1, K_1\}$



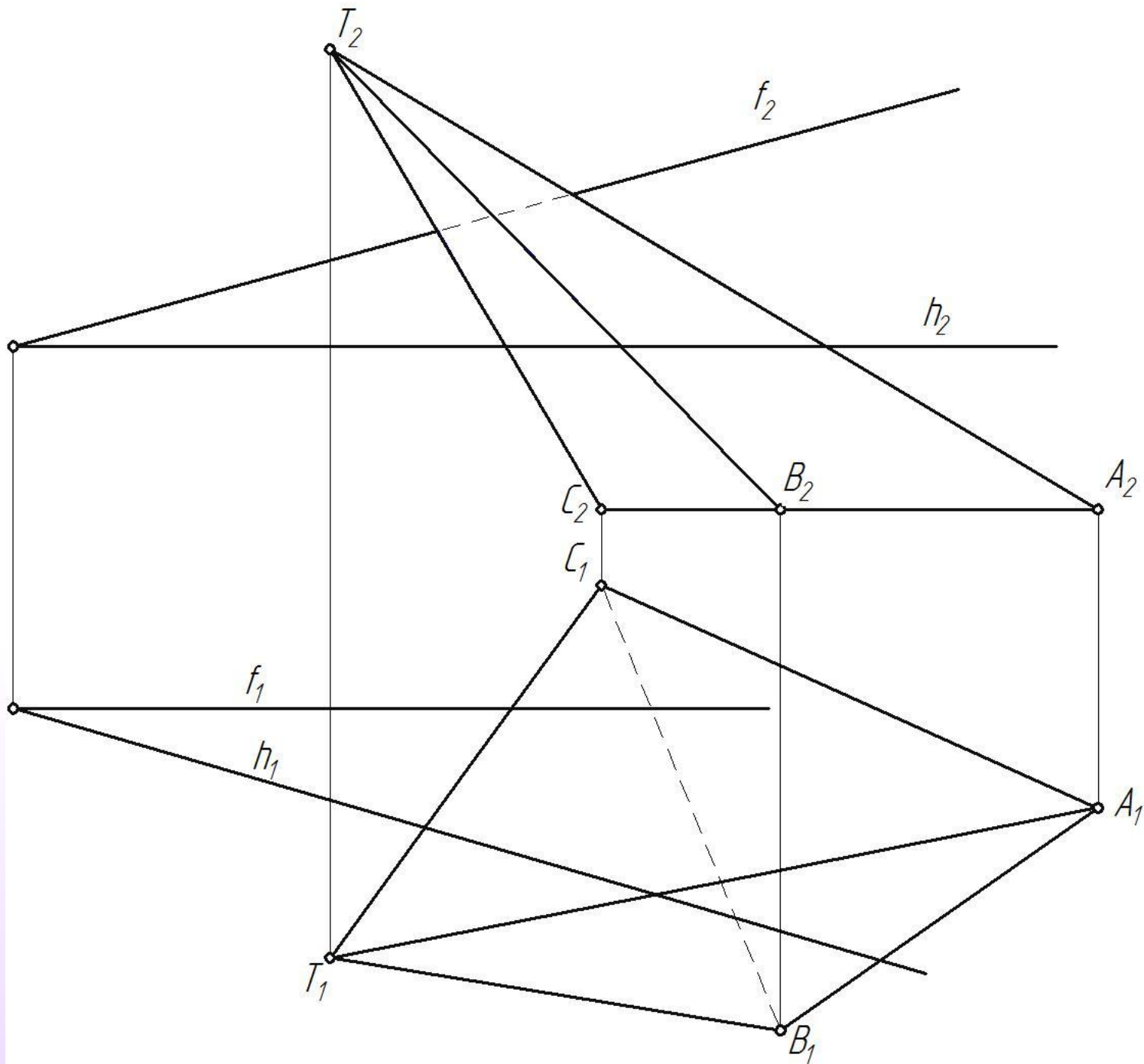
$m_2 \{M_2, N_2, K_2\}$



Определить видимость сечения

Задача по определению сечения многогранника сводится к многократному решению задач:

- **Определение точки пересечения прямой (*ребер многогранника*) с плоскостью.**
- **Нахождение линии пересечения двух плоскостей (*грани многогранника и секущей плоскости*).**

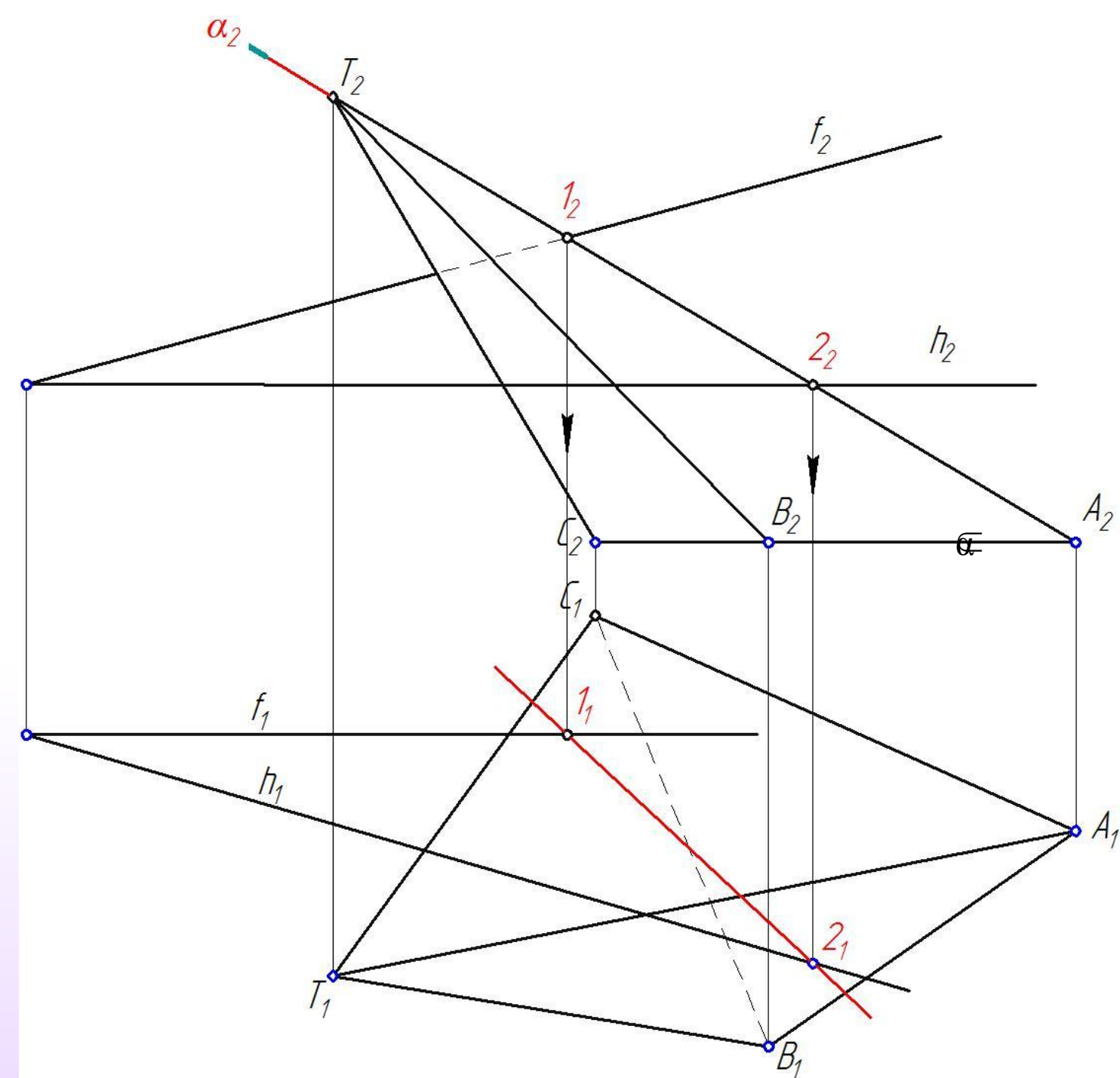


Задача 2

Пирамида $\Phi\{TABC\}$ и
плоскость $\delta(h,f)$

$$m = \Phi \cap \delta; \quad m \{M, N, L\} - ?$$

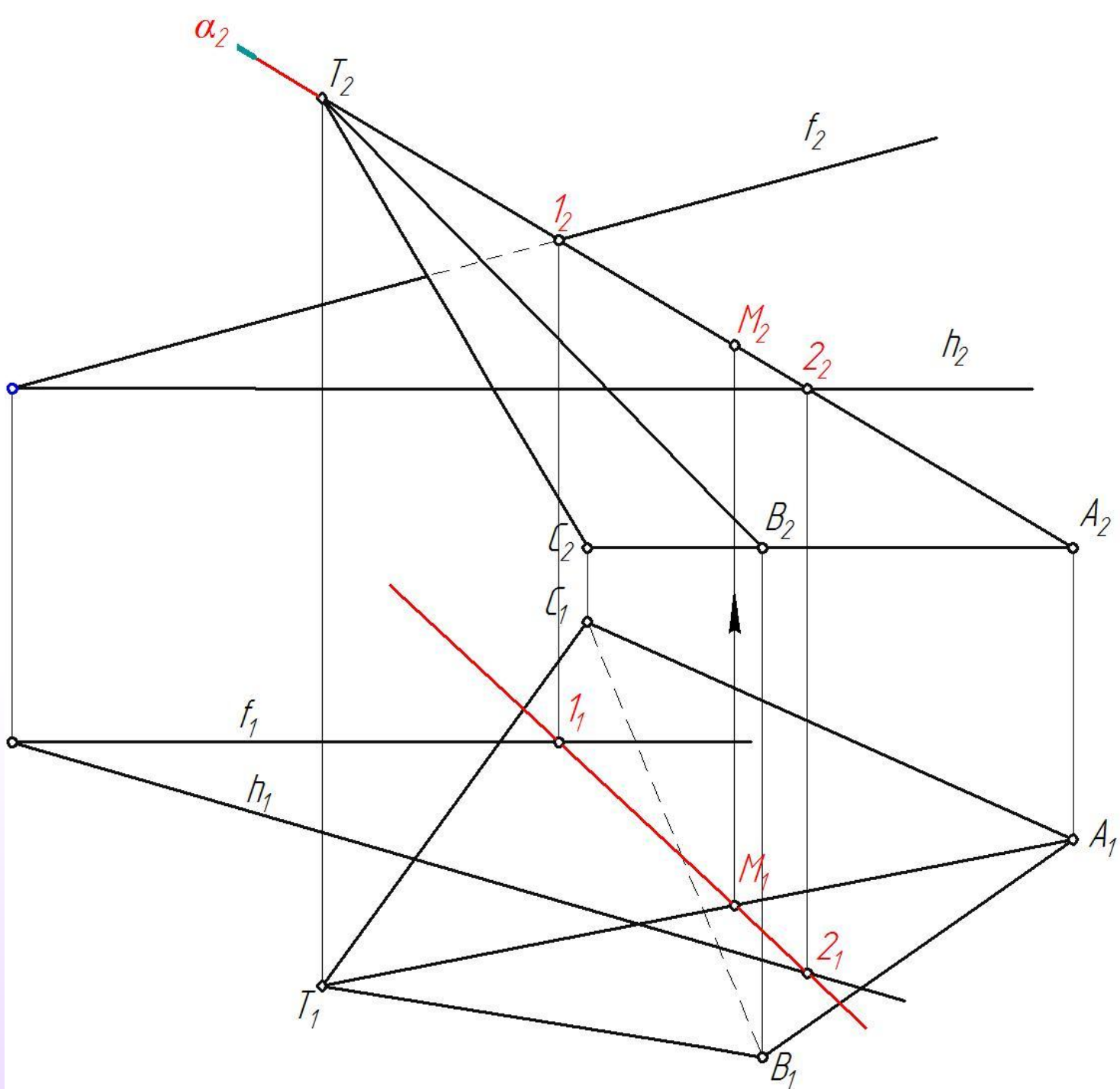
*Линия пересечения строится с
использованием метода
секущих плоскостей –
посредников*



1. Вводим плоскость – посредник α
 $\alpha \perp \Pi_2, (TA) \subset \alpha,$

2. Находим линию пересечения
 заданной плоскости δ и
 введенной плоскости α

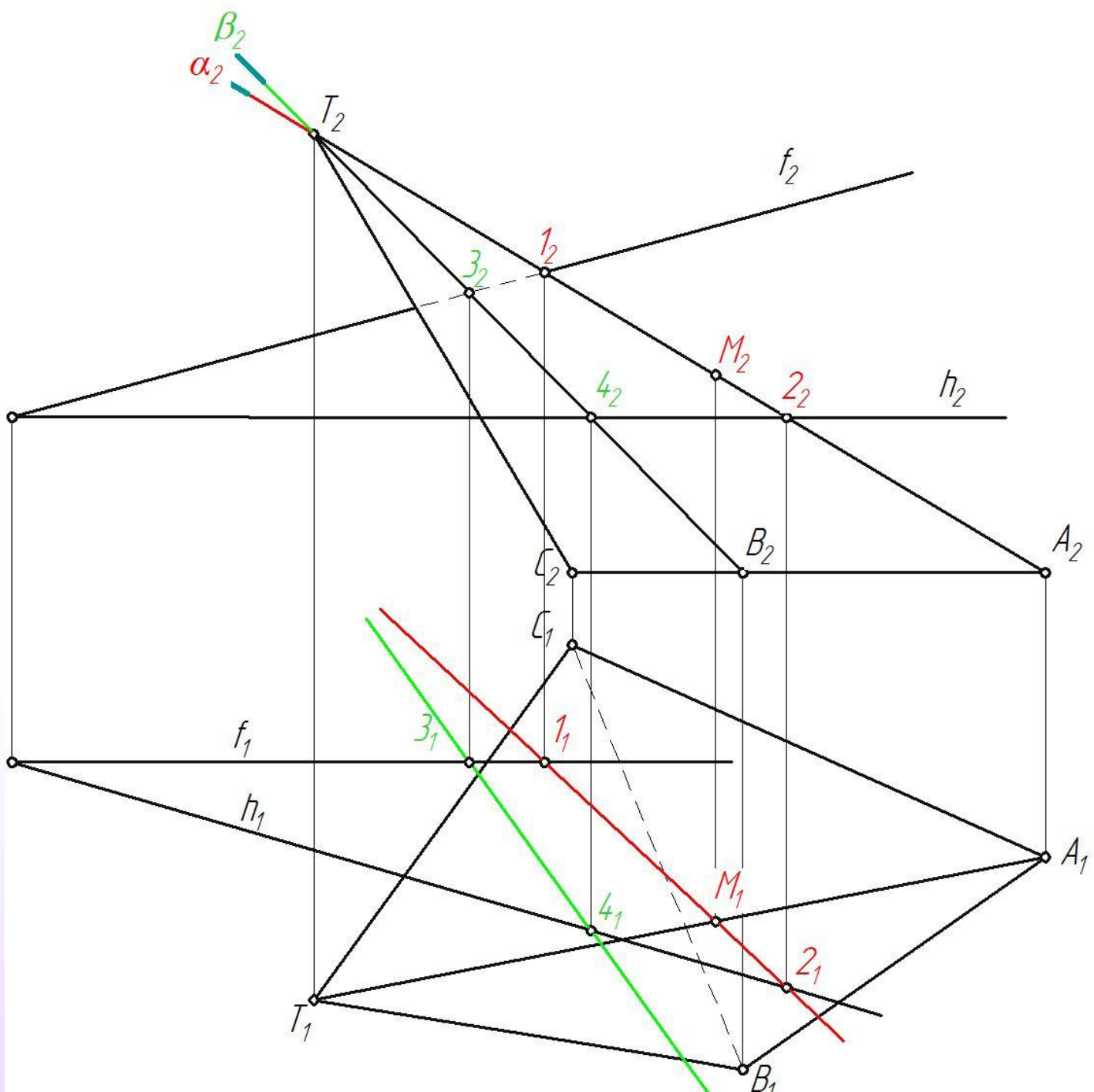
$$\alpha \cap \delta \equiv (12)$$



3. Точка пересечения построенной прямой (12) с ребром (ТА) есть первая точка линии пересечения

$$(12) \cap (ТА) \equiv M$$

Повторяем алгоритм еще два раза (по количеству ребер многогранника)

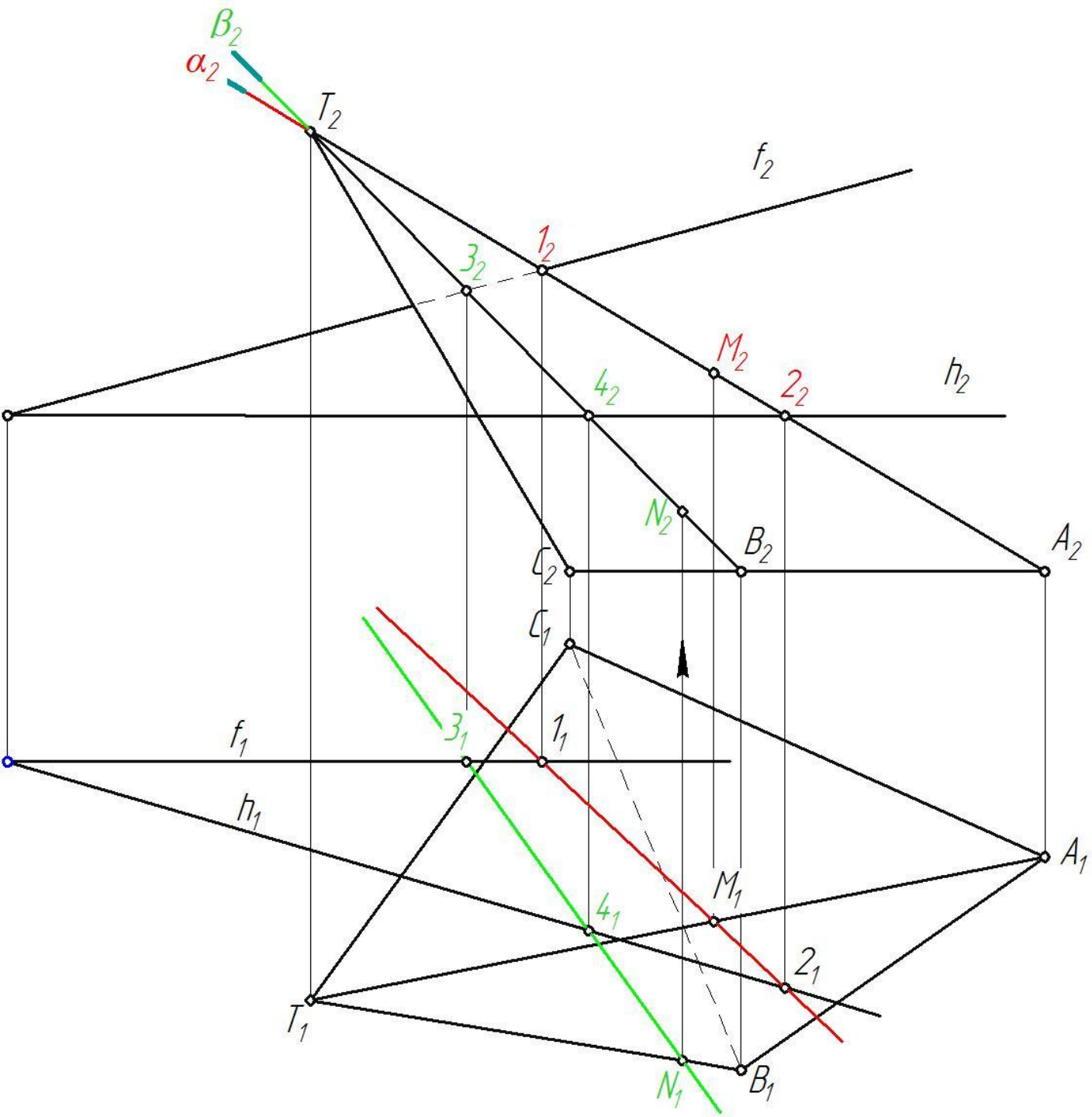


4. Вводим плоскость – посредник β

$$\beta \perp \Pi_2, (TV) \subset \beta,$$

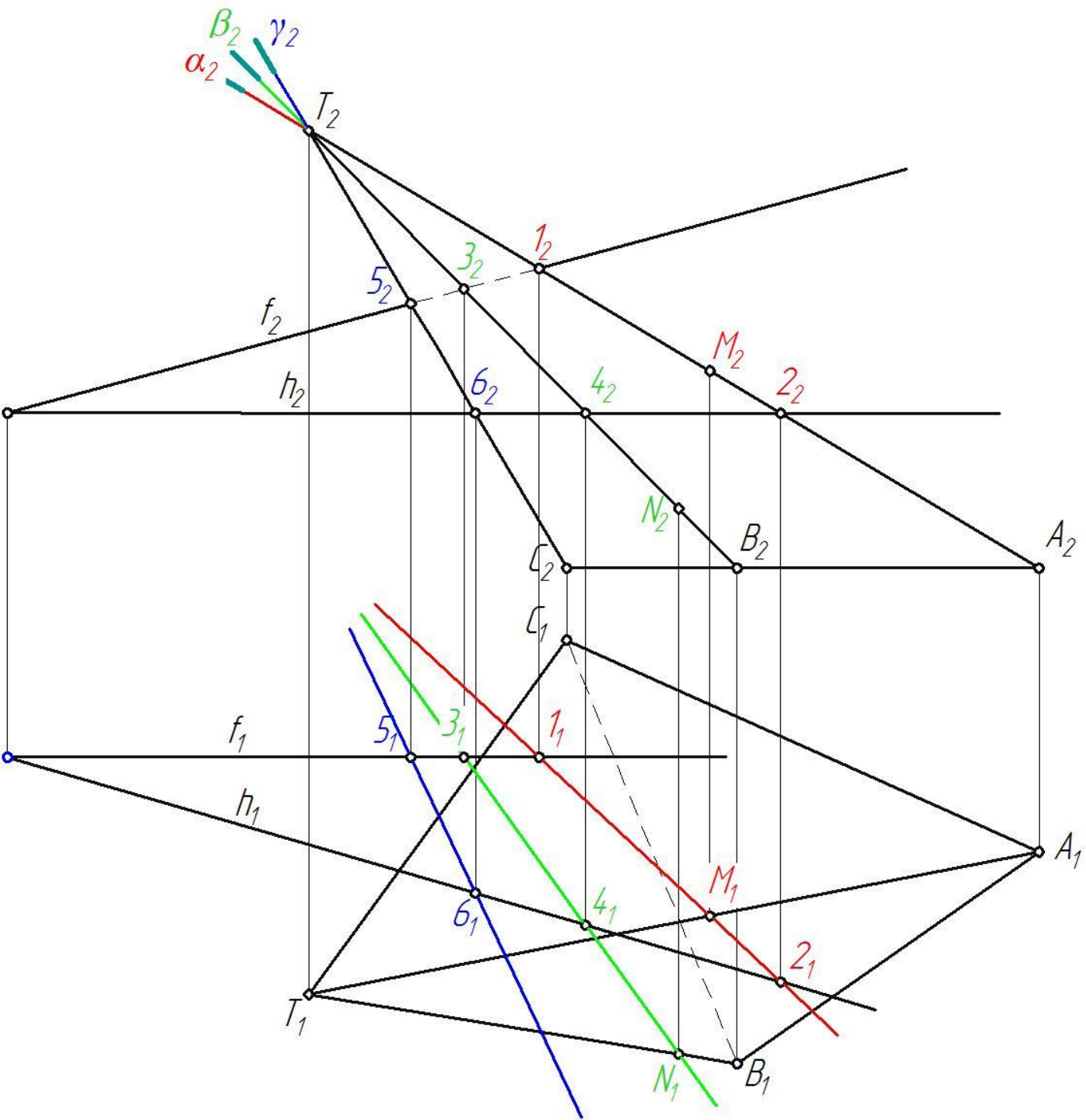
5. Находим линию пересечения
заданной плоскости δ и введенной
плоскости β

$$\beta \cap \delta \equiv (34)$$



6. Точка пересечения
 построенной прямой (34) с
 ребром (ТВ) есть точка линии
 пересечения

$$(34) \cap (TB) \equiv N$$

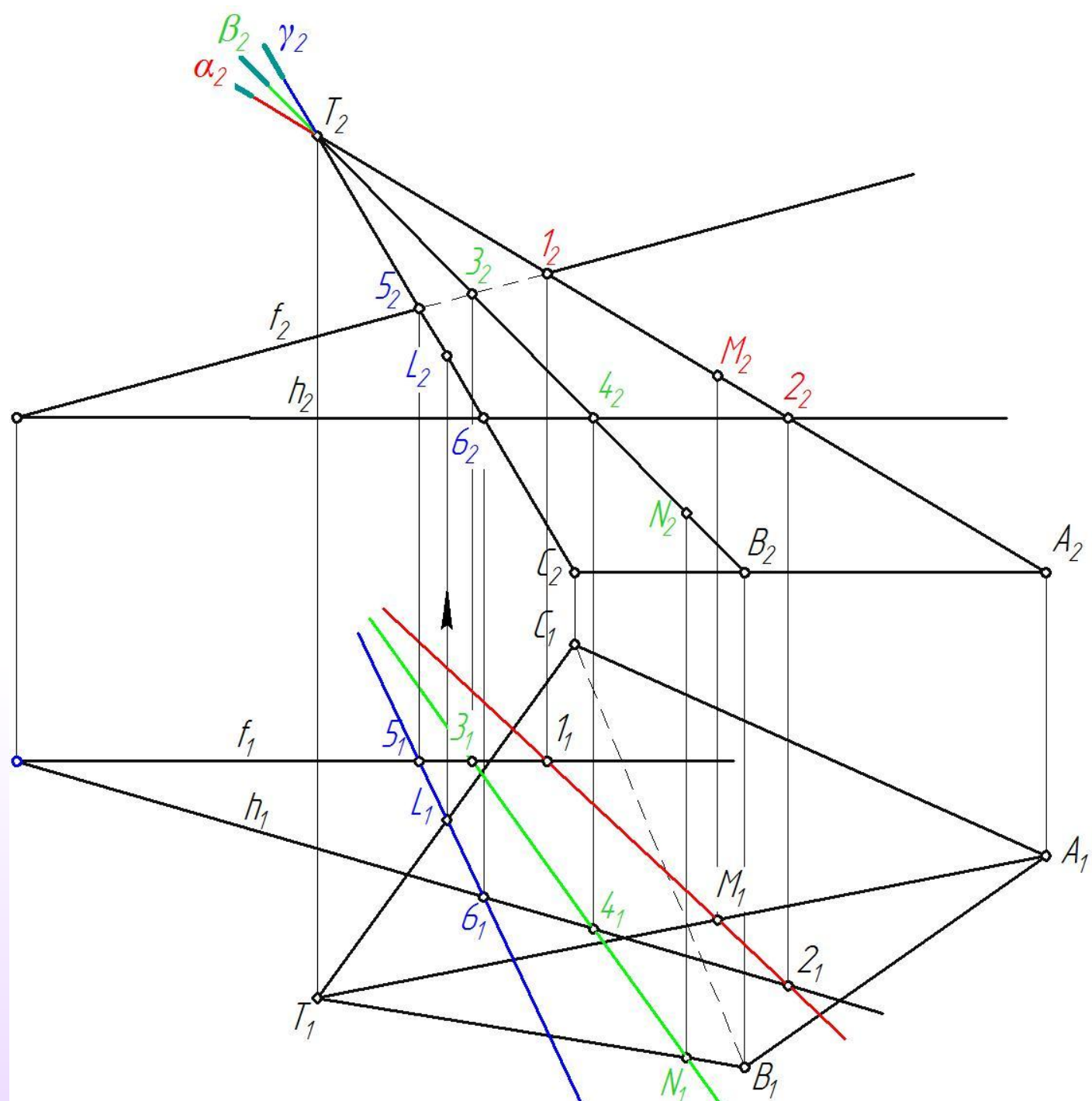


7. Вводим плоскость – посредник γ

$$\gamma \perp \Pi_2, (TC) \subset \gamma,$$

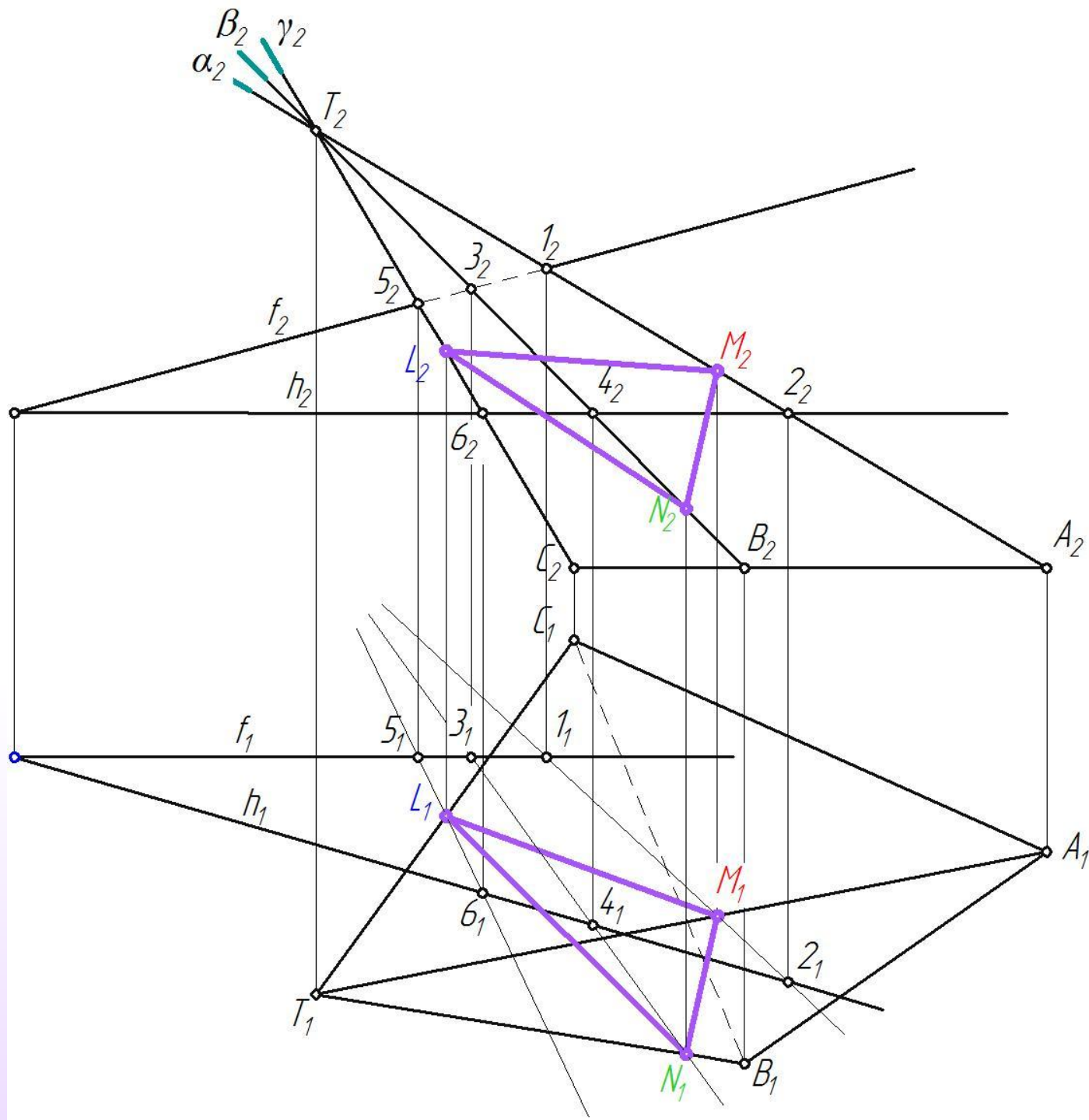
8. Находим линию пересечения заданной плоскости δ и введенной плоскости γ

$$\gamma \cap \delta \equiv (56)$$



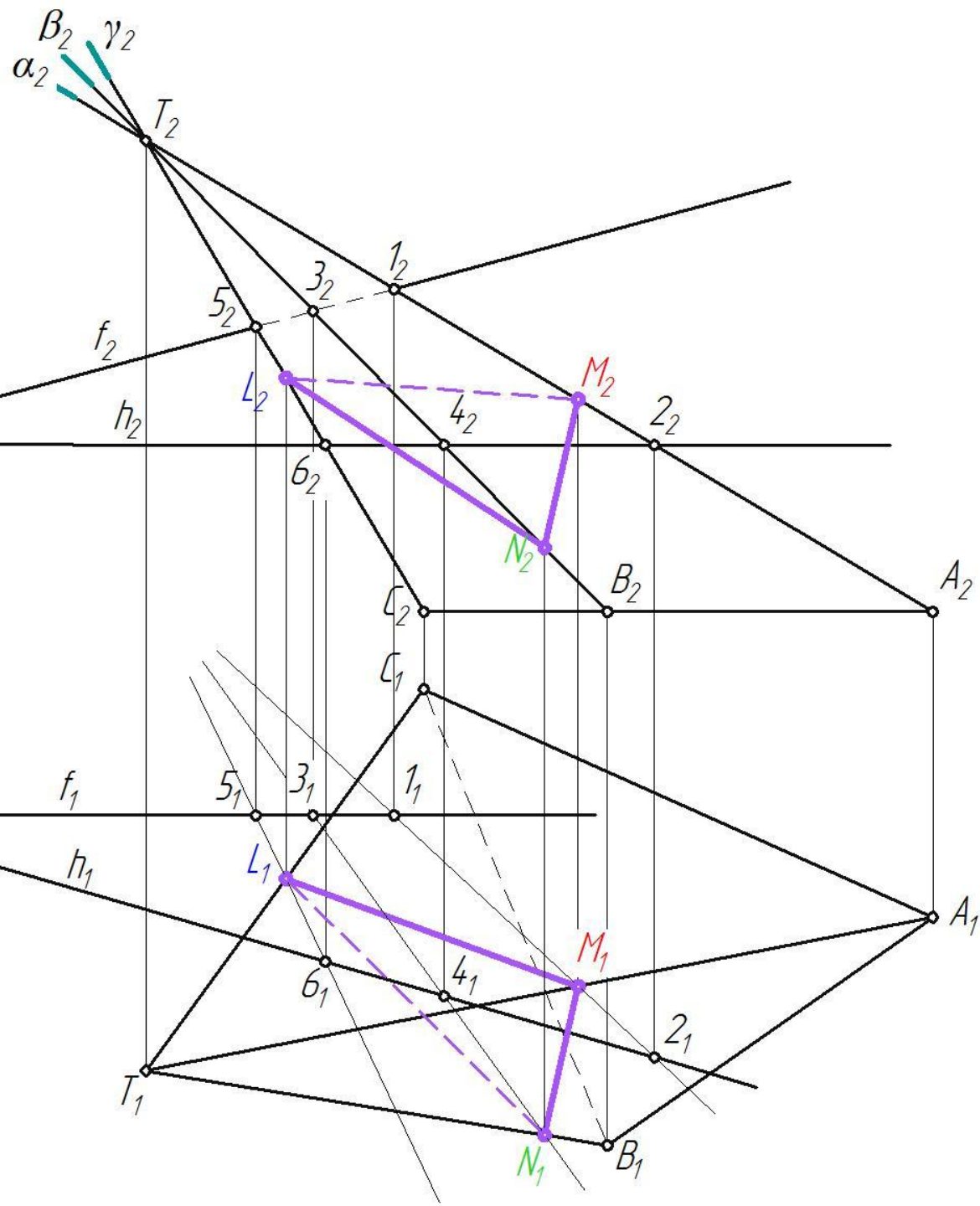
9. Точка пересечения построенной прямой (56) с ребром (ТС) есть точка линии пересечения

$$(56) \cap (ТС) \equiv L$$



10. Строим линию пересечения

$$m \equiv \Phi \cap \delta; \quad m \in \{M, N, L\}$$



Определяем видимость
 построенной линии пересечения
 $m \{M, N, L\}$

**Пересечение поверхностей
вращения плоскостью
общего положения.**

Алгоритм решения задач на пересечение поверхности с плоскостью общего положения

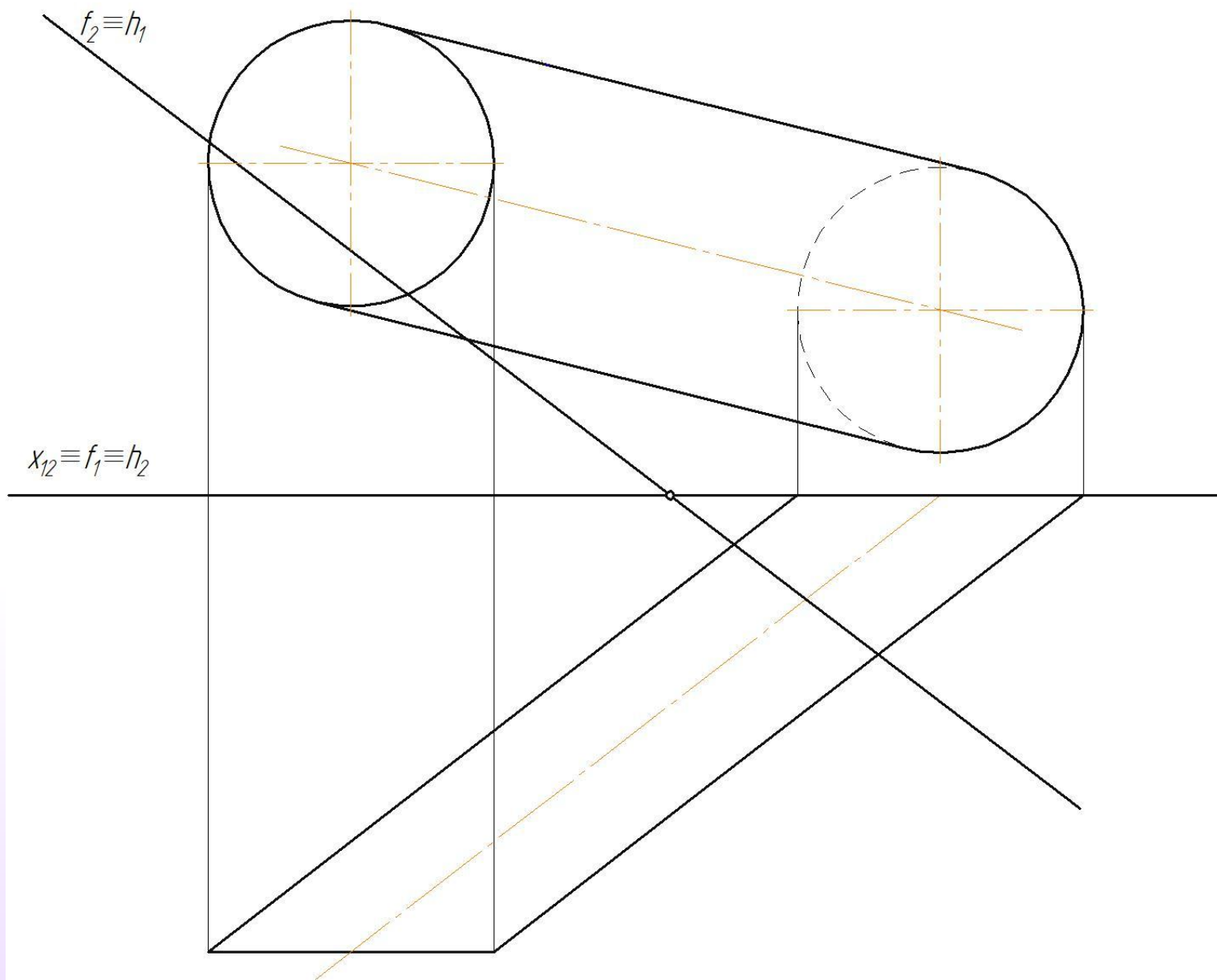
1. Образующую поверхности заключаем во вспомогательную плоскость – посредник γ .
2. Находим линию пересечения плоскости – посредника γ с заданной плоскостью α : $(12) = \alpha \cap \gamma$.
3. Отмечают точку, в которой построенная линия пересекается с образующей поверхности: $M \equiv (12) \cap a$.
4. Точка M , являясь общей для данных поверхности и плоскости будут точкой искомой линии пересечения.
5. Для построения линии пересечения необходимо найти еще ряд точек, используя плоскости – посредника.

Обе проекции искомой линии строятся в плоскостях Π_1 и Π_2 .

Количество точек, используемых для построения линии пересечения, определяется формой поверхности и точностью построения.

Но из всего множества точек линии пересечения **обязательно** должны быть построены следующие точки:

1. **Опорные точки** – точки расположенные на *очерковых образующих поверхности*. Эти точки определяют границы видимости проекции кривой.
2. Точки, определяющие **габариты фигуры сечения**;
3. Для уточнения линии пересечения строим **промежуточные точки**.

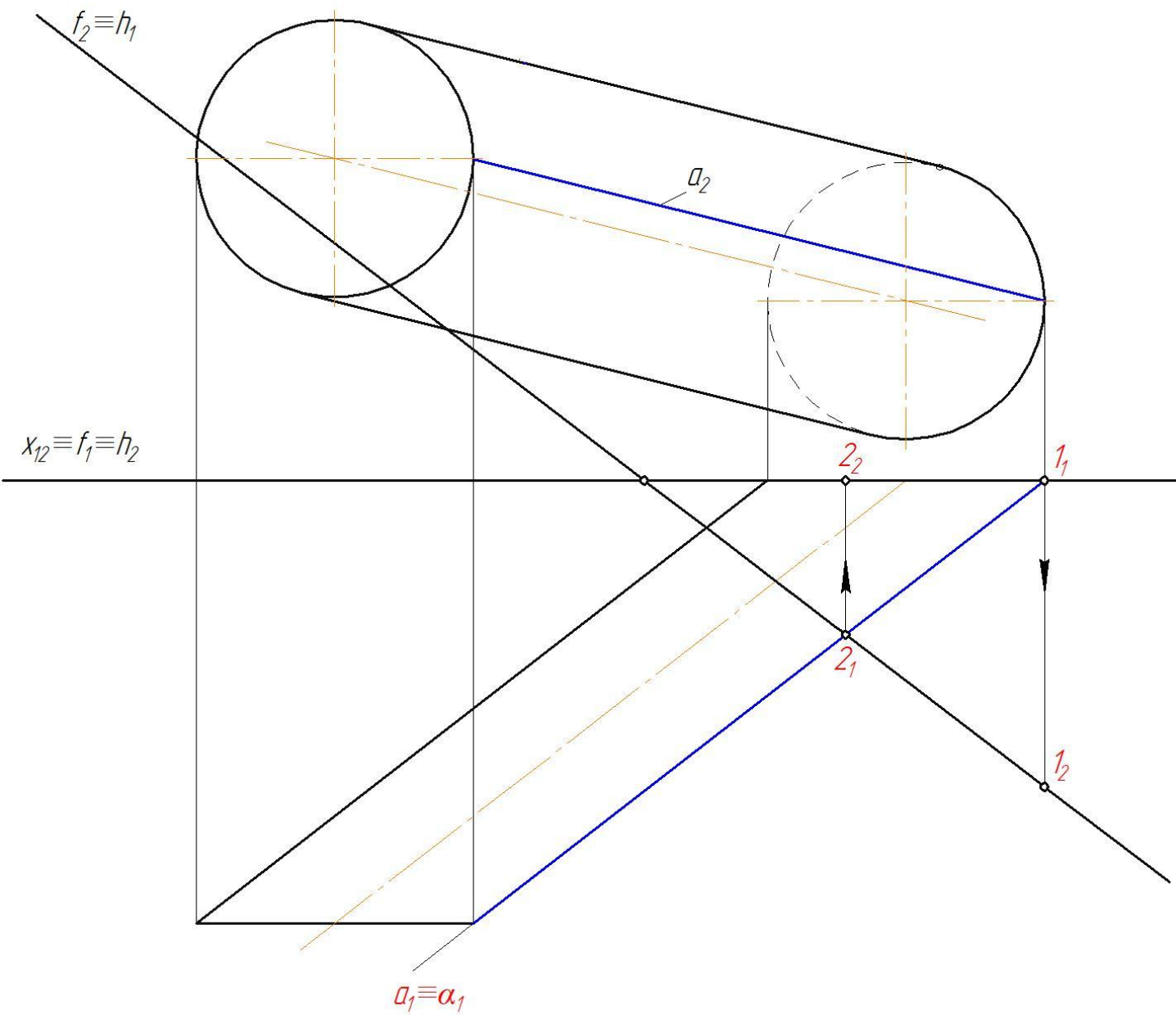


Задача 3

Цилиндр Φ и плоскость

$\gamma(h,f)$

$q = \Phi \cap \gamma - ?$

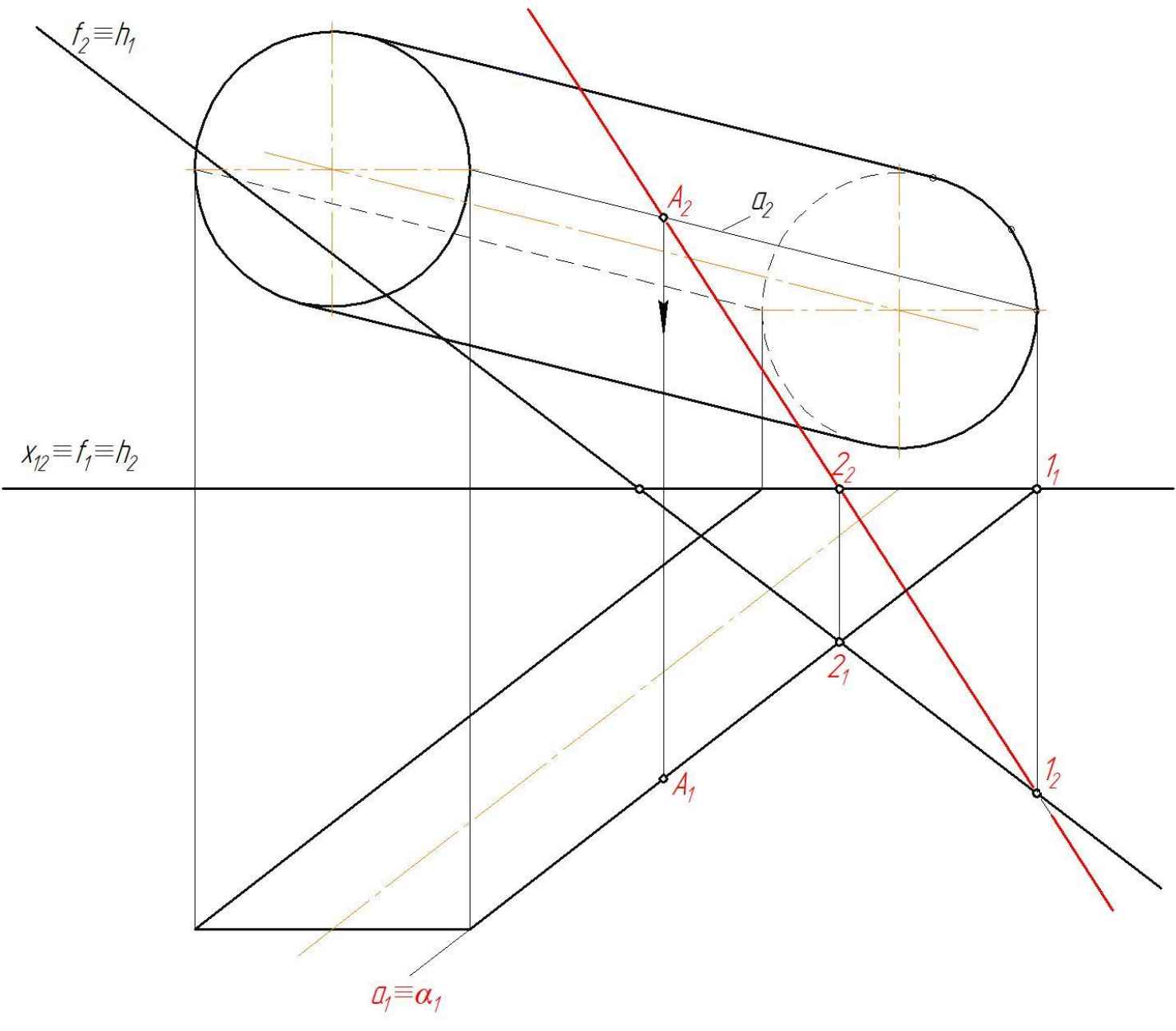


1. Образующую поверхности **a** заключаем во вспомогательную плоскость – посредник **α**.

$$\alpha \perp \Pi_1, a \subset \alpha,$$

Находим точки пересечения плоскости – посредника **α** с заданной плоскостью **γ**:

$$1, 2 = \alpha \cap \gamma.$$

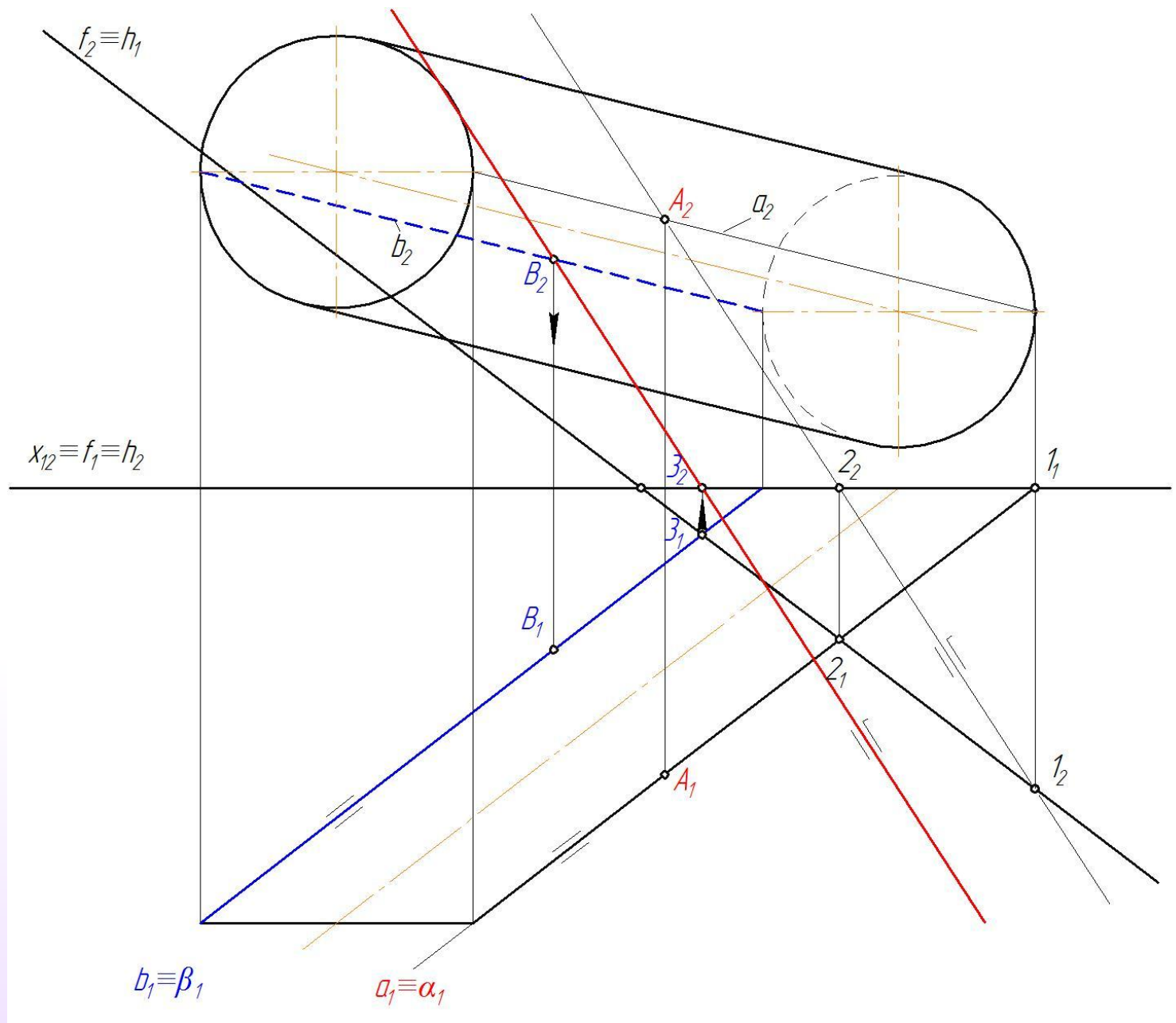


2. Находим линию пересечения плоскости – посредника α с заданной плоскостью γ :

$$(12) = \alpha \cap \gamma.$$

3. Отмечают точку, в которой построенная линия пересекается с образующей поверхности :

$$A \equiv (12) \cap a.$$

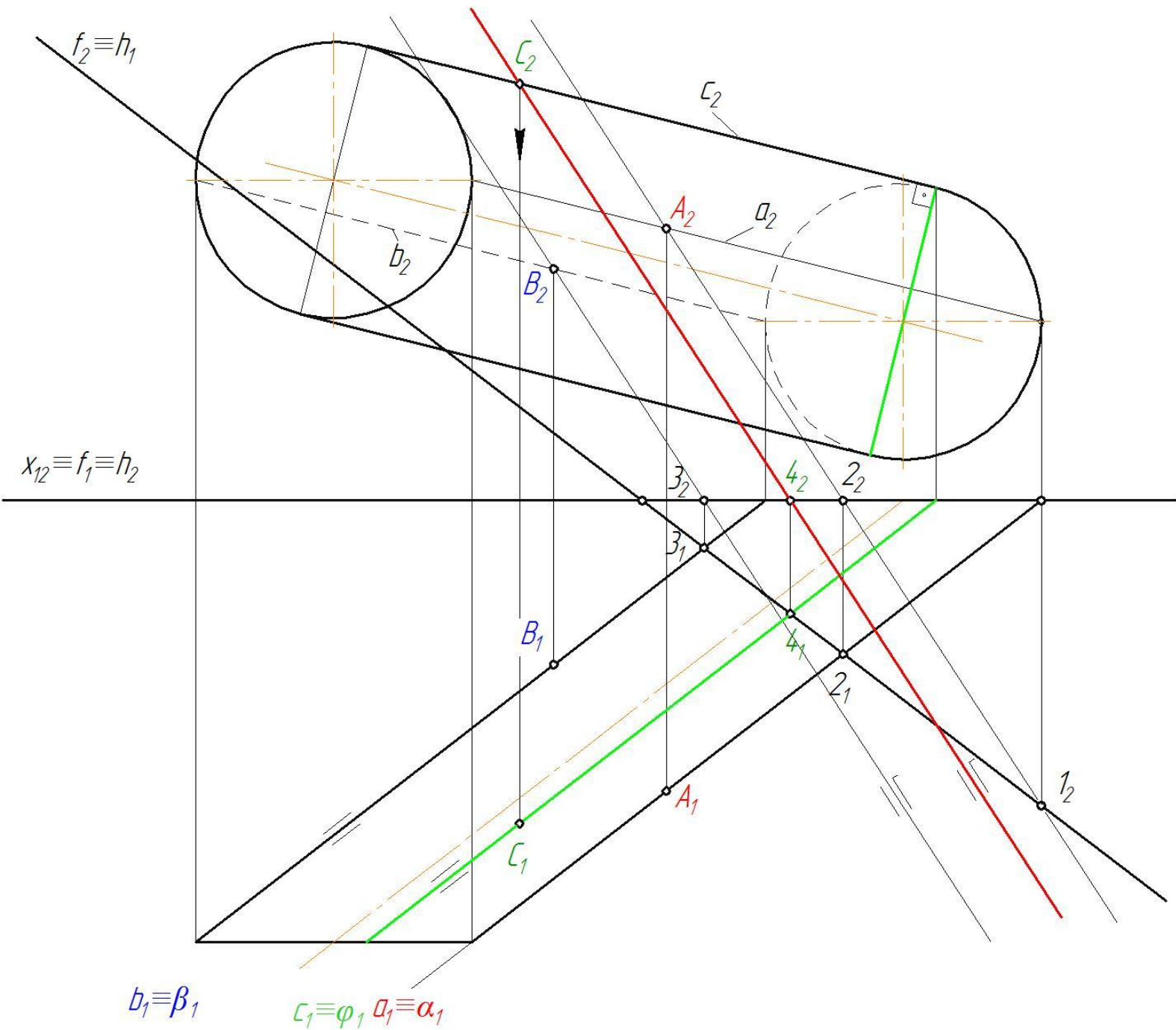


1. $\beta \perp \Pi_1, b \subset \beta,$

2. $(3) = \beta \cap \gamma.$

$\beta \parallel \alpha \Rightarrow (3) \parallel (12)$

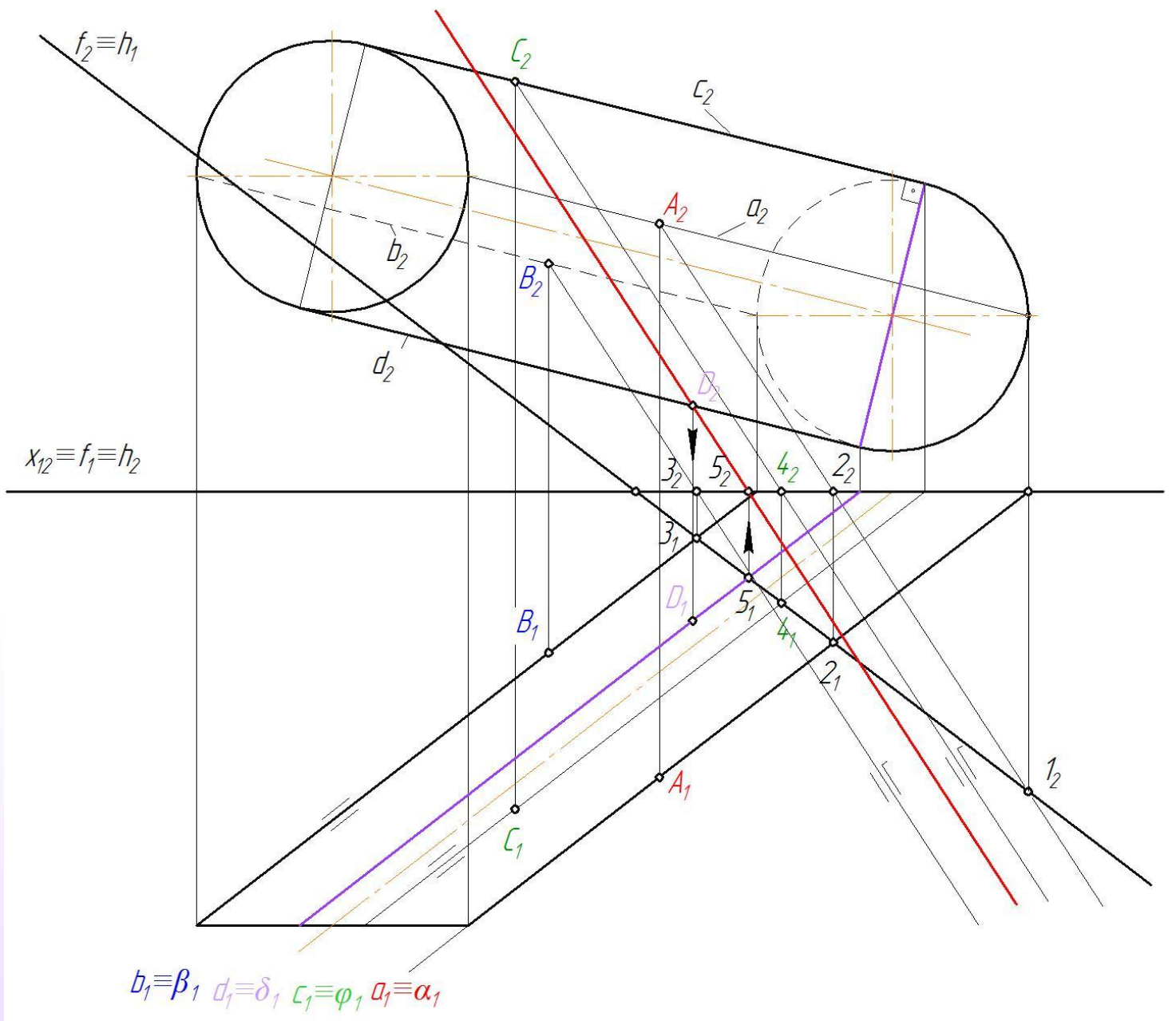
3. $B \equiv (3) \cap b.$



1. $\varphi \perp \Pi_1, c \subset \varphi,$

2. $(4) = \varphi \cap \gamma.$
 $\varphi \parallel \alpha \Rightarrow (4) \parallel (12)$

3. $C \equiv (4) \cap c.$



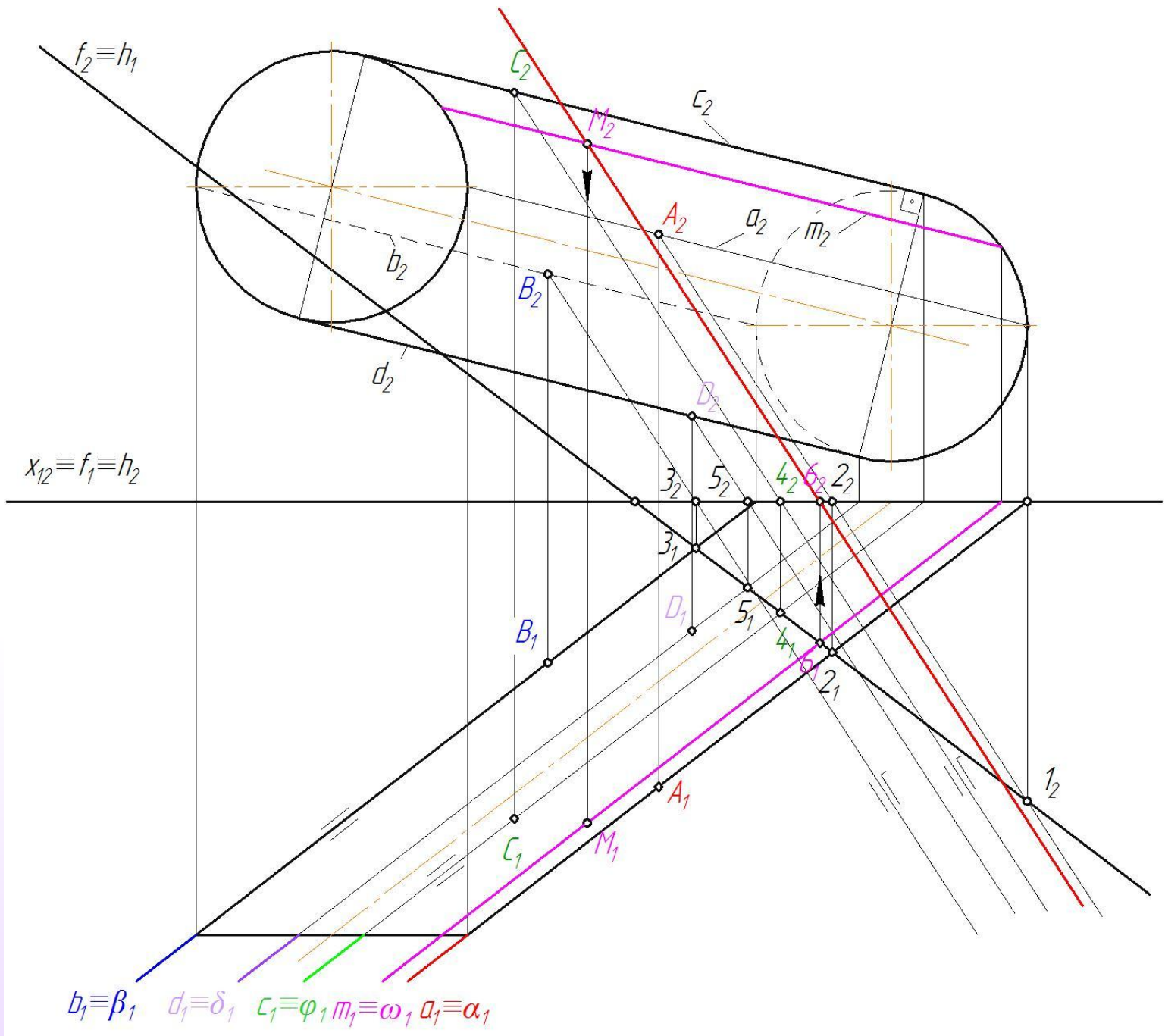
1. $\delta \perp \Pi_1, d \subset \delta,$

2. $(5) = \delta \cap \gamma.$

$\delta \parallel \alpha \Rightarrow (5) \parallel (12)$

3. $D \equiv (5) \cap d.$

Для построения линии пересечения необходимо найти еще ряд точек, используя плоскости – посредника.

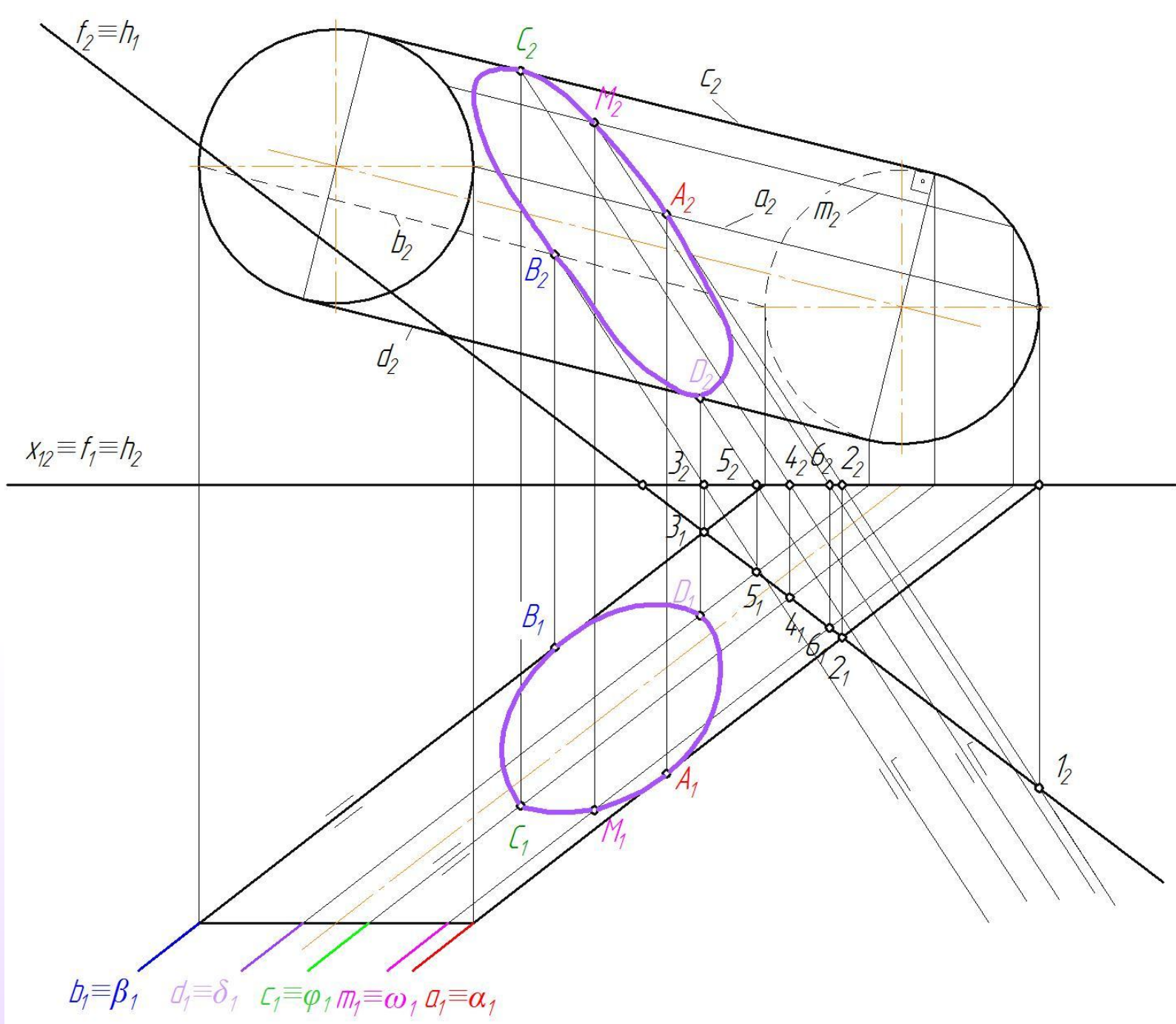


1. $\omega \perp \Pi_1, m \subset \omega,$

2. $(6) = \omega \cap \gamma.$

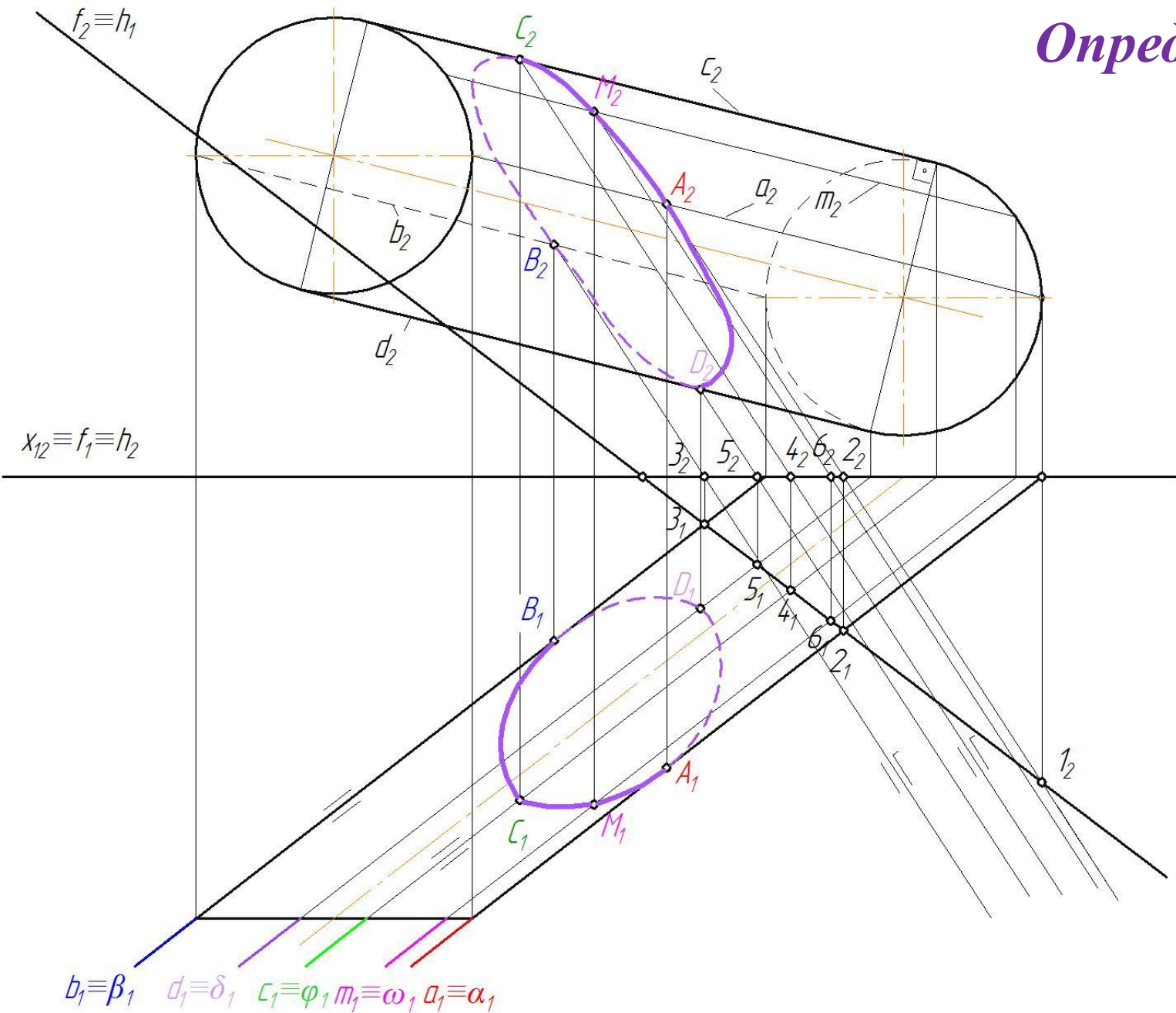
$\omega \parallel \alpha \Rightarrow (6) \parallel (12)$

3. $M \equiv (6) \cap m.$



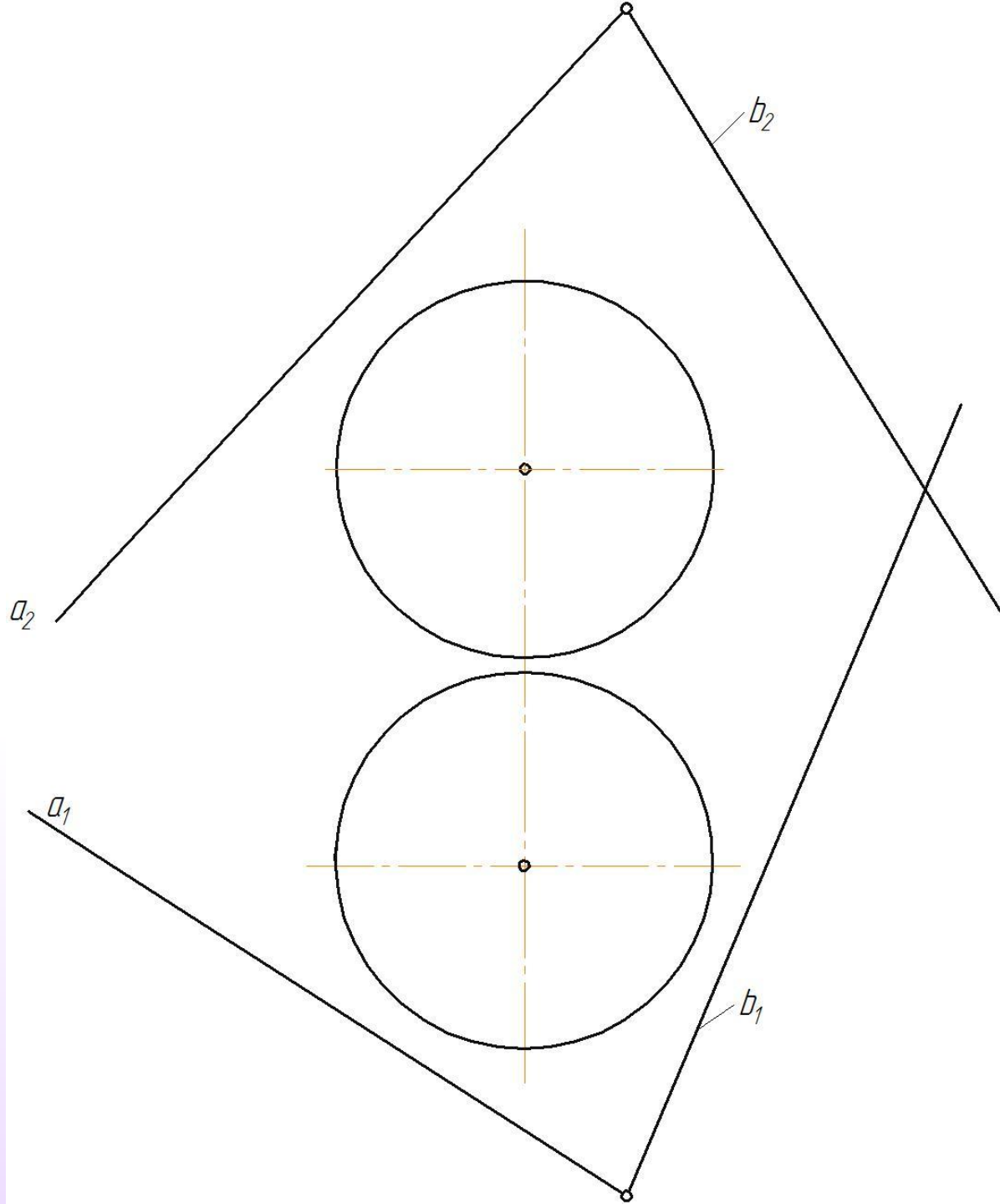
Точки **А, В, С, D, М,**
 являясь общими для
 данных поверхности и
 плоскости будут
 точками искомой линии
 пересечения.

Определяем видимость сечения.



Точки пересечения плоскости со сферой можно рассматривать как точки пересечения окружностей сферы с плоскостью.

Плоскость пересекает сферу по окружности, проекции которой в общем случае на ортогональном чертеже изобразятся эллипсами.

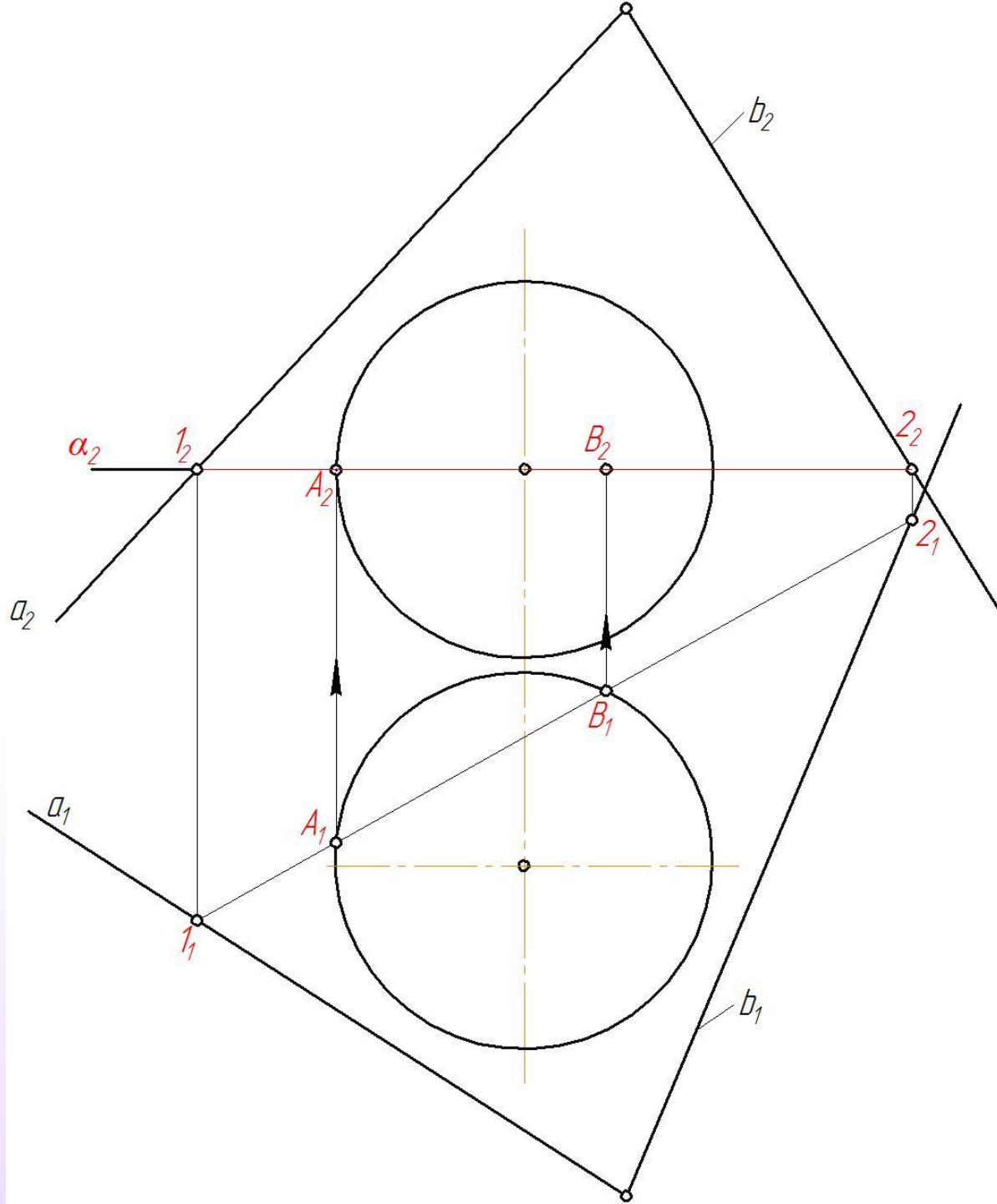


Задача 4

Сфера Φ и плоскость φ

(a,b)

$$m = \Phi \cap \varphi - ?$$



Определяем опорные точки

Вводим вспомогательную плоскость – посредник α через экватор.

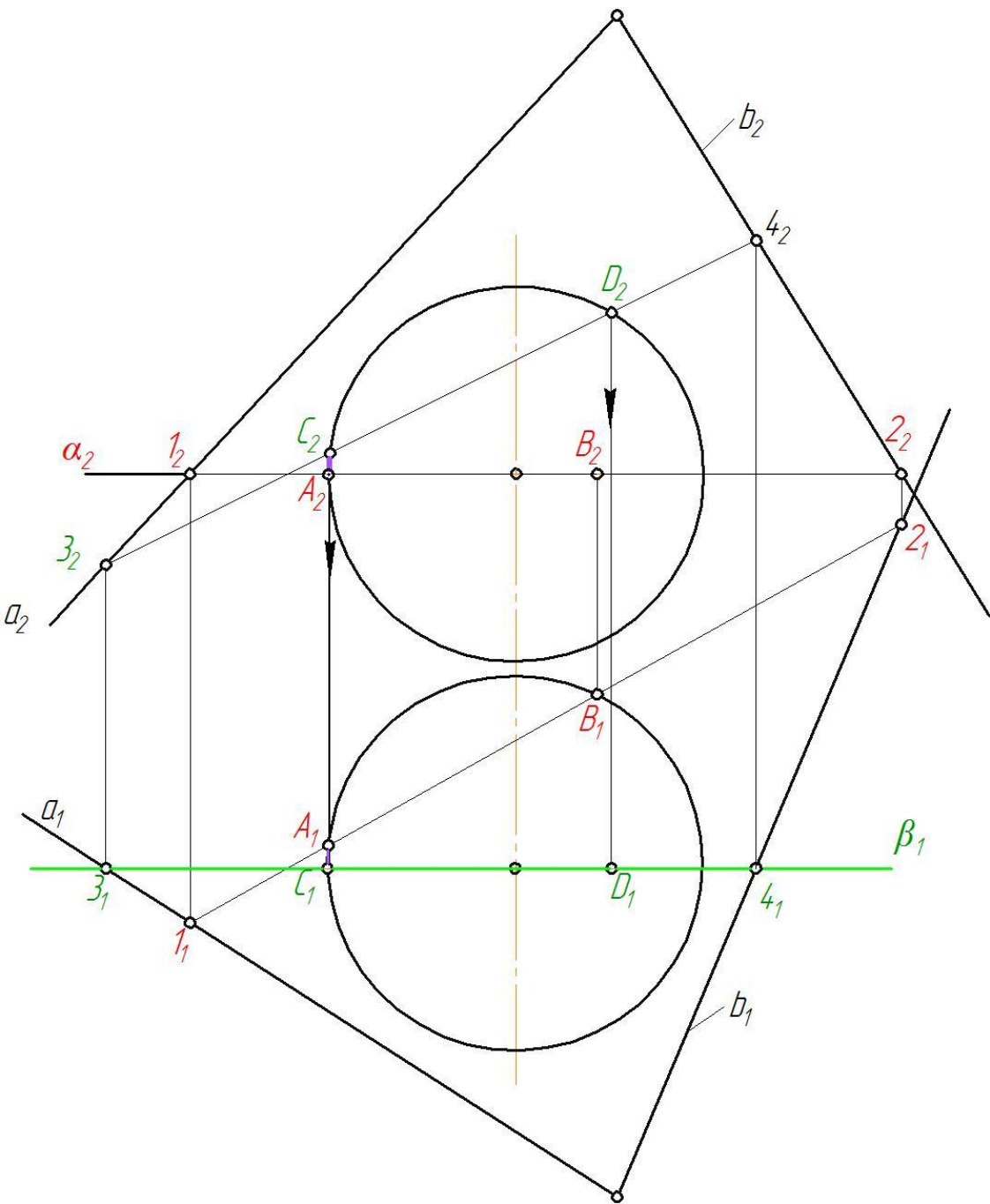
$$\alpha \parallel \Pi_1$$

Находим точки пересечения плоскости – посредника α с заданной плоскостью $\varphi(a,b)$:

$$1,2 = \alpha \cap \varphi.$$

Находим точки пересечения плоскости – посредника α со сферой Φ :

$$A,B = \alpha \cap \Phi.$$



Вводим вспомогательную плоскость – посредник β через главный меридиан.

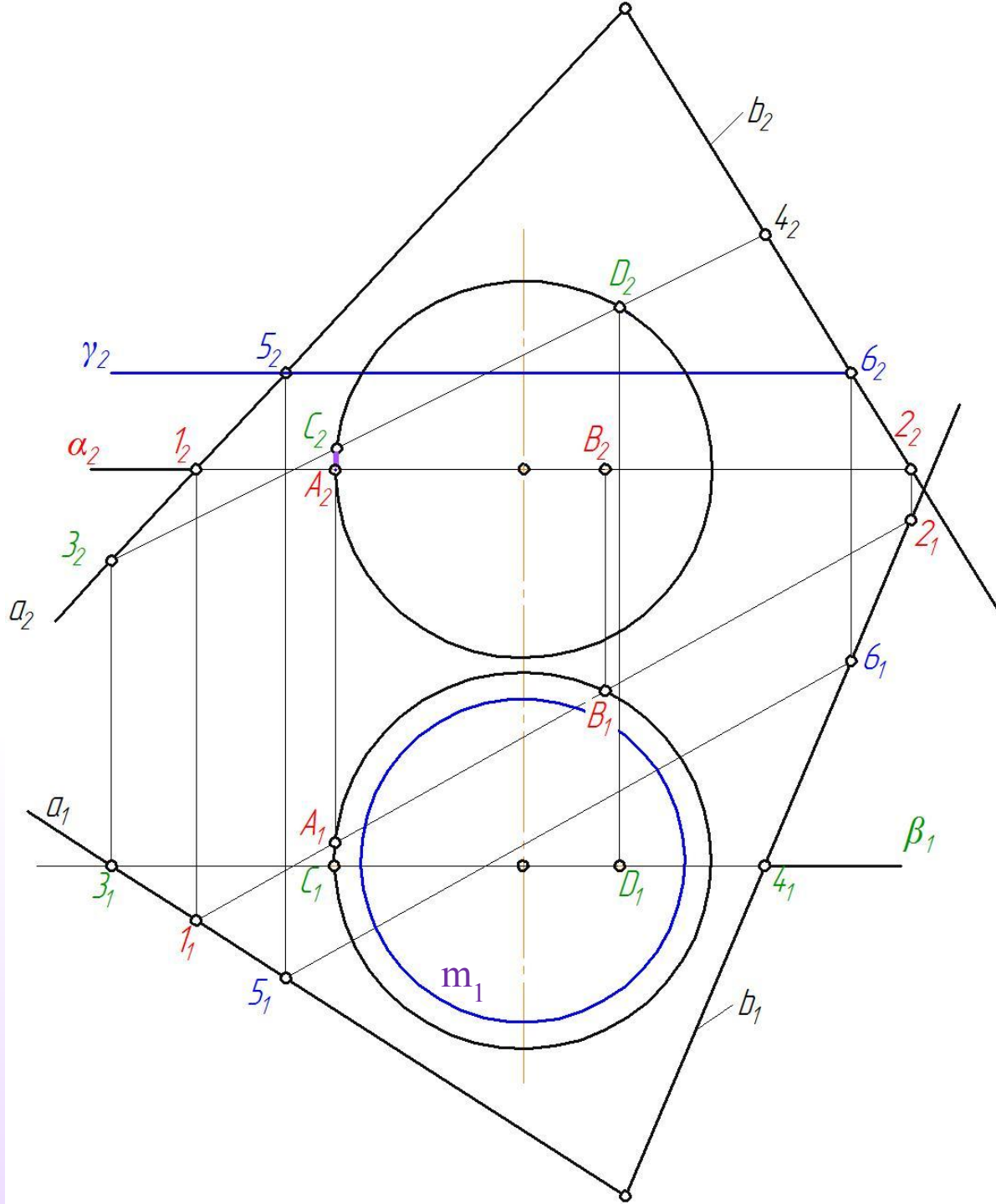
$$\beta \parallel \Pi_2$$

Находим точки пересечения плоскости – посредника β с заданной плоскостью $\varphi(a,b)$:

$$3,4 = \beta \cap \varphi.$$

Находим точки пересечения плоскости – посредника β со сферой Φ :

$$C,D = \beta \cap \Phi.$$



Для уточнения линии пересечения строим
промежуточные точки.

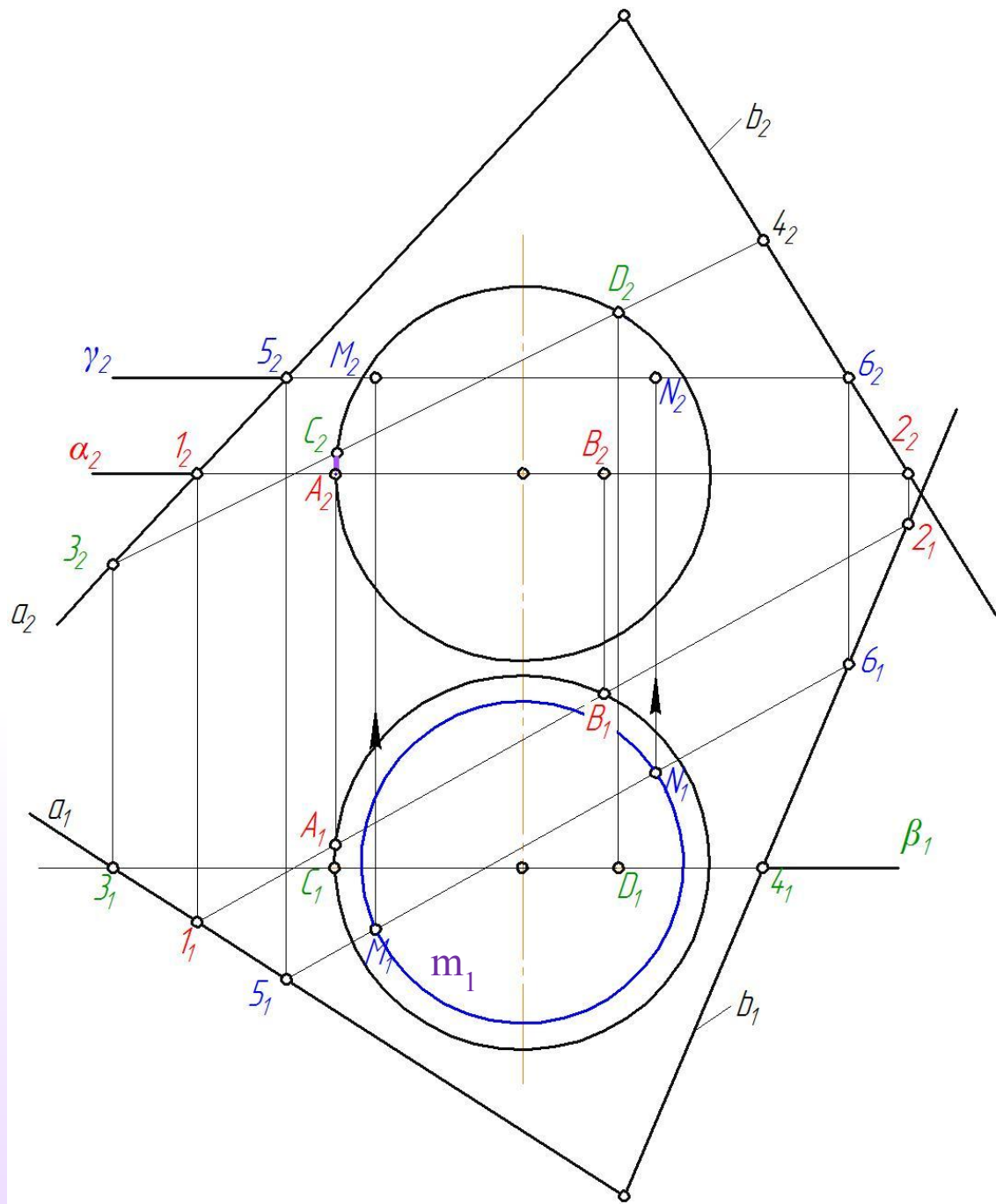
Вводим произвольно
 вспомогательную плоскость –
 посредник γ .

$$\gamma \parallel \Pi_1$$

Находим точки пересечения
 плоскости – посредника γ с
 заданной плоскостью $\varphi(a,b)$:

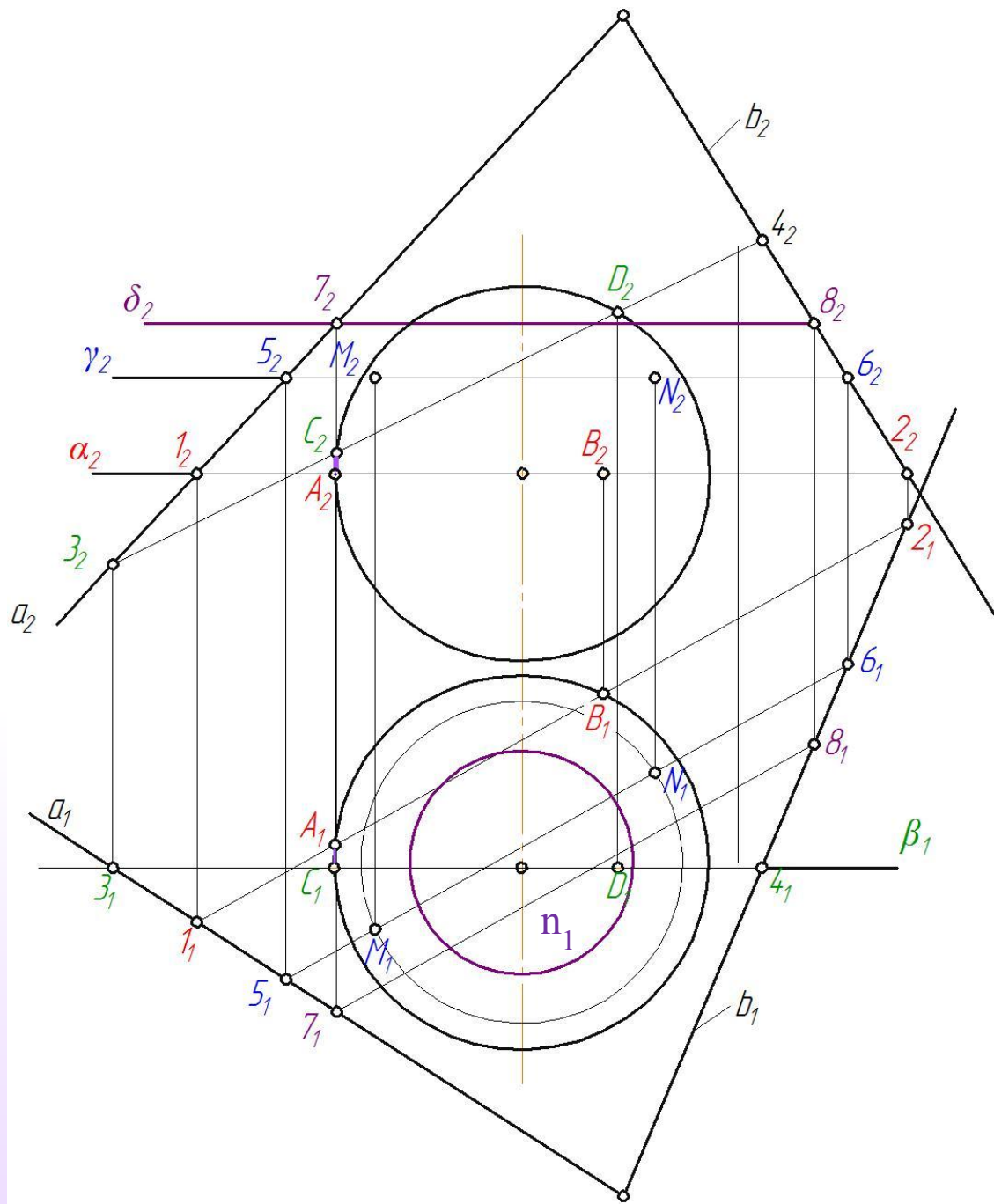
$$5,6 = \gamma \cap \varphi.$$

Находим окружность пересечения
 плоскости – посредника γ со
 сферой $\Phi - m$



Находим точки пересечения
 построенной окружности сечения
 сферы и горизонтали сечения
 плоскости φ :

$$M, N = (56) \cap m.$$



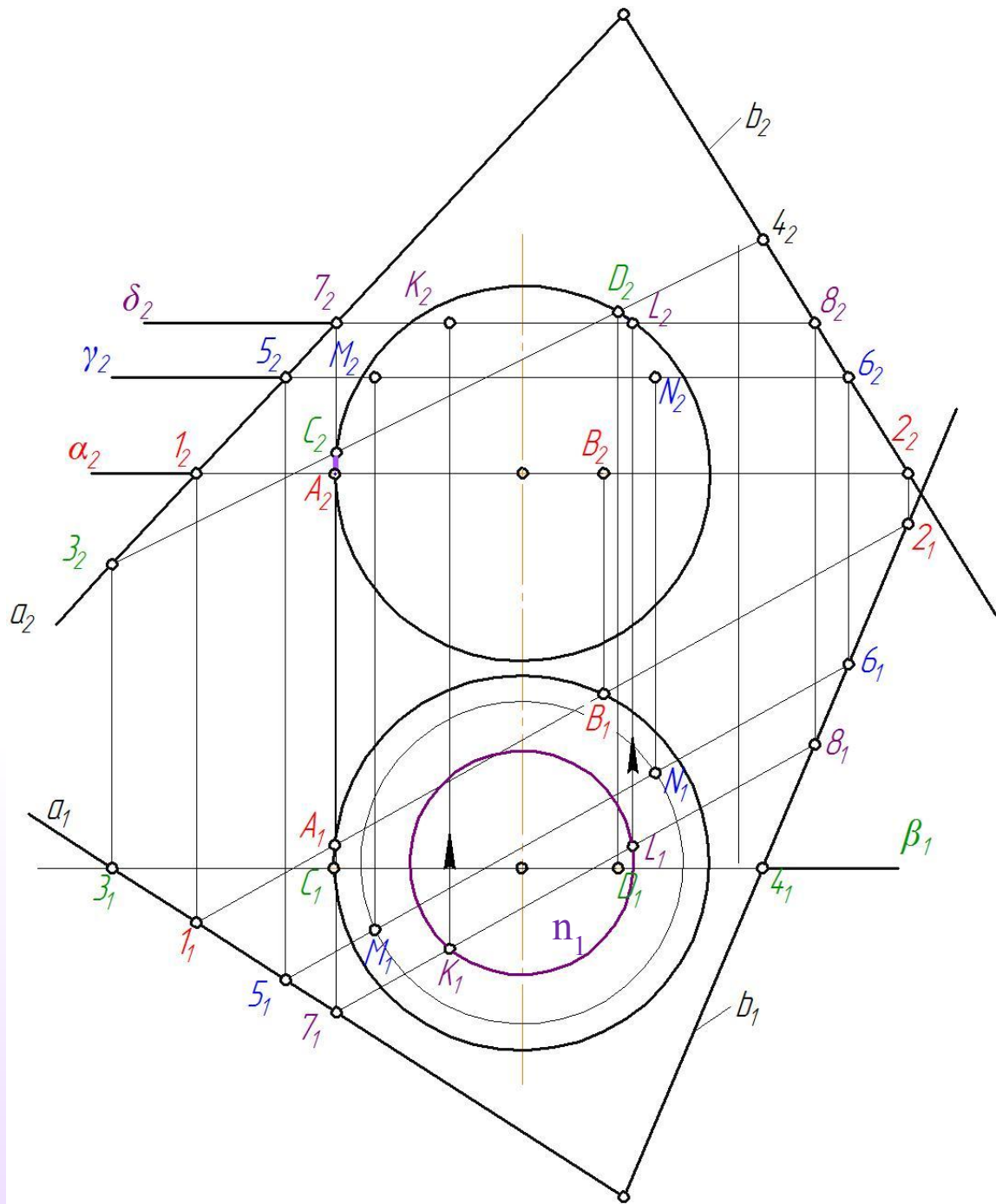
Вводим произвольно
вспомогательную плоскость –
посредник δ .

$$\delta \parallel \Pi_1$$

Находим точки пересечения
плоскости – посредника δ с
заданной плоскостью $\varphi(a,b)$:

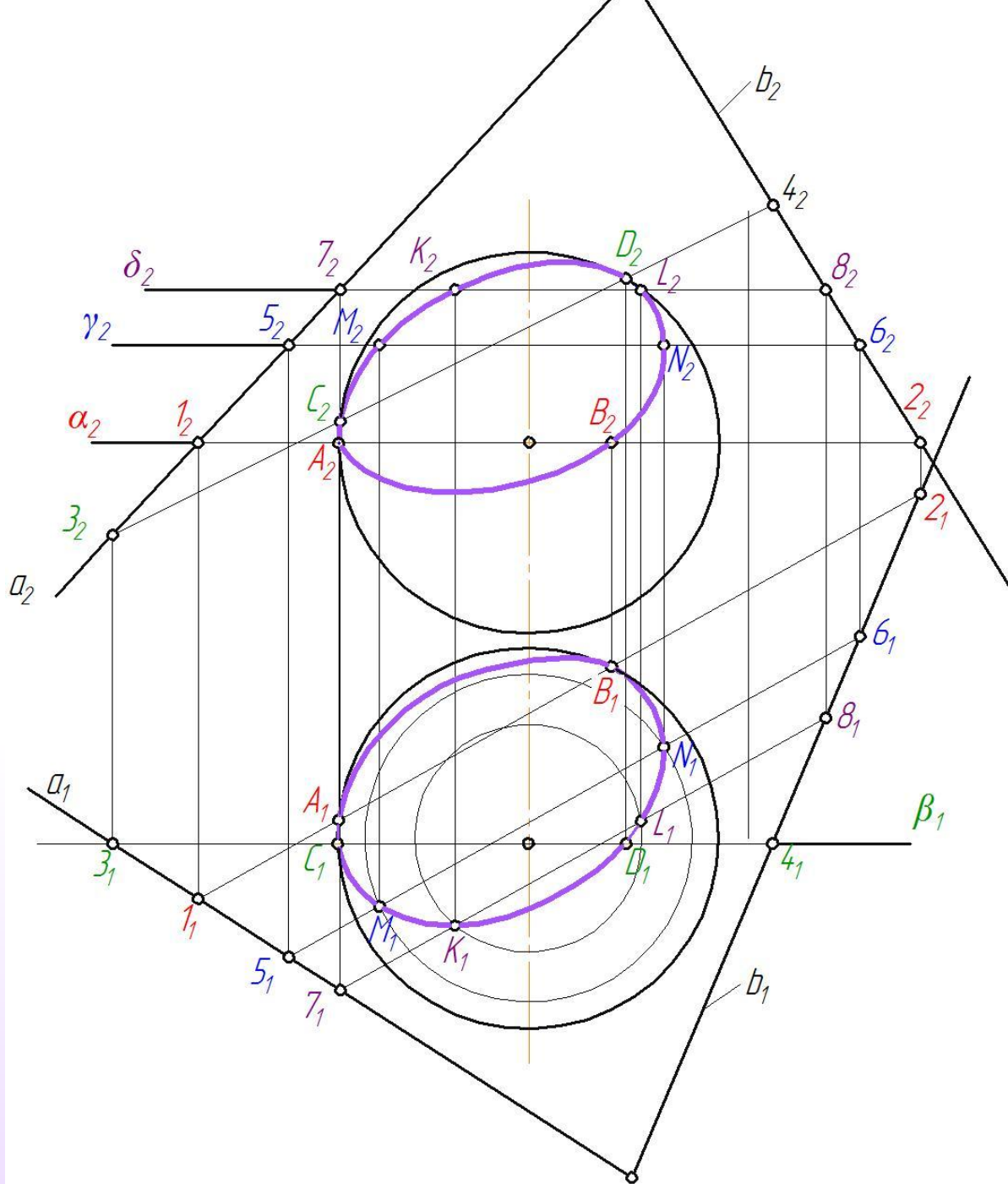
$$7,8 = \delta \cap \varphi.$$

Находим окружность пересечения
плоскости – посредника δ со
сферой $\Phi - n$

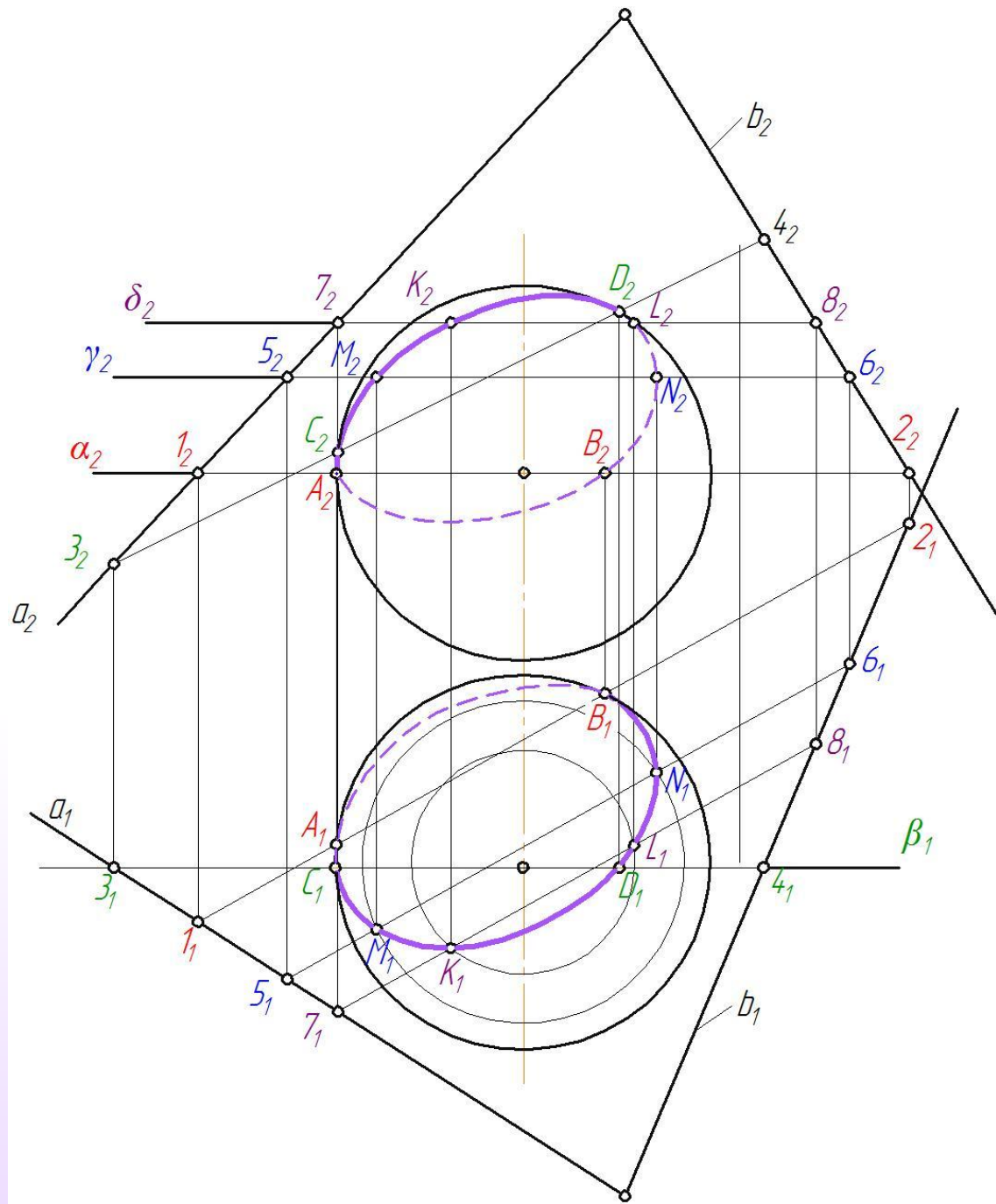


Находим точки пересечения
 построенной окружности сечения
 сферы и горизонтали сечения
 плоскости φ :

$$K, L = (78) \cap n.$$



Точки А, В, С, D, М, N, К, L, являясь общими для данных поверхности и плоскости будут точками искомой линии пересечения.



Определяем видимость сечения.