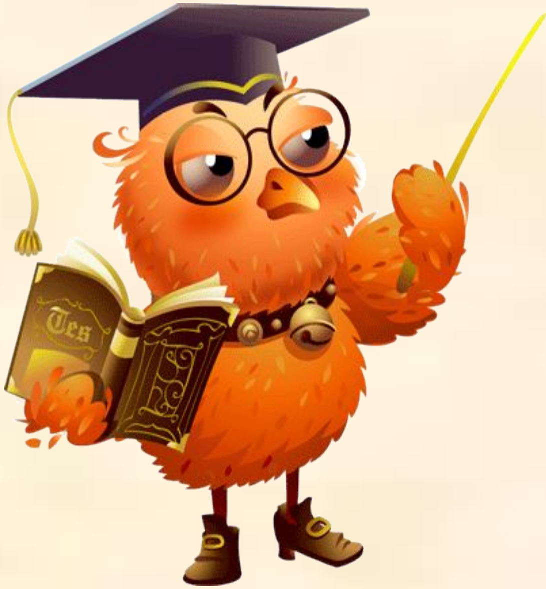
Свойства логарифмов

Алгебра и начала анализа, 11 класс,
УМК А.Г. Мордкович

Цели

- Изучить свойства логарифмов
- Вырабатывать умения и навыки преобразования логарифмических выражений



Повторим

Определение логарифма

Логарифмом положительного числа *b* по положительному и отличному от 1 основанию *a* называют показатель степени, в которую нужно возвести число *a*, чтобы получить число *b*.

$$a^{\log_a b} = b, \;\; где \;\; a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; b > 0$$

Повторим

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^c = c$$

Свойства логарифмов

Теорема 1. **Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел**

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

Доказательство

Обозначим:

$$\log_a bc = x \qquad a^x = bc$$

$$\log_a b = y \qquad a^y = b \qquad a^y \cdot a^z = a^x$$

$$\log_a c = z \qquad a^z = c$$

$$y + z = x$$

Ч.т.д

Например

$$\log_3 54 = \log_3(27 \cdot 2) = \log_3 27 + \log_3 2 = 3 + \log_3 2$$

$$\log_8 4 + \log_8 16 = \log_8(4 \cdot 16) = \log_8 64 = 2$$

Свойства логарифмов

Теорема 2. **Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя**

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Доказательство

Обозначим:

$$\log_a \frac{b}{c} = x$$

$$\log_a b = y$$

$$\log_a c = z$$

$$a^x = \frac{b}{c}$$

$$a^y = b$$

$$a^z = c$$

$$a^x = a^y : a^z$$

$$x = y - z$$

Ч.т.д

Например

$$\log_2 7{,}5 = \log_2 \frac{15}{2} = \log_2 15 - \log_2 2 = \log_2 15 - 1$$

$$\log_7 35 - \log_7 5 = \log_7 \frac{35}{5} = \log_7 7 = 1$$

Свойства логарифмов

Теорема 3. **Если a и b – положительные числа, причём a ≠ 1, то для любого числа r справедливо равенство**

$$\log_a b^r = r \log_a b$$

Доказательство

Обозначим:

$$\log_a b^r = x$$
$$\log_a b = y$$

$$\Rightarrow \quad a^x = b^r, \quad a^y = b$$

$$\Rightarrow \quad a^x = \left(a^y\right)^r$$

$$a^x = a^{ry}$$

$$\Downarrow$$

$$x = ry$$

ч.т.д

Краткая формулировка: ***логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени.***

Например

$$\log_2 36 = \log_2 6^2 = 2\log_2 6$$

$$2\log_4 8 = \log_4 8^2 = \log_4 64 = 3$$

$$\log_2 x^2 = 2\log_2 x$$?

Верно ли равенство?

Нет, т.к. при x<0 левая часть равенства определена, а правая не определена.

$$\log_2 x^2 = 2\log_2 |x|$$

$$\boxed{\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x|, n \in Z}$$

Свойства логарифмов

Теорема 4. **Равенство** $\log_a t = \log_a s,$

где a>0, a ≠ 1, t>0, s>0, справедливо тогда и только тогда, когда s = t.

Это является достаточно очевидным следствием монотонности логарифмической функции.

Примеры применения свойств.

Пример 1.

Известно, что положительные числа x, y, z, t связаны соотношением $x = \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}}$. Выразить $\log_a x (a > 0, a \neq 1)$ через логарифмы по сонованию a чисел y, z, t.

Решение.

$$\log_a x = \log_a \frac{yz^3}{\sqrt[3]{t}} = \log_a (yz^3) - \log \sqrt[3]{t} =$$

$$\log_a y + \log_a z^3 - \log_a t^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \log_a y + 3\log_a z - \frac{1}{3}\log_a t$$

Примеры применения свойств.

Пример 2.

Известно, что $\log_3 2 = a$. Вычислить $\log_3 6{,}75$.

Решение.

$$6{,}75 = 6\frac{3}{4} = \frac{27}{4} = \frac{3^3}{2^2};$$

$$\log_3 6{,}75 = \log_3 \frac{3^3}{2^2} = \log_3 3^3 - \log_3 2^2 =$$

$$= 3 - 2\log_3 2 = 3 - 2a.$$

Список используемых источников

- Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы. В 2ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень)/А.Г.Мордкович. – 11-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 399 с. : ил.