Алгебра Логики

Алгебра логики – это раздел математики, изучающий высказывания, рассматриваемые со стороны их логических значений (истинности или ложности) и логических операций над ними.

Логическое высказывание

Логическое высказывание – это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Пример: «3 – простое число»
- является высказыванием, поскольку оно истинно.

Пример: «Давайте пойдем в кино»
- не является логическим высказыванием.

Высказывательная форма

Высказывательная форма – это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

Пример. «x+2>5» – высказывательная форма, которая при x>3 является истинной, иначе ложной.

Логические связки

Алгебра логики рассматривает любое высказывание только с одной точки зрения – является ли оно истинным или ложным.

Слова и словосочетания: ***«не», «и», «или», «если..., то», «тогда и только тогда»*** и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются ***логическими связками. .***

Логические связки

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются ***составными (сложными).***

Высказывания, которые не являются составными, называются ***элементарными (простым**и*).

Пример. Высказывание «Число 6 делится на 2» - *простое* высказывание.

Высказывание «Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3» - *составное* высказывание, образованное из двух простых с помощью *логической связки* **«и»**.

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний, из которых они состоят.

Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают ***имена.***

Пример:

Обозначим через A простое высказывание

«число 6 делится на 2»,

а через B простое высказывание

«число 6 делится на 3».

Тогда составное высказывание:

«Число 6 делится на 2, и число 6 делится на 3»

можно записать как «A и B».

Здесь «и» – логическая связка, A, B – логические переменные, которые могут принимать только два значения – «истина» или «ложь», обозначаемые, соответственно, «1» и «0».

Каждая логическая связка рассматривается как операция над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение

Основные логические операции

Линия сравнения	*Инверсия*	*Конъюнкция*	*Дизъюнкция*	*Импликация*	*Эквивалентность*
Название	отрицание	логическое умножение	логическое сложение	логическое следование	логическое равенство
Обозначение	$\bar{A}$ или $\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
Союз	не	и	или	Если А, то В; Когда А, тогда В	А тогда и только тогда, когда В
Истинность результата операции	когда исходное высказывание ложно	когда истины одновременно высказывания А и В	когда истинно А, либо В, либо А и В одновременно	всегда, кроме случая, когда А истинно, а В ложно.	когда А и В одновременно истинны или одновременно ложны
Таблица истинности	A / $\neg A$: 1 / 0; 0 / 1	A, B, $A \wedge B$: 1 1 1; 0 0 0; 0 1 0; 1 0 0	A, B, $A \vee B$: 1 1 1; 0 0 0; 0 1 1; 1 0 1	A, B, $A \rightarrow B$: 1 1 1; 0 0 1; 0 1 1; 1 0 0	A, B, $A \leftrightarrow B$: 1 1 1; 0 0 1; 0 1 0; 1 0 0

Таблицы истинности

Таблица истинности – это таблица, показывающая истинность сложного высказывания при всех возможных значениях входящих переменных

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1		0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1		1	1	1	1

Таблицы истинности

1. Определить количество строк:

– количество строк = 2n + строка для заголовка,
– n - количество простых высказываний.

2. Определить количество столбцов:
количество столбцов = количество переменных + количество логических операций;
– определить количество переменных (простых выражений);
– определить количество логических операций и последовательность их выполнения.

3. Заполнить столбцы результатами выполнения логических операций в обозначенной последовательности с учетом таблиц истинности основных логических операций.

Таблицы истинности

Пример.
Составить таблицу истинности для формулы И–НЕ, которую можно записать так: ¬(A&B) .

1. Определить количество строк:

На входе два простых высказывания: А и В, поэтому n=2 и количество строк =22+1=5.
2. Определить количество столбцов:
Выражение состоит из двух простых выражений (А и В) и двух логических операций (1 инверсия, 1 конъюнкция), т.е. количество столбцов таблицы истинности = 4.
3. Заполнить столбцы с учетом таблиц истинности логических операций (табл. 3).

Таблицы истинности

A	B	A&B	¬(A&B)
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Подобным образом можно составить таблицу истинности для формулы ИЛИ–НЕ, которую можно записать так: $\neg(A \vee B)$.

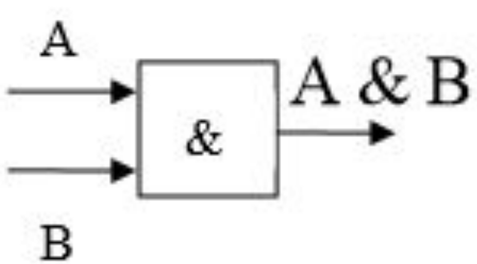
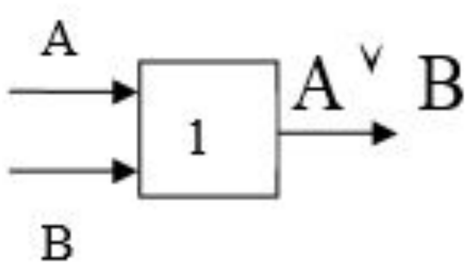
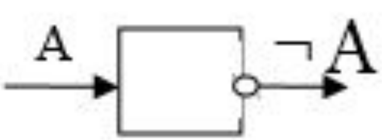
A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

Логические схемы

Логические формулы можно также представлять с помощью языка логических схем.

Существует три базовых логических элемента, которые реализуют три основные логические операции:

логический элемент ***«И»*** – логическое умножение – конъюнктор;
логический элемент ***«ИЛИ»*** – логическое сложение – дизъюнктор;
логический элемент ***«НЕ»*** – инверсию – инвертор.

конъюнктор	дизъюнктор	инвертор
		

Алгоритм построения логических схем.

1. Определить число логических переменных.
2. Определить количество логических операций и их порядок.
3. Изобразить для каждой логической операции соответствующий ей логический элемент.
4. Соединить логические элементы в порядке выполнения логических операций.

Пример.

По заданной логической функции $F(A,B)=\neg A\&B \lor A\&\neg B$ построить логическую схему.

Решение.

1. Число логических переменных = 2 (A и B).
2. Количество операций = 5 (2 инверсии, 2 конъюнкции, 1 дизъюнкция). Сначала выполняются операции инверсии, затем конъюнкции, в последнюю очередь операция дизъюнкции.
3. Схема будет содержать 2 инвертора, 2 конъюнктора и 1 дизъюнктор.
4. Построение надо начинать с логической операции, которая должна выполняться последней. В данном случае такой операцией является логическое сложение, следовательно, на выходе должен быть дизъюнктор. На него сигналы подаются с двух конъюнкторов, на которые, в свою очередь, подаются один входной сигнал нормальный и один инвертированный (с инверторов).

Логические схемы