

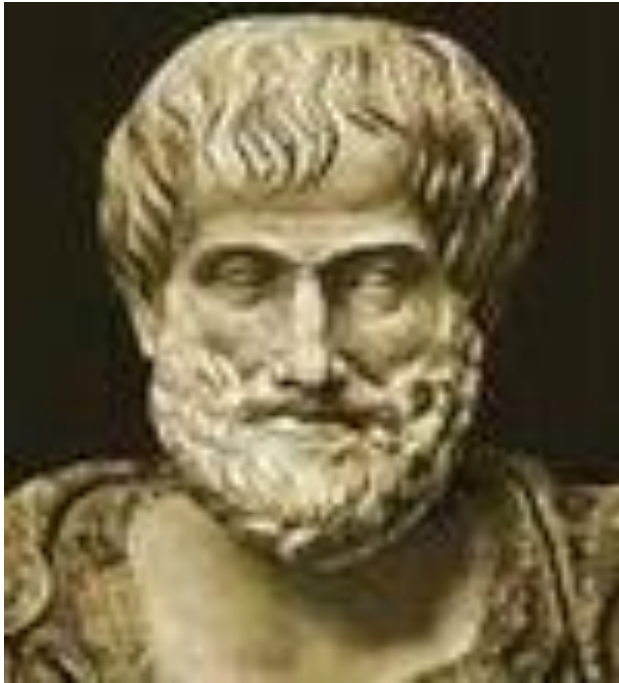


Алгебра логики

Логика

упорядоченная система мышления,
которая создает взаимосвязи между
заданными условиями и позволяет
делать умозаключения, основываясь
на предпосылках и
предположениях

Аристотель



384 — 322 до н. э.

Древнегреческий
философ

Основоположник
логики

Исследовал
различные формы
рассуждений , ввел
понятие

силлогизма

Рене Декарт



1596 – 1650

Французский
философ,
математик, механик,
физик и физиолог

Рекомендовал в
логике использовать
математические
методы

Готфрид Вильгельм Лейбниц

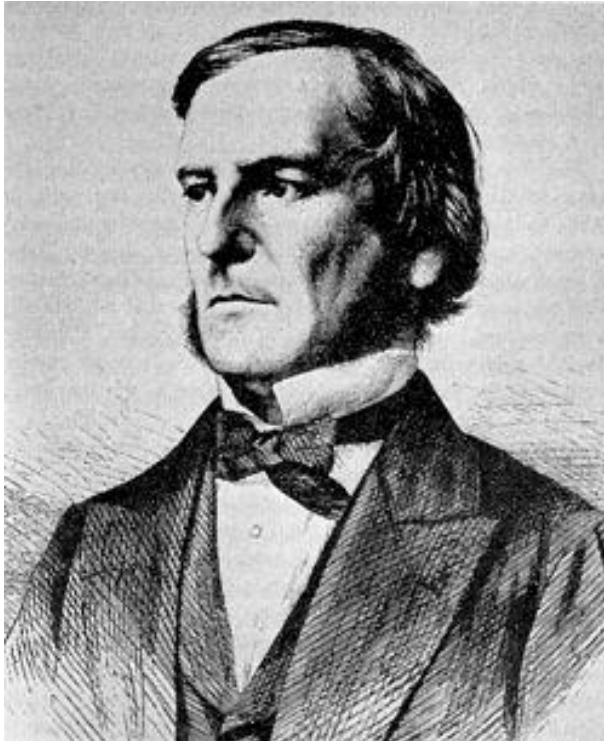


1646 – 1716

Немецкий философ,
логик, математик,
механик, физик, юрист,
историк, дипломат,
языковед и изобретатель

Предложил в логике
использовать двоичную
систему счисления и
математическую
символику

Джордж Буль



1815 – 1864

Английский
математик и логик

Основоположник
математической
логики

«Математический
анализ логики»
1847

Алгебра логики

- раздел математической **ЛОГИКИ**, в котором изучаются логические операции над высказываниями
- Алгебра логики = **Булева** алгебра
- **НЕ** учитываем смысл высказываний

Высказывание

Предложение, относительно которого имеет смысл утверждать, истинно оно или ложно

Истинностные значения:

- **Ложь** или **Истина**
- **0** или **1**

Высказывания



Простые

Сложные

НЕЛЬЗЯ

Я

МОЖНО

О

выделить некоторую часть, которая сама является высказыванием и не совпадает по смыслу со всем высказыванием

Пример

- **Простое** высказывание
«Ивдель – это город»

- **Сложное** высказывание
«Ивдель – это красивый и культурный город»

Обозначения

Большие буквы латинского алфавита

A – высказывание

A = 1 – высказывание истинно

A = 0 – высказывание ложно

Высказывательные переменные

Всякая большая буква латинского алфавита как некоторое переменное высказывание, которое может принимать значения 0 или 1, если не сказано, что данная буква обозначает конкретное высказывание

Логические связи

- Инверсия (отрицание)
- Конъюнкция (и)
- Дизъюнкция (или)
- Импликация (следование)
- Эквиваленция

Инверсия (отрицание)

- Нет; не; неверно, что...

\neg , ' , \square

x	$\neg x$
0	1
1	0

Пример

- $A = \text{«Ивдель – культурный город!»}$

Инверсия

- $\neg A = \text{«Неверно, что Ивдель – культурный город!»}$

Конъюнкция

- И; а; но...

&, \wedge ,

**Логическое
умножение**

.	x	y	x & y
	0	0	0
	0	1	0
	1	0	0
	1	1	1

Пример

- **A** = «В Ивделе светит солнце»
- **B** = «В Ивделе идёт дождь»

Конъюнкция

- **A & B** = «В Ивделе светит солнце и идёт дождь»

Задания

- Известно, что высказывание **A&B** истинно.

Что можно сказать об истинности высказываний **A** и **B**?

- Известно, что высказывание **A&B** ложно.

Что можно сказать об истинности высказываний **A** и **B**?

Дизъюнкция

- Или; либо...

\vee

Логическое сложение

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пример

- **A** = «В Ивделе светит солнце»
- **B** = «В Ивделе идёт дождь»

Дизъюнкция

- **A** \vee **B** = «В Ивделе светит солнце или идёт дождь»

Задания

- Известно, что высказывание $A \vee B$ истинно.

Что можно сказать об истинности высказывания $A \wedge B$?

- Известно, что высказывание $A \vee B$ ложно.

Что можно сказать об истинности высказывания $A \wedge B$?

Импликация

- Следует; влечет; если.. то..; тогда; вытекает..

\Rightarrow , \rightarrow

x	y	$x \Rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример

- **A** = «В Ивделе идёт дождь»
- **B** = «В Ивделе мокрые улицы»

Импликация

- **A** \Rightarrow **B** = «В Ивделе идёт дождь, следовательно, в Ивделе мокрые улицы»

Задания

- Известно, что высказывание $A \Rightarrow B$ истинно.

Что можно сказать об истинности высказываний A и B ?

- Известно, что высказывание $A \Rightarrow B$ ложно.

Что можно сказать об истинности высказываний $A \wedge B$ и $A \vee B$?

Эквиваленция

- Эквивалентно; равносильно; если и только если; тогда и только тогда; в том, и только в том случае...

\Leftrightarrow, \sim

x	y	$x \sim y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример

- **A** = «В Ивделе идёт дождь»
- **B** = «В Ивделе мокрые улицы»

Эквиваленция

- **A** \Leftrightarrow **B** = «В Ивделе идёт дождь тогда и только тогда, когда в Ивделе мокрые улицы»

Задание

- Известно, что высказывание $A \sim B$ истинно.

Что можно сказать об истинности высказываний $\neg A \sim B$ и $A \rightarrow B$?

Формулы

1) большие буквы латинского алфавита, снабжённые, быть может, штрихами или индексами и обозначающие высказывания или высказывательные переменные

Формулы

2) Если a и b – формулы, то выражения

$\neg a, a \& b, a \vee b, a \rightarrow b, a \sim b$

тоже являются формулами

3) Других формул нет

Приоритет логических связок

- Инверсия
- Конъюнкция
- Дизъюнкция
- Импликация и эквиваленция

Логическая возможность формулы

- Формула $a(A_1, A_2, \dots, A_n)$

Всякий набор конкретных значений истинности для букв A_1, A_2, \dots, A_n

Таблица логических возможностей

Таблица , содержащая
перечень всевозможных
ЛОГИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ
формулы a

Таблица логических возможностей

Формула $a(A_1, A_2)$

A1	A2
0	0
0	1
1	0
1	1

Формула $a(A_1, A_2, A_3)$

A1	A2	A3
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Пусть a и b – две формулы, а

A_1, A_2, \dots, A_n – все высказывательные переменные, входящие в запись хотя бы одной из этих формул.

**Общей логической
возможностью** формул называется
всякий набор конкретных значений
истинности для высказывательных
переменных A_1, A_2, \dots, A_n

Пример

- Найти общие логические возможности формул

$A \rightarrow \neg A$ и $(A \rightarrow \neg A) \& (B \vee \neg B)$.

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

Таблица истинности

Таблица , в которой приведён перечень всевозможных логических возможностей формулы *a* вместе с указанием её значений в каждой логической возможности

Формулы ***a*** и ***b*** называются **равносильными**, если во всякой общей логической возможности они принимают одинаковые значения

$$***a*** \equiv ***b***$$

- Формула называется **ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННОЙ (ТАВТОЛОГИЕЙ)** , если во всех ЛОГИЧЕСКИХ ВОЗМОЖНОСТЯХ она принимает одно и то же значение, равное 1

$$a \equiv 1$$

- Формула называется **тождественно ложной** (**противоречием**) , если во всех логических возможностях она принимает одно и то же значение, равное 0

$$a \equiv 0$$

Задача

Докажите тождественную истинность формулы

$$a \rightarrow (b \rightarrow a)$$

$$a \rightarrow (b \rightarrow a)$$

a	b	$b \rightarrow a$	$a \rightarrow (b \rightarrow a)$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

$$a \rightarrow (b \rightarrow a)$$

a	b	$b \rightarrow a$	$a \rightarrow (b \rightarrow a)$
0	0	1	
0	1	0	
1	0	1	
1	1	1	

$$a \rightarrow (b \rightarrow a)$$

a	b	$b \rightarrow a$	$a \rightarrow (b \rightarrow a)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Задача

- Докажите тождественную истинность формулы

$$a \rightarrow (b \rightarrow a)$$

- Постройте таблицу истинности для формулы

$$\neg((a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a))$$

$$f = \neg((a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a))$$

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$	&	f
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

$$f = \neg((a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a))$$

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$	&	f
0	0	1			
0	1	1			
1	0	0			
1	1	1			

$$f = \neg((a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a))$$

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$	&	f
0	0	1			
0	1	1			
1	0	0			
1	1	1			

$$f = \neg((a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a))$$

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$	&	f
0	0	1	1		
0	1	1	0		
1	0	0	1		
1	1	1	1		

$$f = \neg((a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a))$$

a	b	a→b	b→a	&	f
0	0	1	1	1	
0	1	1	0	0	
1	0	0	1	0	
1	1	1	1	1	

$$f = \neg((a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a))$$

a	b	$a \rightarrow b$	$b \rightarrow a$	&	f
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0



ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

I. Тождества

$$a \& a \equiv a$$

$$a \vee a \equiv a$$

2. Переместительный

$$a \& b \equiv b \& a$$

$$a \vee b \equiv b \vee a$$

3. Сочетательный

$$a \& (b \& c) \equiv (a \& b) \& c$$

$$a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$$

4. Распределительный

$$a \& (b \vee c) \equiv (a \& b) \vee (a \& c)$$

$$a \vee (b \& c) \equiv (a \vee b) \& (a \vee c)$$

5. Закон двойного отрицания

$$\neg(\neg a) \equiv a$$

6. Законы поглощения

$$a \& (a \vee b) \equiv a$$

$$a \vee (a \& b) \equiv a$$

Огастес де Морган



1806 — 1871

Шотландский
математик и логик

Первый президент
Лондонского
математического
общества

1847 – элементы
логики высказываний
независимо от
Джорджа Буля

7. Законы де Моргана

$$\neg(a \vee b) \equiv \neg a \ \& \ \neg b$$

$$\neg(a \ \& \ b) \equiv \neg a \ \vee \ \neg b$$

8. Закон исключённого третьего

$$\neg a \vee a \equiv 1$$

9. Закон противоречия

$$\neg a \ \& \ a \equiv 0$$

10. Свойства тавтологии и противоречия

$$1 \& a \equiv a$$

$$1 \vee a \equiv 1$$

$$0 \& a \equiv 0$$

$$0 \vee a \equiv a$$

$$\neg 0 \equiv 1$$

$$\neg 1 \equiv 0$$

II. Закон контрапозиции (контроппозиции)

$$a \rightarrow b \equiv \neg b \rightarrow \neg a$$

12. Правило исключения импликации

$$a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$$

13. Правило исключения эквиваленции

$$a \sim b \equiv (a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a)$$

Задача

- Докажите тождественную истинность формулы с помощью законов логики

$$a \rightarrow (b \rightarrow a)$$

$$a \rightarrow (b \rightarrow a) \equiv a \rightarrow (\bar{b} \vee a) \equiv$$

$$\equiv \bar{a} \vee (\bar{b} \vee a) \equiv \bar{a} \vee \bar{b} \vee a \equiv$$

$$\equiv \bar{a} \vee a \vee \bar{b} \equiv 1 \vee \bar{b} \equiv 1$$

Задача


- Упростите формулу

$$\neg((a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a))$$

$$\neg((a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a)) \equiv \overline{(a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a)} \equiv$$

$$\equiv \overline{(a \rightarrow b)} \vee \overline{(b \rightarrow a)} \equiv \overline{(\bar{a} \vee b)} \vee \overline{(\bar{b} \vee a)} \equiv$$

$$\equiv (\overline{\bar{a}} \& \bar{b}) \vee (\overline{\bar{b}} \& \bar{a}) \equiv (a \& \bar{b}) \vee (b \& \bar{a})$$

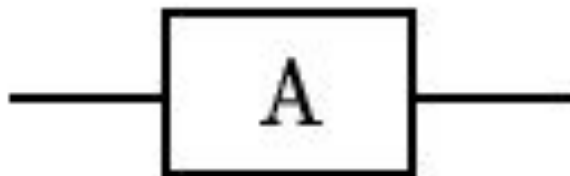


a	b	$\neg a$	$\neg b$	$a \& \neg b$	$\neg a \& b$	f
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0



РЕЛЕЙНО- КОНТАКТНЫЕ СХЕМЫ

Двухполюсный переключатель



Два состояния:

«замкнуто» – **1**

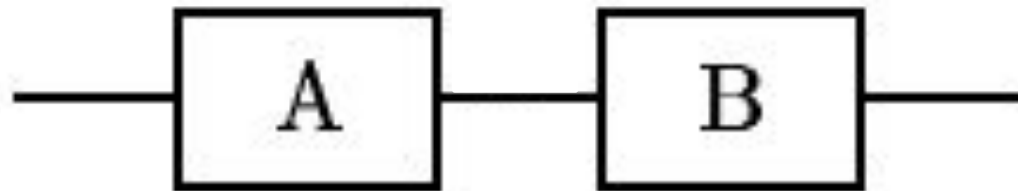
«разомкнуто» – **0**

Инверсия



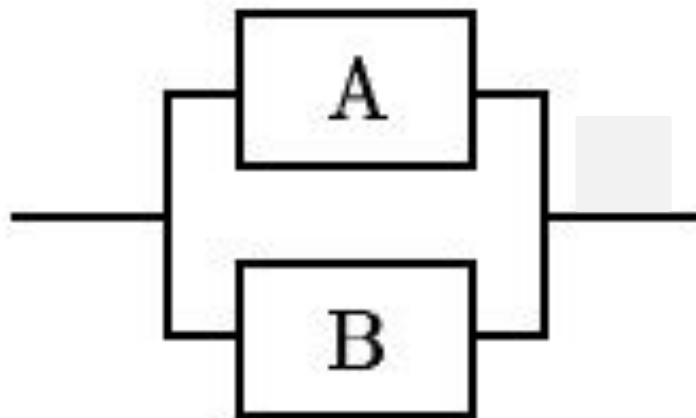
Разомкнут, когда замкнут A
Замкнут, когда разомкнут A

Последовательное включение




Конъюнкция

Параллельное включение



Дизъюнкция

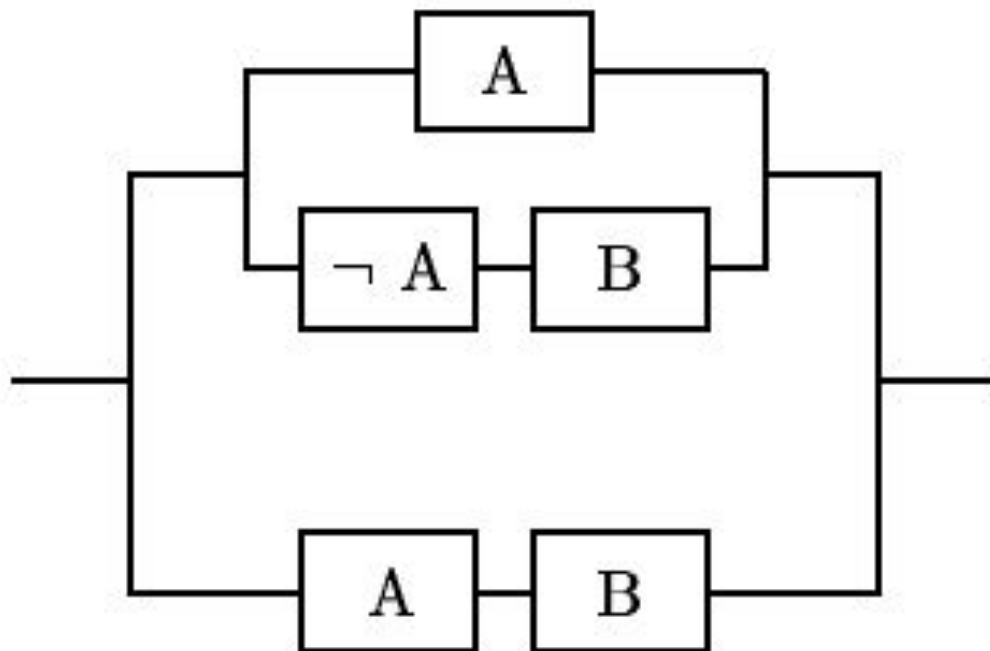
- 
- Множество высказываний и множество переключательных схем одинаково устроены (**изоморфны**)
 - Это можно использовать при решении задач

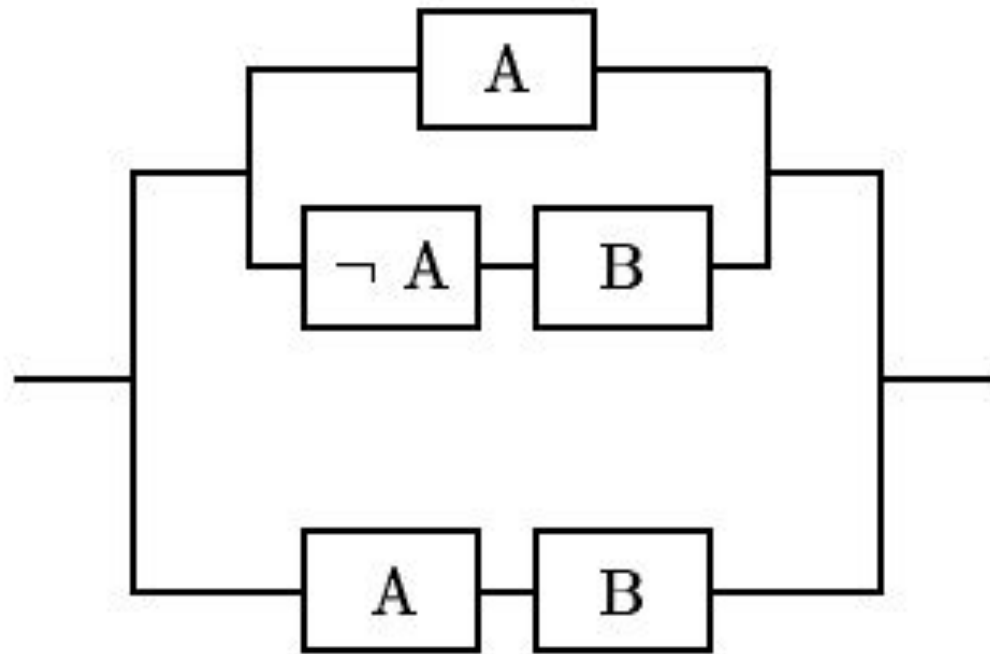
Анализ схем

- Для данной схемы строим формулу
- Упрощаем её с помощью законов логики
- Строим более простую схему, которая обладает теми же электрическими свойствами, что и исходная

Задача

Упростить схему





$$(A \vee (\bar{A} \& B)) \vee (A \& B)$$

$$(A \vee (\bar{A} \& B)) \vee (A \& B) \equiv$$

$$\equiv A \vee (\bar{A} \& B) \vee (A \& B) \equiv$$

$$\equiv A \vee (A \& B) \vee (\bar{A} \& B) \equiv$$

$$\equiv A \vee (\bar{A} \& B) \equiv$$

$$\equiv (A \vee \bar{A}) \& (A \vee B) \equiv$$

$$\equiv 1 \& (A \vee B) \equiv A \vee B$$

Упрощённая схема

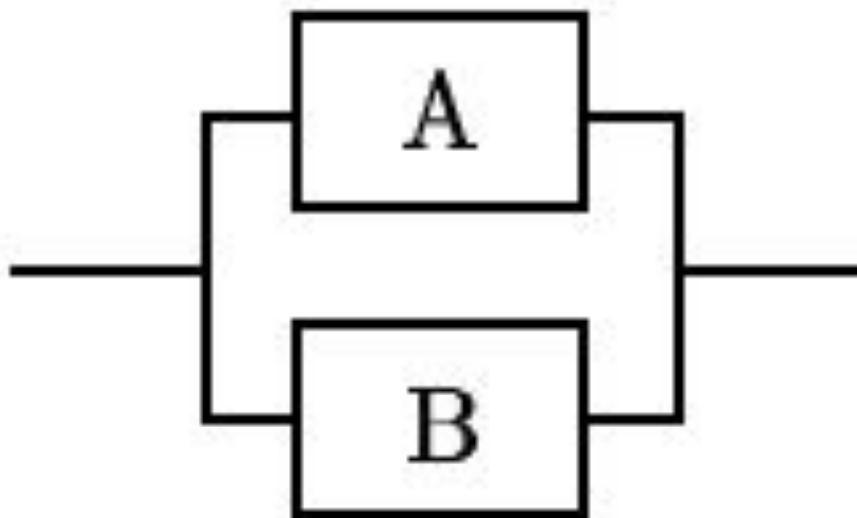


Таблица истинности

A	B	$\neg A$	$\neg A \& B$	$A \& B$	$A \vee (\neg A \& B)$	f
0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1

Синтез схем

- Построение схем с заданными электрическими свойствами