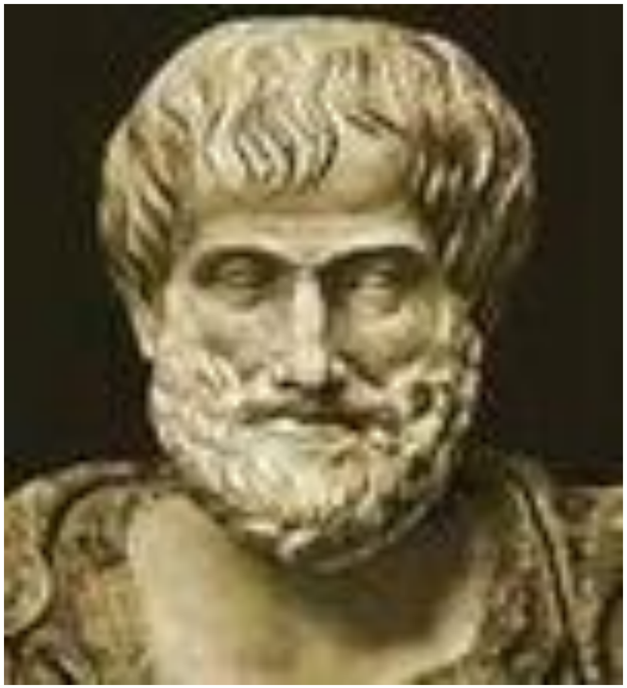
Алгебра логики

Логика

упорядоченная система мышления, которая создает взаимосвязи между заданными условиями и позволяет делать умозаключения, основываясь на предпосылках и предположениях

Аристотель



384 — 322 до н. э.

Древнегреческий философ

Основоположник логики

Исследовал различные формы рассуждений , ввел понятие **силлогизма**

Рене Декарт

1596 – 1650

Французский философ, математик, механик, физик и физиолог

Рекомендовал в логике использовать математические методы

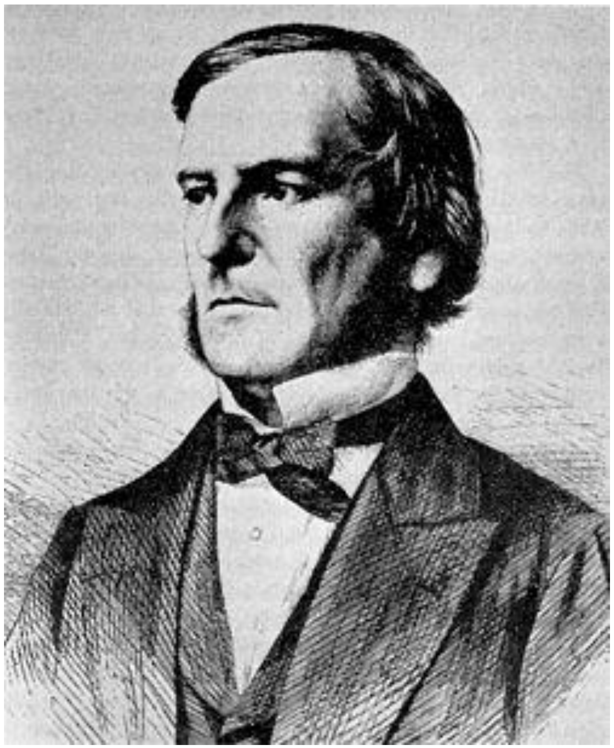
Готфрид Вильгельм Лейбниц

1646 – 1716

Немецкий философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, языковед и изобретатель

Предложил в логике использовать двоичную систему счисления и математическую символику

Джордж Буль



1815 – 1864

Английский математик и логик

Основоположник математической логики

«Математический анализ логики» 1847

Алгебра логики

- раздел математической **логики**, в котором изучаются логические операции над высказываниями
- Алгебра логики = **Булева** алгебра
- **НЕ** учитываем смысл высказываний

Высказывание

Предложение, относительно которого имеет смысл утверждать, истинно оно или ложно

Истинностные значения:

- **Ложь** или **Истина**
- **0** или **1**

Высказывания

Простые

Сложные

НЕЛЬЗ
Я

МОЖН
О

выделить некоторую часть, которая сама является высказыванием и не совпадает по смыслу со всем высказыванием

Пример

- **Простое** высказывание

  «Ивдель – это город»

- **Сложное** высказывание

  «Ивдель – это красивый и культурный город»

Обозначения

Большие буквы латинского алфавита

A – высказывание

A = 1 – высказывание истинно

A = 0 – высказывание ложно

Высказывательные переменные

Всякая большая буква латинского алфавита как некоторое переменное высказывание, которое может принимать значения 0 или 1, если не сказано, что данная буква обозначает конкретное высказывание

Логические связки

- Инверсия (отрицание)
- Конъюнкция (и)
- Дизъюнкция (или)
- Импликация (следование)
- Эквиваленция

Инверсия (отрицание)

- Нет; не; неверно, что…

¬, ’ , □

x	¬x
0	1
1	0

Пример

- **А** = «Ивдель – культурный город!»

Инверсия

- **¬ А** = «Неверно, что Ивдель – культурный город!»

Конъюнкция

- И; а; но…

&, Λ, ·

Логическое умножение

x	y	x & y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример

- **А** = «В Ивделе светит солнце»
- **В** = «В Ивделе идёт дождь»

Конъюнкция

- **А & В** = «В Ивделе светит солнце и идёт дождь»

Задания

- Известно, что высказывание **A&B** истинно.

Что можно сказать об истинности высказываний **A** и **B**?

- Известно, что высказывание **A&B** ложно.

Что можно сказать об истинности высказываний **A** и **B**?

Дизъюнкция

- Или; либо…

$\vee$

Логическое сложение

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пример

- **A** = «В Ивделе светит солнце»
- **B** = «В Ивделе идёт дождь»

Дизъюнкция

- **A** $\lor$ **B** = «В Ивделе светит солнце или идёт дождь»

Задания

- Известно, что высказывание **A**$\vee$**B** истинно.

Что можно сказать об истинности высказывания **A** $\wedge$**B**?

- Известно, что высказывание **A**$\vee$**B** ложно.

Что можно сказать об истинности высказывания **A** $\wedge$**B**?

Импликация

- Следует; влечет; если.. то..; тогда; вытекает..

$\Rightarrow, \rightarrow$

x	y	$x \Rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример

- **A** = «В Ивделе идёт дождь»
- **B** = «В Ивделе мокрые улицы»

Импликация

- **A ⇒ B** = «В Ивделе идёт дождь, следовательно, в Ивделе мокрые улицы»

Задания

- Известно, что высказывание **A⇒B** истинно.

Что можно сказать об истинности высказываний **A** и **B**?

- Известно, что высказывание **A⇒B** ложно.

Что можно сказать об истинности высказываний **A** $\wedge$ **B** и **A** $\vee$ **B**?

Эквиваленция

- Эквивалентно; равносильно; если и только если; тогда и только тогда; в том, и только в том случае…

$\Leftrightarrow, \sim$

x	y	x ~ y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример

- **A** = «В Ивделе идёт дождь»
- **B** = «В Ивделе мокрые улицы»

Эквиваленция

- **A ⇔ B** = «В Ивделе идёт дождь тогда и только тогда, когда в Ивделе мокрые улицы»

Задание

- Известно, что высказывание **A~B** истинно.

Что можно сказать об истинности высказываний **¬A ~B** и **A→B**?

Формулы

1) большие буквы латинского алфавита, снабжённые, быть может, штрихами или индексами и обозначающие высказывания или высказывательные переменные

Формулы

2) Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – формулы, то выражения

$\neg a$, $a \mathbin{\&} b$, $a \vee b$, $a \to b$, $a \sim b$

тоже являются формулами

3) Других формул нет

Приоритет логических связок

- Инверсия
- Конъюнкция
- Дизъюнкция
- Импликация и эквиваленция

Логическая возможность формулы

- Формула $\boldsymbol{a(A_1, A_2, \ldots, A_n)}$

Всякий набор конкретных значений истинности для букв $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Таблица логических возможностей

Таблица , содержащая перечень всевозможных логических возможностей формулы *a*

Таблица логических возможностей

Формула $a(A_1, A_2)$

A1	A2
0	0
0	1
1	0
1	1

Формула $a(A_1, A_2, A_3)$

A1	A2	A3
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Пусть ***a и b*** – две формулы, а

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ **–** все высказывательные переменные , входящие в запись хотя бы одной из этих формул.

Общей логической возможностью формул называется всякий набор конкретных значений истинности для высказывательных переменных $A_1, A_2, \ldots, A_n$

Пример

- Найти общие логические возможности формул

$$A \to \neg A \text{ и } (A \to \neg A) \,\&\, (B \vee \neg B).$$

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

Таблица истинности

Таблица ,в которой приведён перечень всевозможных логических возможностей формулы ***а*** вместе с указанием её значений в каждой логической возможности

Формулы ***a и b*** называются **равносильными**, если во всякой общей логической возможности они принимают одинаковые значения

$$\boldsymbol{a \equiv b}$$

- Формула называется ***тождественно истинной*** (***тавтологией***) , если во всех логических возможностях она принимает одно и то же значение, равное 1

$$\boldsymbol{a \equiv I}$$

- Формула называется ***тождественно ложной*** (***противоречием***) , если во всех логических возможностях она принимает одно и то же значение, равное 0

$$\boldsymbol{a \equiv 0}$$

Задача

Докажите тождественную истинность формулы

$$a \to (b \to a)$$

$a \to (b \to a)$

a	b	b→a	a→(b→a)
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

$$a \to (b \to a)$$

a	b	$b \to a$	$a \to (b \to a)$
0	0	1	
0	1	0	
1	0	1	
1	1	1	

$$a \to (b \to a)$$

a	b	b→a	a→(b→a)
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Задача

- Докажите тождественную истинность формулы

$$a \to (b \to a)$$

- Постройте таблицу истинности для формулы

$$\neg((a \to b) \& (b \to a))$$

$f = \neg((a \to b) \& (b \to a))$

a	b	a→b	b→a	&	f
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

$$f=\neg((a \rightarrow b)\&(b \rightarrow a))$$

a	b	a→b	b→a	&	f
0	0	1			
0	1	1			
1	0	0			
1	1	1			

$$f = \neg((a \to b) \& (b \to a))$$

a	b	a→b	b→a	&	f
0	0	1			
0	1	1			
1	0	0			
1	1	1			

f=¬((*a* → *b*)&(*b* → *a*))

a	b	a→b	b→a	&	f
0	0	1	1		
0	1	1	0		
1	0	0	1		
1	1	1	1		

$$f = \neg((a \to b) \& (b \to a))$$

a	b	a→b	b→a	&	f
0	0	1	1	1	
0	1	1	0	0	
1	0	0	1	0	
1	1	1	1	1	

$$f=\neg((a \rightarrow b)\&(b \rightarrow a))$$

a	b	a→b	b→a	&	f
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

1. Тождества

$$a \,\&\, a \equiv a$$

$$a \vee a \equiv a$$

2. Переместительный

$$a \,\&\, b \equiv b \,\&\, a$$

$$a \vee b \equiv b \vee a$$

3. Сочетательный

$$a \,\&\, (b \,\&\, c) \equiv (a \,\&\, b) \,\&\, c$$

$$a \lor (b \lor c) \equiv (a \lor b) \lor c$$

4. Распределительный

$$a \& (b \vee c) \equiv (a \& b) \vee (a \& c)$$

$$a \vee (b \& c) \equiv (a \vee b) \& (a \vee c)$$

5. Закон двойного отрицания

$$\neg(\neg a) \equiv a$$

6. Законы поглощения

$$a \,\&\, (a \vee b) \equiv a$$

$$a \vee (a \,\&\, b) \equiv a$$

Огастес де Морган

1806 — 1871

Шотландский математик и логик

Первый президент Лондонского математического общества

1847 – элементы логики высказываний независимо от Джорджа Буля

7. Законы де Моргана

$$\neg(a \lor b) \equiv \neg a \;\&\; \neg b$$

$$\neg(a \;\&\; b) \equiv \neg a \lor \neg b$$

8. Закон исключённого третьего

$$\neg a \vee a \equiv 1$$

9. Закон противоречия

$$\neg a \mathbin{\&} a \equiv \mathbf{0}$$

10. Свойства тавтологии и противоречия

$1 \,\&\, a \equiv a$ $\quad$ $1 \vee a \equiv 1$

$0 \,\&\, a \equiv 0$ $\quad$ $0 \vee a \equiv a$

$\neg 0 \equiv 1$ $\quad$ $\neg 1 \equiv 0$

11. Закон контрапозиции (контроппозиции)

$$a \to b \equiv \neg b \to \neg a$$

12. Правило исключения импликации

$$a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b$$

13. Правило исключения эквиваленции

$$a \sim b \equiv (a \to b) \& (b \to a)$$

Задача

- Докажите тождественную истинность формулы с помощью законов логики

$$a \rightarrow (b \rightarrow a)$$

$$a \to (b \to a) \equiv a \to \left(\bar{b} \vee a\right) \equiv$$

$$\equiv \bar{a} \vee \left(\bar{b} \vee a\right) \equiv \bar{a} \vee \bar{b} \vee a \equiv$$

$$\equiv \bar{a} \vee a \vee \bar{b} \equiv 1 \vee \bar{b} \equiv 1$$

Задача

- Упростите формулу

$$\neg((a \rightarrow b) \& (b \rightarrow a))$$

$$\neg\big((a \to b) \& (b \to a)\big) \equiv \overline{(a \to b) \& (b \to a)} \equiv$$

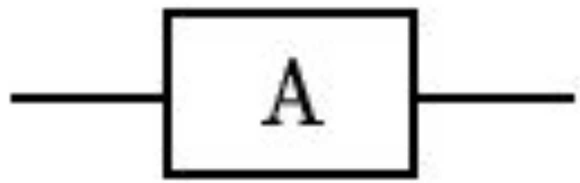
$$\equiv \overline{(a \to b)} \vee \overline{(b \to a)} \equiv \overline{(\bar{a} \vee b)} \vee \overline{\left(\bar{b} \vee a\right)} \equiv$$

$$\equiv \left(\overline{\neg a} \,\&\, \bar{b}\right) \vee \left(\overline{\neg b} \,\&\, \bar{a}\right) \equiv \left(a \,\&\, \bar{b}\right) \vee (b \,\&\, \bar{a})$$

a	b	¬a	¬b	a&¬b	¬a&b	f
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

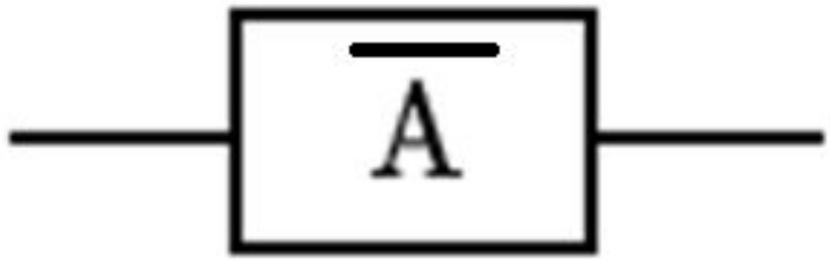
РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫЕ СХЕМЫ

Двухполюсный переключатель



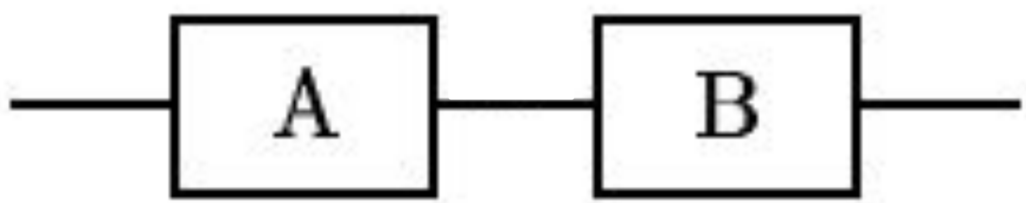
Два состояния:
«замкнуто» – **1**
«разомкнуто» – **0**

Инверсия



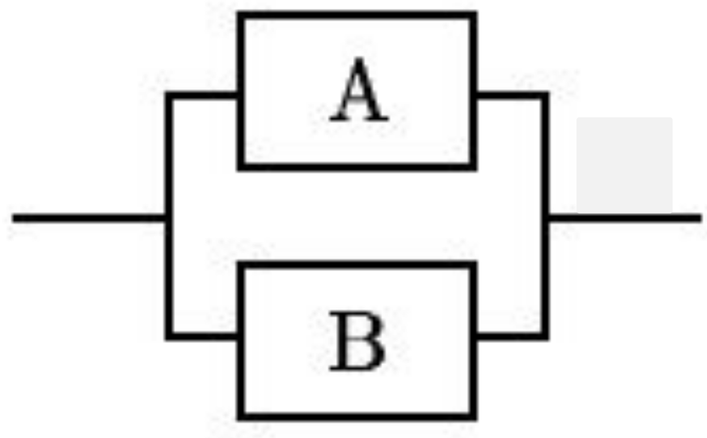
Разомкнут, когда замкнут А
Замкнут, когда разомкнут А

Последовательное включение



Конъюнкция

Параллельное включение



Дизъюнкция

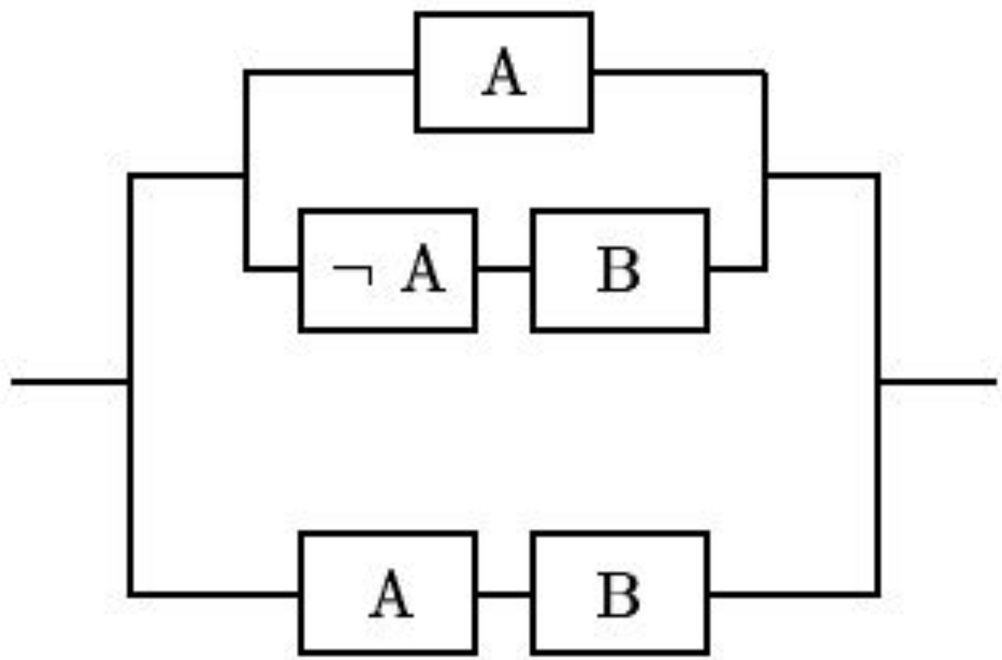
- Множество высказываний и множество переключательных схем одинаково устроены (**изоморфны**)
- Это можно использовать при решении задач

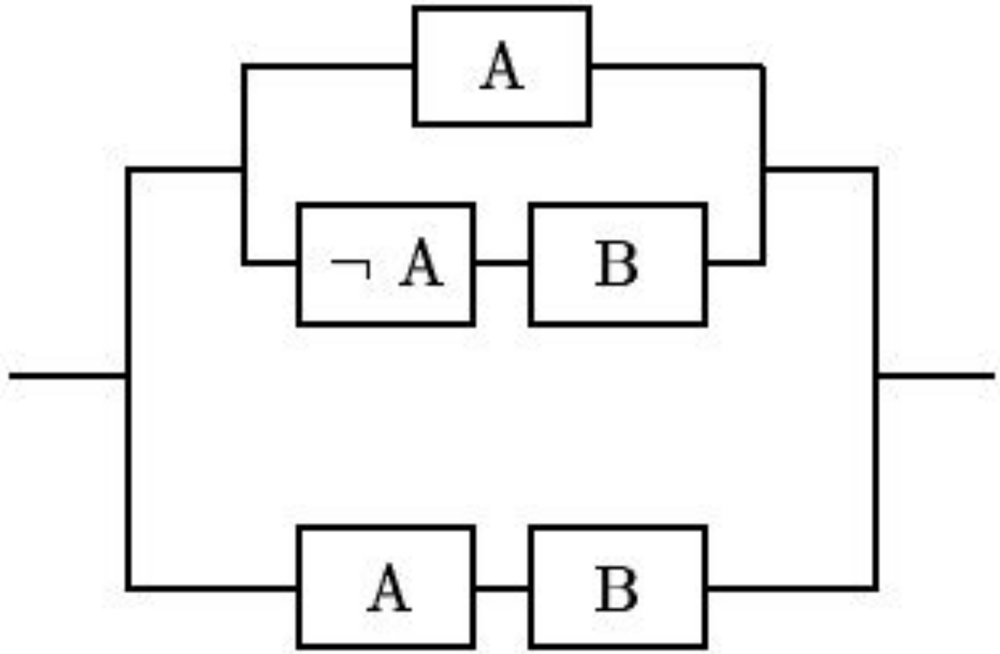
Анализ схем

- Для данной схемы строим формулу
- Упрощаем её с помощью законов логики
- Строим более простую схему, которая обладает теми же электрическими свойствами, что и исходная

Задача

Упростить схему





$$\left(A \vee (\bar{A} \& B)\right) \vee (A \& B)$$

$$\left(A \vee (\bar{A}\&B)\right) \vee (A\&B) \equiv$$

$$\equiv A \vee (\bar{A}\&B) \vee (A\&B) \equiv$$

$$\equiv A \vee (A\&B) \vee (\bar{A}\&B) \equiv$$

$$\equiv A \vee (\bar{A}\&B) \equiv$$

$$\equiv (A \vee \bar{A})\&(A \vee B) \equiv$$

$$\equiv 1\&(A \vee B) \equiv A \vee B$$

Упрощённая схема

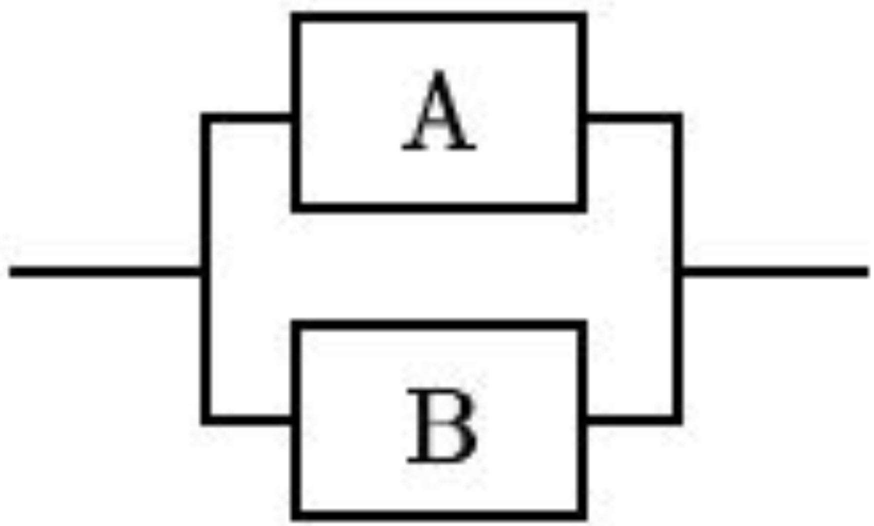


Таблица истинности

A	B	¬A	¬A&B	A&B	A∨(¬A&B)	f
0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1

Синтез схем

- Построение схем с заданными электрическими свойствами