Линейная алгебра

Литература

- В.Л. Клюшин «Высшая математика для экономистов» (учебное пособие)

- В.Л. Клюшин «Высшая математика для экономистов: задачи, тесты, упражнения»

Понятие матрицы

Определение. Числовая таблица с *m* строками и n столбцами называется *mxn* матрицей.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

3x4 - матрица

a_{ij} - элемент матрицы, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца

$a_{12}=7$ $a_{13}=\dots$ $a_{34}=\dots$

Общий вид матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} - \textit{матрица} \quad 2 \times 3$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} - \textit{матрица} \quad m \times n$$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & j & \phantom{a_{1n}} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & i \end{array}, \quad \text{сокращенно} \quad A = \|a_{ij}\|,$$

Экономический пример

Ежегодные продажи (млн. руб.)

Вид продукции	Районы продажи	
	1	2
I	98	24
II	39	15
III	22	15

$$A = \begin{pmatrix} 98 & 24 \\ 39 & 15 \\ 22 & 15 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами

(алгебра матриц)

Сложение и вычитание матриц

… производится поэлементно

$$\underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B} = \underset{m\times n}{C}; \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & -7 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число

$$B = \lambda \cdot A\ ; \ \ b_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Пример. $$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$$

Умножение строки на столбец

$$\begin{pmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n - \text{число}$$

$$\textit{Пример}: \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \times 4 + 1 \times 3 = 11$$

Экономический пример

	Вид продукции				
	1	2	3	4	5
Объём (штук)	4	2	6	2	7
Цена единицы ($)	8	4	2	3	6

$$\textit{Цена партии} = 4 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 7 \cdot 6$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \$100$$

Умножение строки на столбец

Пример. Умножить каждую строку матрицы *A* на каждый столбец матрицы *B*, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на матрицу

- При умножении матрицы A на матрицу B, каждая строка матрицы A умножается на каждый столбец матрицы B.

При этом результат умножения i-ой строки матрицы A на j-ый столбец матрицы B, записывается на пересечение i-ой строки и j-го столбца матрицы AB.

Пример

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 5 \\ -9 & -12 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \times 0 + (-3) \times 5 = -15$$

Результат умножения матриц содержит столько же строк как первый сомножитель и столько же столбцов как второй сомножитель

Связь алгебраических операций

$$(\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Вообще говоря, $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матриц

При транспонировании меняются местами строки и столбцы исходной матрицы. (Первая строка становится первым столбцом, вторая строка становится вторым столбцом и т.д.)

Матрица, транспонированная к A обозначается A' или A^t.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Пример.

Свойства операций над матрицами

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $k(A + B) = kA + kB$
4. $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$
5. $(k_1 k_2)A = k_1(k_2 A)$
6. $A + O = A$
7. $0A = O$

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $(A + B)C = AC + BC$
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. $k(AB) = (kA)B$
5. $AE = EA = A$

Специальные виды матриц

Строка

Столбец

Квадратная

Диагональная

Нулевая

Верхнетреугольная

Нижнетреугольная

Пример

Определить типы следующих матриц (выбрать из строка, столбец, квадратная, диагональная, нулевая, верхнетреугольная, нижнетреугольная).

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Определители квадратных матриц

- Определитель матрицы A – это число, обозначаемое $|A|$ и вычисляемое по конкретным правилам.

Матрица 1-го порядка – таблица, состоящая из од-ного числа и её определитель равен этому числу.

$$\textit{Матрица 2-го порядка } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

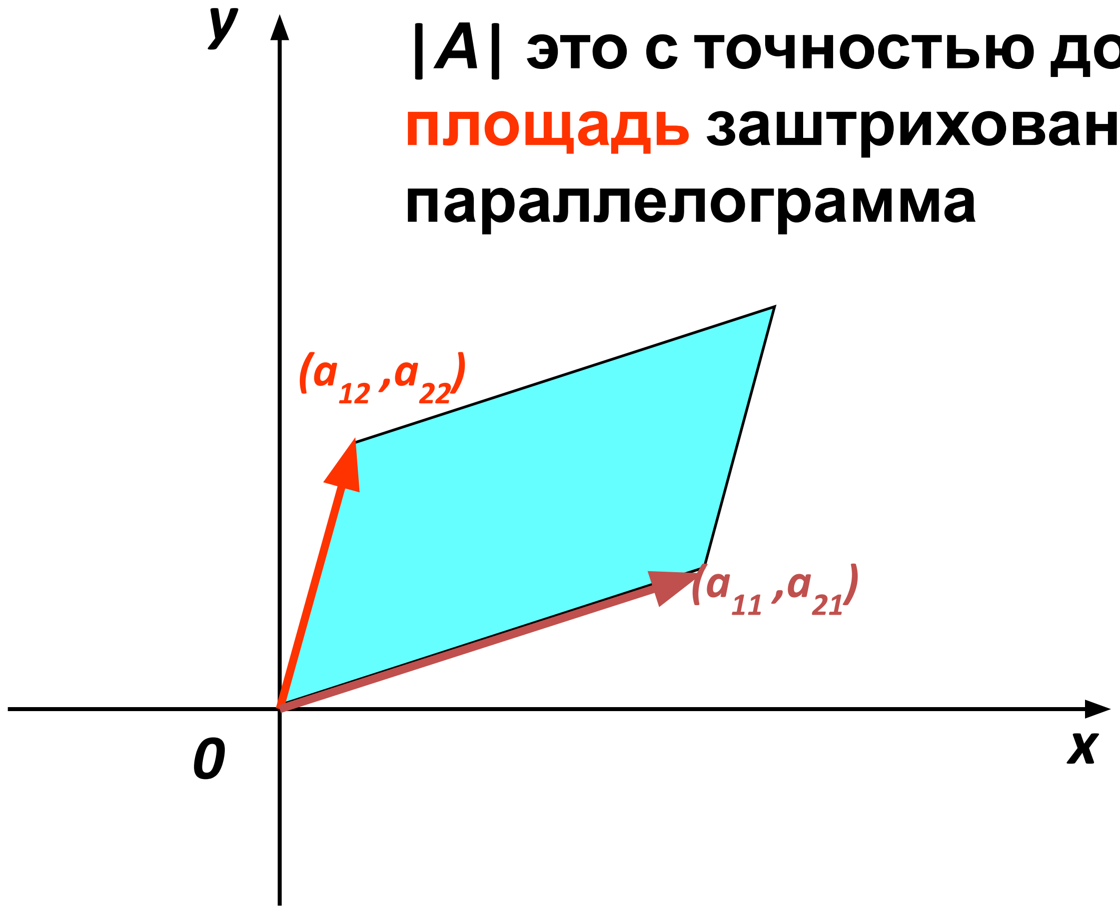
$$\textit{Её определитель } |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Числовой пример

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 2 = 17$$

Геометрический смысл определителя 2-го порядка

$|A|$ это с точностью до знака **площадь** заштрихованного параллелограмма



Решить систему уравнений:

- Для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными и можно умножить первое уравнение на коэффициент при x_2 во втором уравнении и умножить второе уравнение на коэффициент при x_2 в первом уравнении. Затем вычесть из первого уравнения второе:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7 & (\times 4) \\ x_1 + 4x_2 = 6 & (\times 3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 12x_2 = 28 \\ 3x_1 + 12x_2 = 18 \end{cases}$$

$$(8x_1 + 12x_2) - (3x_1 + 12x_2) = 28 - 18$$

$$8x_1 + \cancel{12x_2} - 3x_1 - \cancel{12x_2} = 10$$

$$5x_1 = 10$$

$$x_1 = \frac{10}{5} = 2$$

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &(a_{11}\cdot a_{22}x_1 + \cancel{a_{12}\cdot a_{22}x_2}) - \\ &-(a_{21}\cdot a_{12}x_1 + \cancel{a_{22}\cdot a_{12}x_2}) = \\ &= b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (\times a_{22}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (\times a_{12}) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}\cdot a_{22}x_1 - a_{21}\cdot a_{12}x_1 = \\ &= b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{11}\cdot a_{22}x_1 + a_{12}\cdot a_{22}x_2 = b_1\cdot a_{22} \\ a_{21}\cdot a_{12}x_1 + a_{22}\cdot a_{12}x_2 = b_2\cdot a_{12} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &(a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12})x_1 = \\ &= b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12} \end{aligned}$$

Решить систему уравнений

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Теорема Крамера

•

Пусть дана система уравнений $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$.

Если $|A| \neq 0$, где A обозначает матрицу коэффициентов при неизвестных, то

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|},$$

где матрицы A_1 и A_2 получаются из матрицы A заменой первого и второго столбца на столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ свободных членов соответственно

Пример

- Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$ по правилу Крамера.

Разложение определителя по элементам строки или столбца

-

Минором M_{ij} определителя матрицы A называется такой новый определитель, который получается из данного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Разложение определителя по элементам строки или столбца

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

Пример

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -6$$

Пример

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 = -5$$

Пример

Найти миноры M_{22} и M_{31} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Разложение определителя по элементам строки или столбца

- **Алгебраическим дополнением** A_{ij} элемента a_{ij} определителя матрицы A называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$

т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Пример: $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33}$$

Разложение определителя по элементам строки или столбца

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = -(-6) = 6$$

Разложение определителя по элементам строки или столбца

Теорема Лапласа. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}\ (\textit{разложение по элементам } 1-\textit{ой строки})$$

$$|A| = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}\ (\textit{разложение по элементам } 2-\textit{го столбца})$$

Разложение определителя по элементам строки или столбца

- Пример. Найти определитель матрицы A при помощи разложения по элементам третьего столбца.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании: $|A| = |A'|$

Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

Свойства определителей

2. Определитель меняет знак при перестановки любых двух строк или любых двух столбцов.

Пример:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

3. Общий множитель элементов какой-либо строки или столбца можно вынести за знак определителя.

Пример: $\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5\cdot 1 & 5\cdot 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= 5\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

4. Определитель матрицы, содержащий строку или столбец, целиком состоящий из нулей, равен нулю.

Пример: $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Свойства определителей

5. Определитель матрицы, содержащий равные или пропорциональные строку и столбец, равен нулю.

Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$

Свойства определителей

- 6. Если каждый элемент некоторой строки матрицы A представим в виде суммы двух слагаемых, то определитель $|A|$ есть сумма определителей $|B| + |C|$, где все строки матриц B и C, кроме указанной строки, совпадают с соответствующими строками матрицы A, а все элементы указанной строки матриц B и C являются, соответственно, первыми и вторыми слагаемыми указанной строки матрицы A.

Свойства определителей

Пример.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a+x & b+y & c+z \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x & y & z \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{60} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 2+(-1) & 3+(-1) & 5+0 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{28} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 7 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{32}$$

Свойства определителей

7. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же множитель.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+3\cdot 10 & 2+4\cdot 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3-1\cdot 3 & 4-2\cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} l_2 - 3l_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3-1\cdot 3 & 4-2\cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

8. Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Пример:
$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 11 \\ 0 & 4 & 4{,}2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Свойства определителей

9. (Теорема Лапласа.) Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}}_{\text{разложение по 1–ой строке}} = \underbrace{a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}}_{\text{разложение по 3–му столбцу}}$$

Свойства определителей

10. Если a_{ij} является единственным ненуле-вым элементом в своей строке или столбце, то

$$|A| = a_{ij} \cdot A_{ij} = a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Пример: $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 11 \\ 0 & 4 & 4,2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4,2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 20 = 60$

Свойства определителей

11. Определитель произведения матриц равен произведению определителей:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

Обратная матрица

- Число 1 обладает свойством:

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Для любого числа a.

Например, $1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = 5$

Для любого ненулевого числа a определено

Число, обратное к a (обозначается $\frac{1}{a}$ или a^{-1})

Обратная матрица

Вопрос: существует ли аналог числа 1 и аналог обратного числа среди матриц?

Обратная матрица

Квадратная матрица называется **диагональной**, если все её элементы вне главной диагонали равны нулю.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица называется **единичной**, если все её диагональные элементы – единицы.

Пример:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

- Единичная матрица обозначается E или I.

Единичная матрица размера $n \times n$ обозначается так же E_n или I_n:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

- Если для матрицы A определено произведение $A \cdot E$, то $A \cdot E = A$

Аналогично, $E \cdot A = A$

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

- Матрица называется **обратной** к матрице A и обозначается A^{-1}, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Если A^{-1} существует, то матрица A называется **обратимой**.

Обратная матрица

Пример: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$ так как

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

Теорема. Обратная матрица существует только для невырожденной квадратной матрицы.

Пример: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ существует, так как

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Обратная матрица второго порядка

Теорема.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Пример. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 6 - 4 \cdot 5} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}$$

Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы

- Пусть A – квадратная матрица.

1. Найти $|A|$. Если $|A| = 0$, то A^{-1} не существует.
2. Для каждого элемента матрицы A вычислить его алгебраическое дополнение. Записать все алгебраические дополнения в виде матрицы и транспонировать её. Получится **присоединённая** матрица, обозначаемая $\overline{A}$ или $\widetilde{A}$ или A^{*}

Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы

Итак,

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы

3. Обратная матрица вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$$

Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы

- Пример. Найти A^{-1} методом присоединённой матрицы, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение.

1. $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \neq 0,$$ следовательно A^{-1} сущуствует.

Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы

2.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы

2. (продолжение)

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -14 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы

(продолжение)

$$A^{*} = \begin{pmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы

3.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}=\frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14}\\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14}\\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}$$

Нахождение обратной матрицы методом присоединённой матрицы

Проверка: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14} \\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

Системы линейных уравнений

- В общем случае система с m уравнениями и n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1, \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \ldots + a_{mn}\cdot x_n = b_{m}. \end{cases} \quad (1)$$

Системы линейных уравнений

Структурные составляющие:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица коэффициентов

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \textbf{столбец неизвестных} \; ; \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} - \textbf{столбец свободных членов}$$

Системы линейных уравнений

Пример:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ \quad\;\; - x_2 + 2x_3 = -7 \\ 3x_1 \qquad\quad + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Здесь *m=3*, *n=3*,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Системы линейных уравнений

Решением системы называется такой набор чисел (c_1, c_2,…, c_n), что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, …, c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Если система (1) имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной; система, не имеющая ни одного решения, называется несовместной.

Системы линейных уравнений

Система называется определенной, если она имеет единственное решение; и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Метод обратной матрицы

Система уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ \quad\;\; - x_2 + 2x_3 = \;7 \\ 3x_1 \qquad\quad + 7x_3 = 0 \end{cases}$

Равносильна матричному уравнению

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

Метод обратной матрицы

- Мы сможем решить систему, если сможем решить данное матричное уравнение $AX = B$.

$$A \cdot X = B$$

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

$$(\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{E}) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Метод обратной матрицы

В нашем случае

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Метод обратной матрицы

- Теорема. Если число уравнений совпадает с числом неизвестных и определитель $|A| \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение $X = A^{-1} \cdot B$