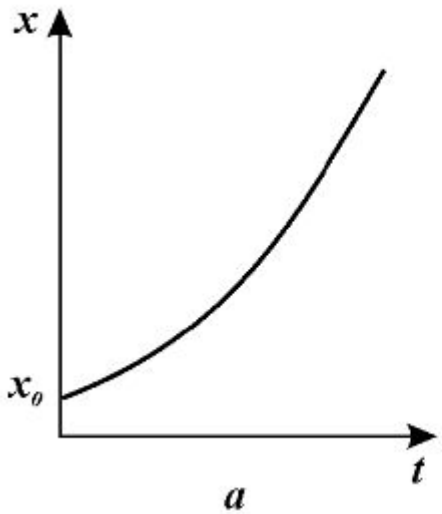
Принцип ієрархії моделей

експонентне зростання

$$\frac{dx}{dt} = rx.$$



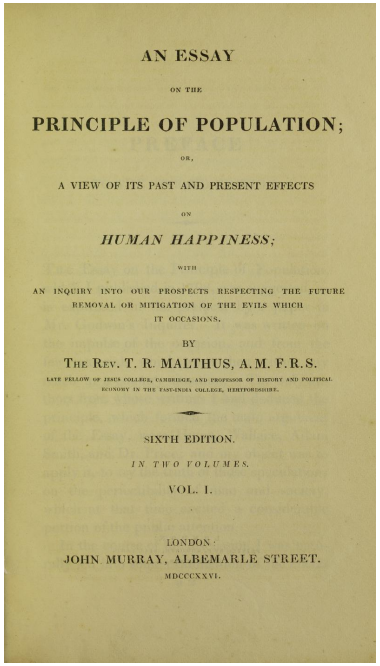
a

Augustin Louis Cauchy
1789-1857

$$y' = f(x, y)$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t)$$



AN ESSAY

ON THE

PRINCIPLE OF POPULATION;

OR,

A VIEW OF ITS PAST AND PRESENT EFFECTS

ON

HUMAN HAPPINESS;

WITH

AN INQUIRY INTO OUR PROSPECTS RESPECTING THE FUTURE REMOVAL OR MITIGATION OF THE EVILS WHICH IT OCCASIONS.

BY

THE REV. T. R. MALTHUS, A.M. F.R.S.

LATE FELLOW OF JESUS COLLEGE, CAMBRIDGE, AND PROFESSOR OF HISTORY AND POLITICAL ECONOMY IN THE EAST-INDIA COLLEGE, HERTFORDSHIRE.

SIXTH EDITION.

IN TWO VOLUMES.

VOL. I.

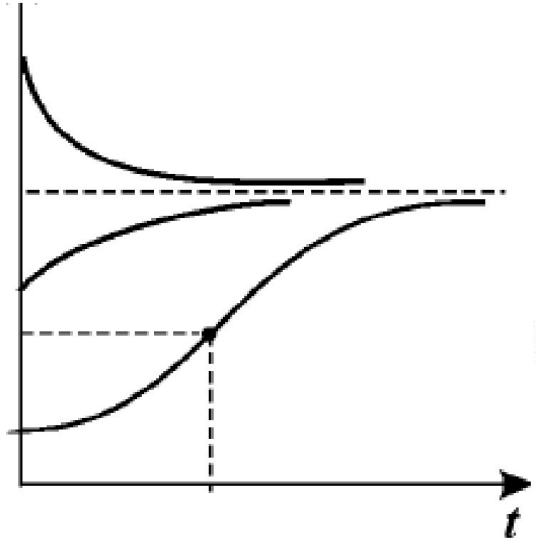
LONDON:
JOHN MURRAY, ALBEMARLE STREET.
MDCCCXXVI.

Томас Роберт Мальтус
1766-1834

обмежене зростання

Pierre Francois Verhulst

1804-1849

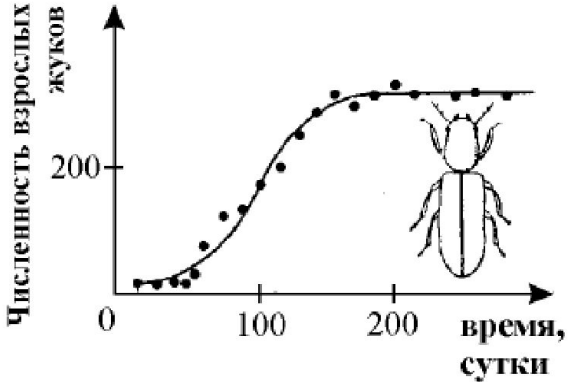


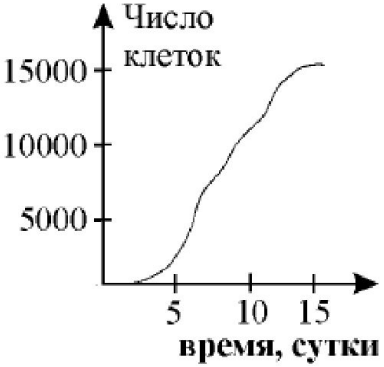
$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

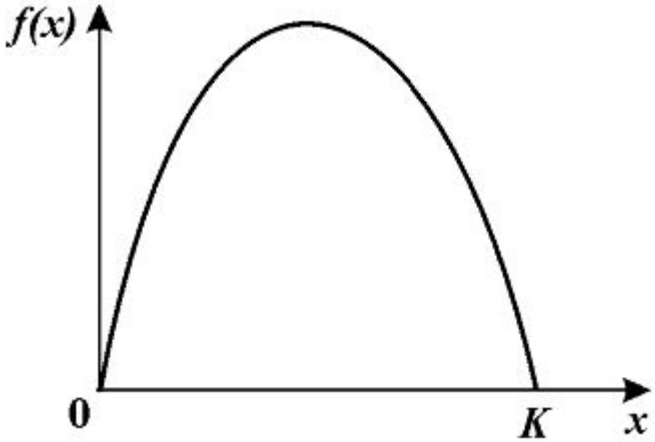
$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}}$$

$$f(\overline{x}) = 0 \qquad \overline{x}_1 = 0, \quad \overline{x}_2 = K$$

$$a = f'(x)\Big|_{x=\overline{x}} = r - \frac{2r\overline{x}}{K}$$







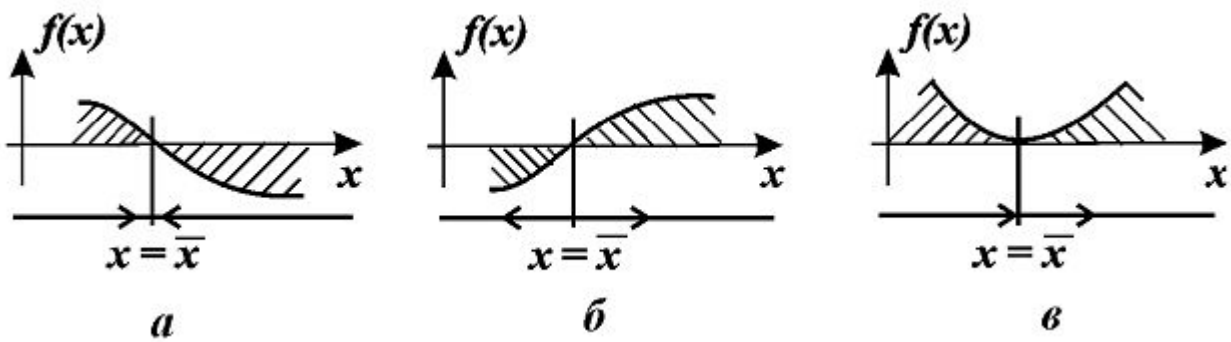
Дослідження стійкості стаціонарного стану

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \longrightarrow \frac{d(\overline{x}+\xi)}{dt} = f(\overline{x}+\xi).$$ з урахуванням $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\overline{x}} = 0$ та $\xi/\overline{x} \ll 1$

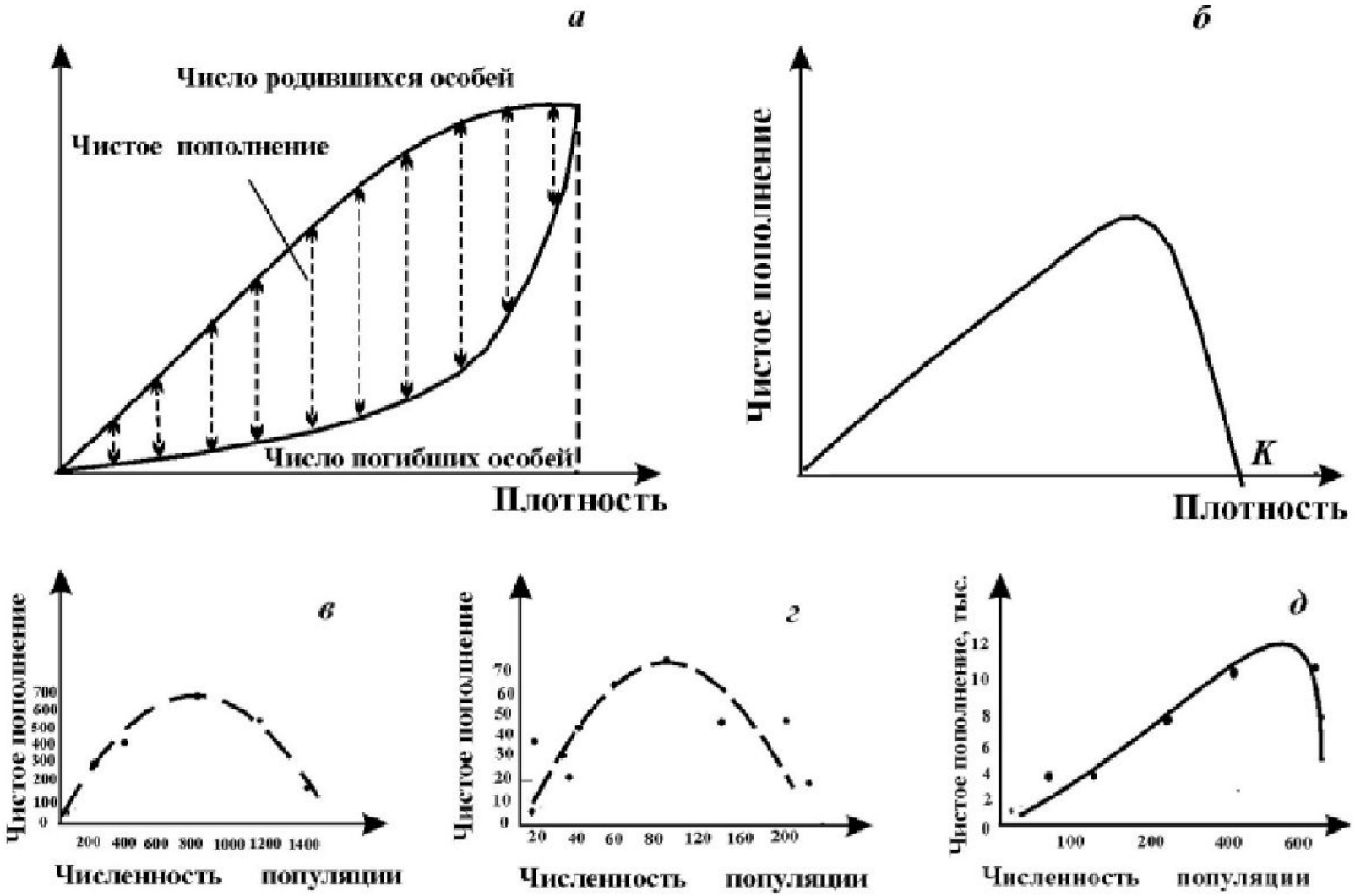
$$\frac{d\xi}{dt} = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})\xi + \frac{1}{2}f''(\overline{x})\xi^2 + \ldots$$ або

$$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots,$$ де $a_1 = f'(\overline{x}),\ a_2 = \frac{1}{2}f''(\overline{x}),\ \ldots$

$d\xi/dt = a_1\xi, \longrightarrow \xi(t) = c\cdot\exp(\lambda t),$ де $\lambda = a_1 = f'(\overline{x}),\ c$ - довільна стала



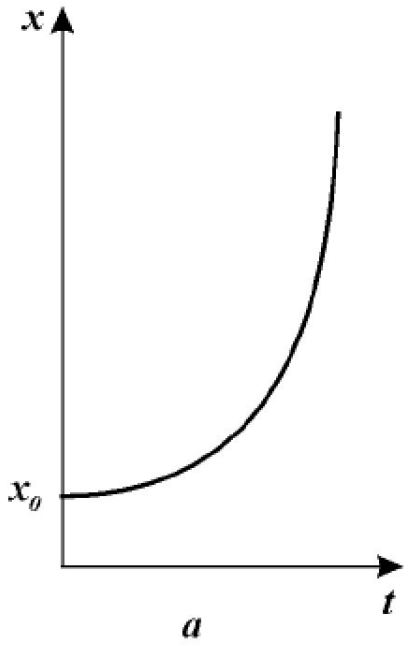
поповнення

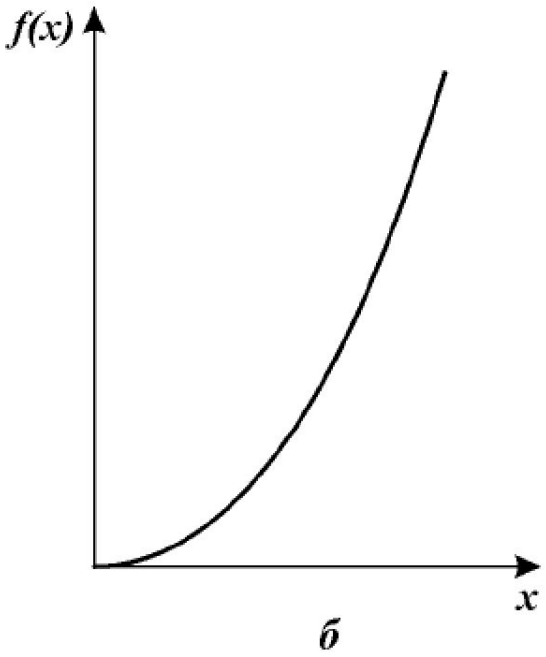

а
Число родившихся особей
Чистое пополнение
Число погибших особей
Плотность
б
Чистое пополнение
К
Плотность
в
Чистое пополнение
700
600
500
400
300
200
100
0
200 400 600 800 1000 1200 1400
Численность популяции
г
Чистое пополнение
70
60
50
40
30
20
10
0
20 40 60 80 120 160 200
Численность популяции
д
Чистое пополнение, тыс.
12
10
8
6
4
2
0
100 200 400 600
Численность популяции

моделі з найменшою критичною чисельністю

$$\frac{dx}{dt} = rx^2$$

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x}$$

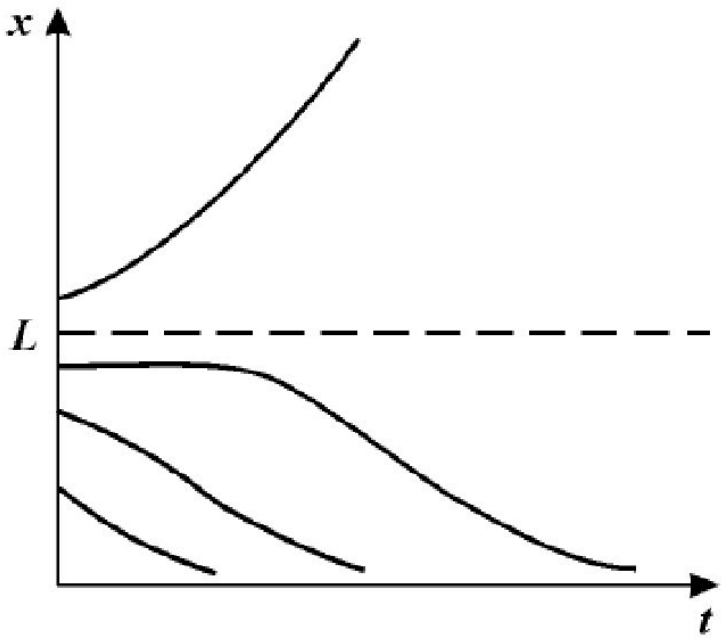




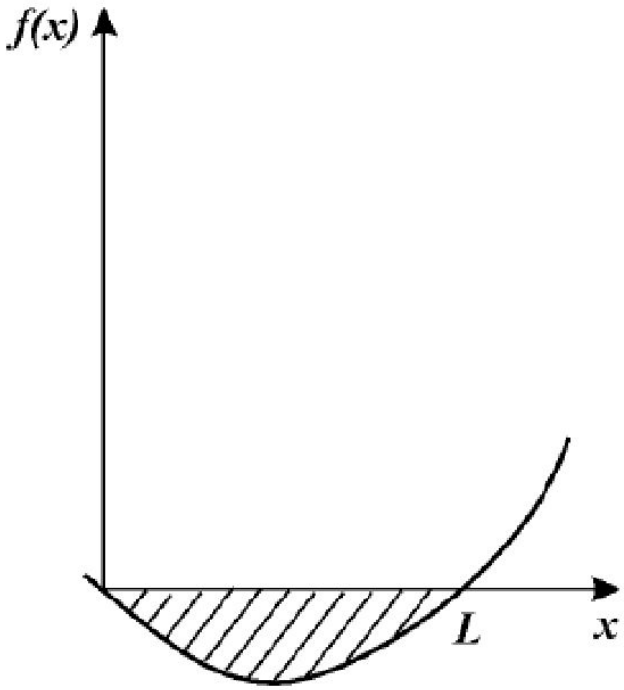
моделі з найменшою критичною чисельністю

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx$$

$$\overline{x} = 0 \qquad \overline{x} = d\beta(\alpha\beta - d\tau) = L$$



а

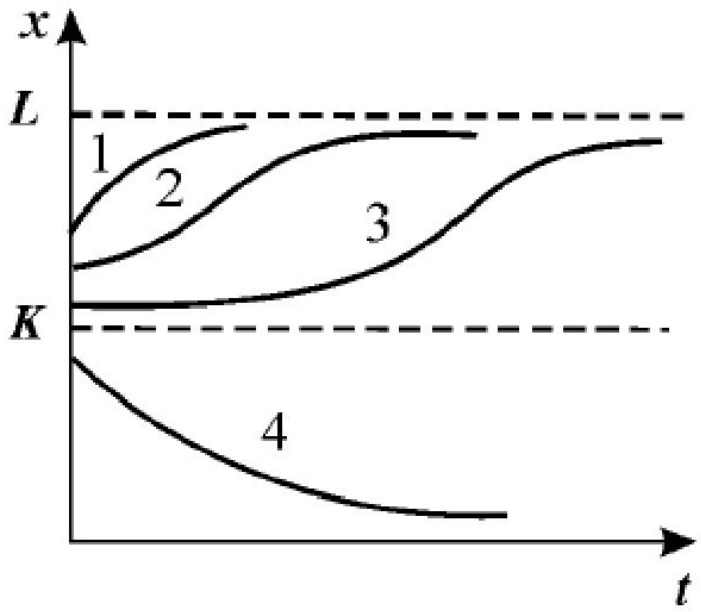


б

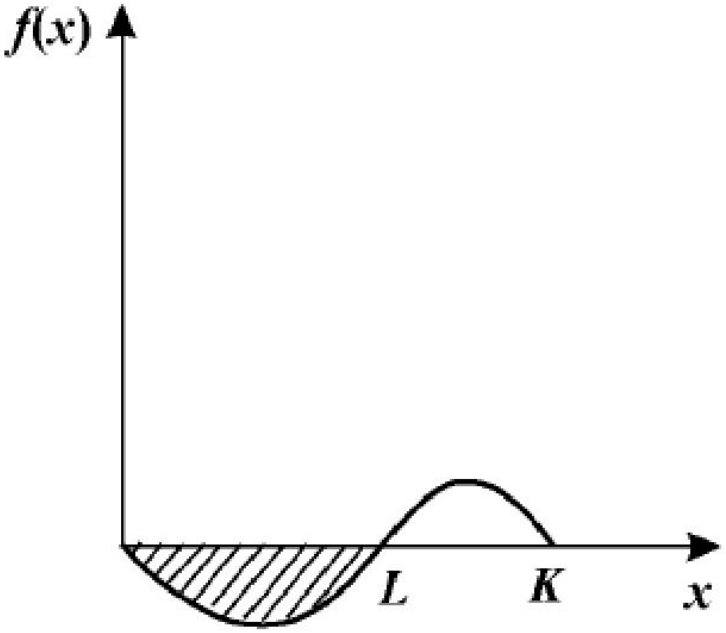
моделі з найменшою критичною чисельністю

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2$$

$$\overline{x} = 0 \quad \overline{x} = K \quad \overline{x} = L$$



а



б

модель чисельності народонаселення

модель чисельності народонаселення

неоліт ⟶ 10-15 млн

РХ ⟶ 100-250 млн

1700 ⟶ 600 млн

за 1с народжується 21

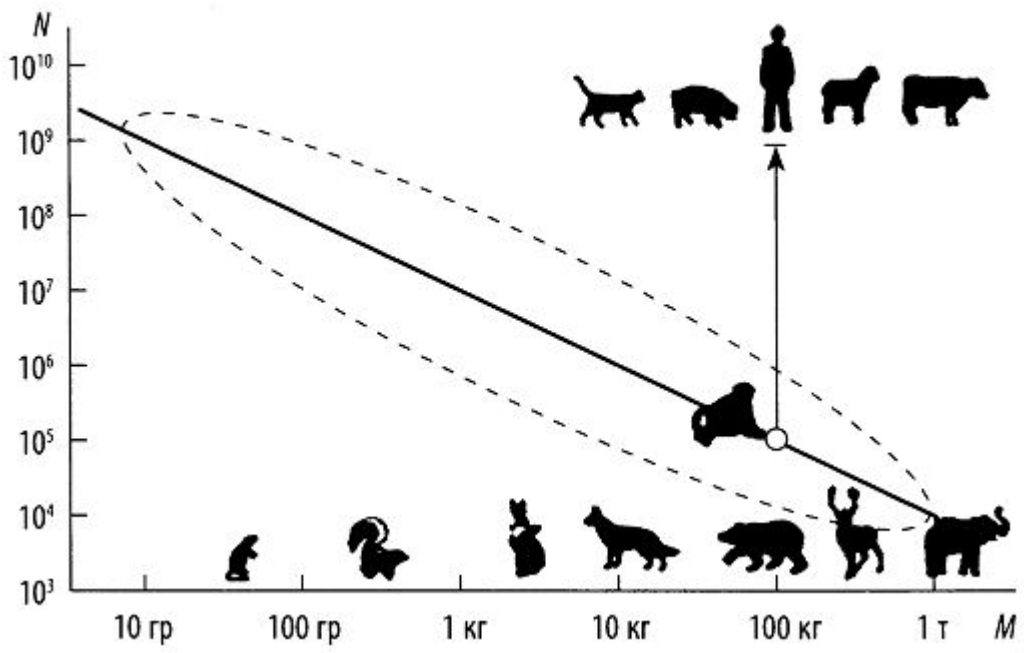
за 1с вмирає 18

щодня +250000

відн. швидкість 2,1 ⟶ 1,6

абс. швидкість 90 ⟶ 110 млн

за останні 40 років ⟶ вдвічі



Человек разумный *(Homo sapiens sapiens),*

царство - животных,

тип - хордовых,

класс - млекопитающих,

подкласс - плацентарных,

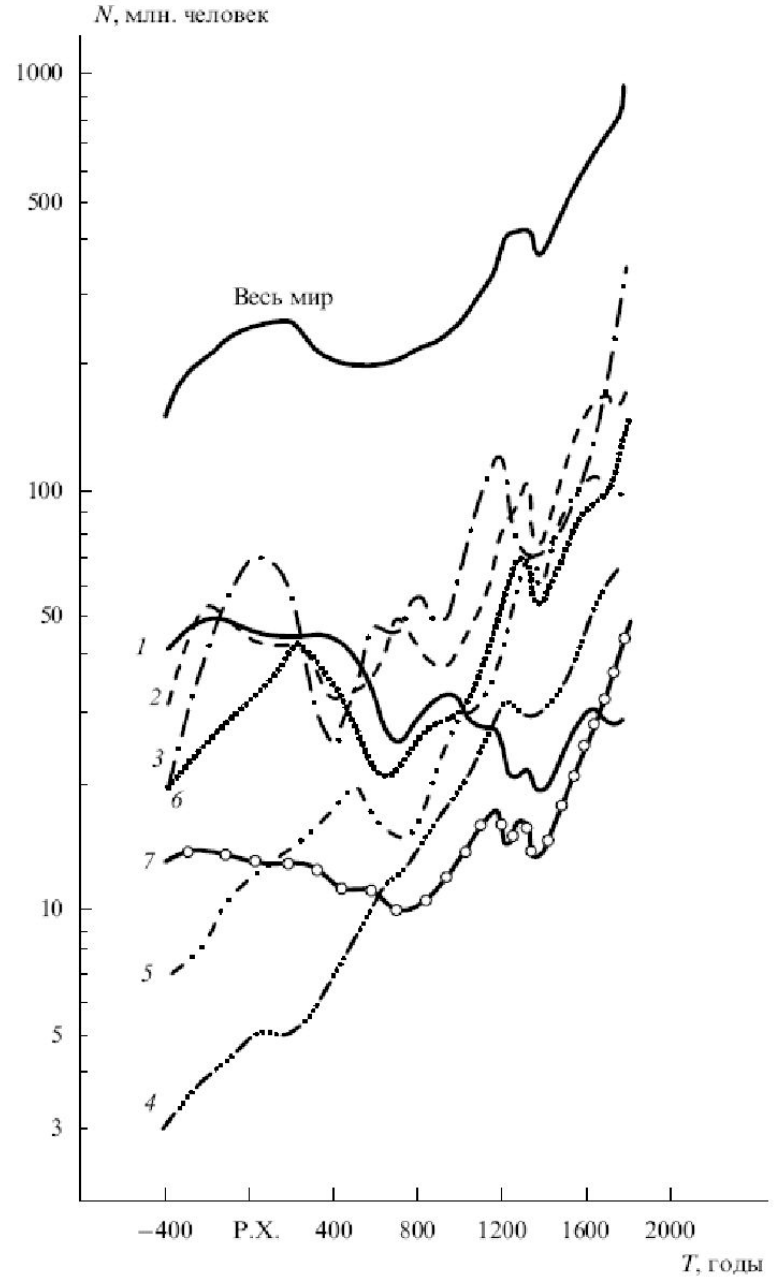
отряд - приматов,

семейство - гоминид.

Другие примати - понгиды (крупные человекообразные обезьяны: орангутаны, шимпанзе, гориллы)

- хилобатиды (малые человекообразные обезьяны: гиббоны.

Історична динаміка народонаселення



Рост численности населения мира и его крупных регионов от 400 г. до Р.Х. до 1800 г. [1]. *1* — Юго-Западная Азия, *2* — Индостанский субконтинент, *3* — Китай, *4* — остальная Азия, *5* — Африка (без Северной), *6* — Европа (без СССР), *7* — СССР

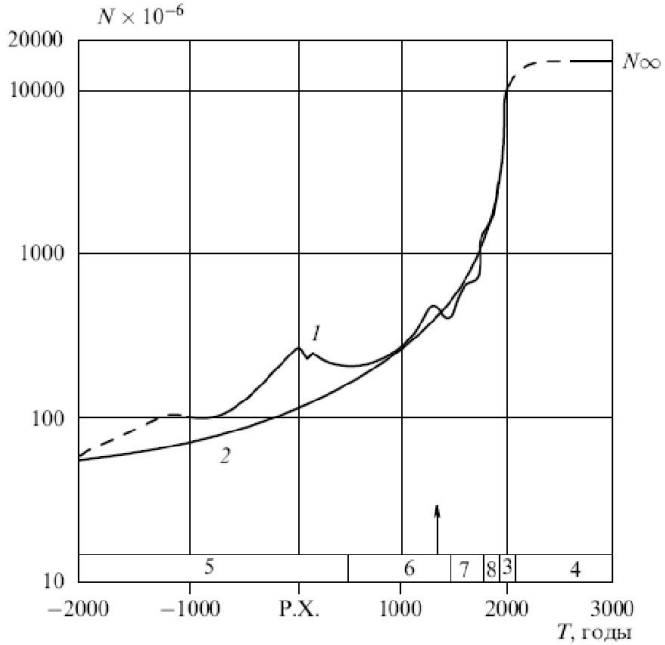
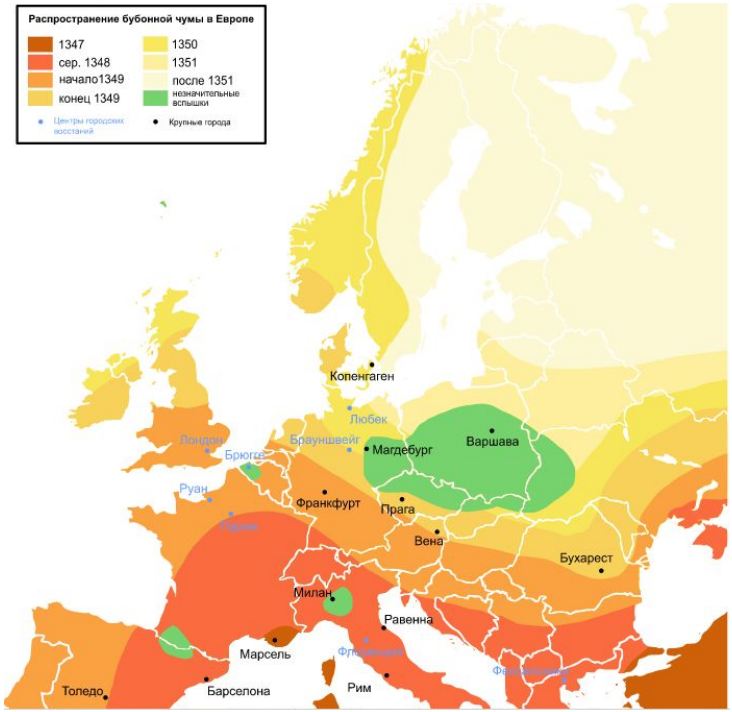
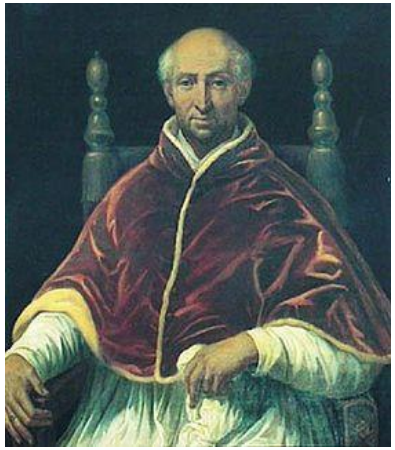


Рис. 1. *1* — население мира от 2000 г. до Р.Х. [1, 26], *2* — режим с обострением, 3 — демографический переход, 4 — стабилизация населения, 5 — древний мир, 6 — средние века, 7 — новая и 8 — новейшая история, ↑ — чума



пустеля Гобі
1320



Папа Климент VI (198),
січень 1348

Пітер Брейгель Старший
“Тріумф смерті”, 1562 рік

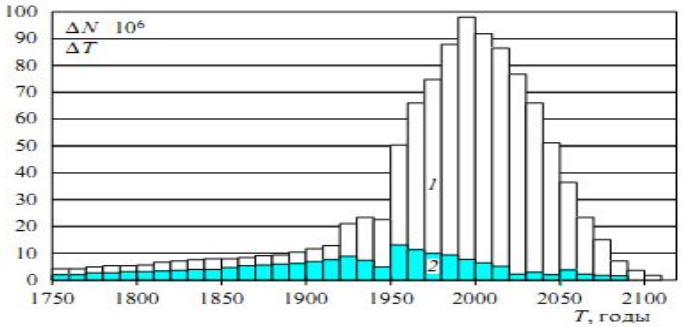
Чумний стовп у Відні

1346, Кафу,
Хан Джанібек

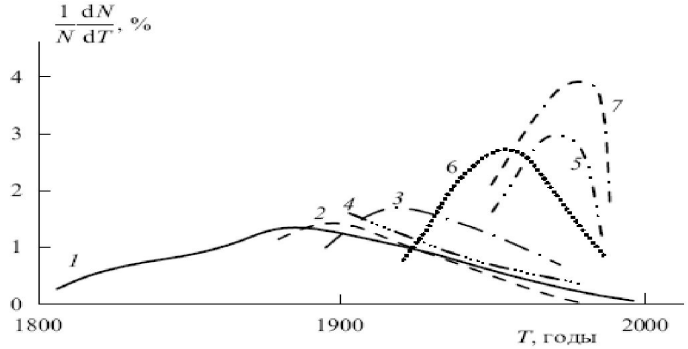
демографічний перехід

1965 г. ⟷ 2049 г

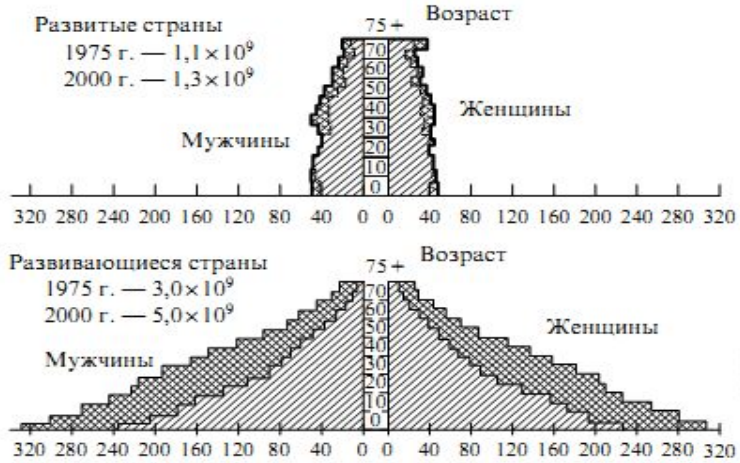
84 г



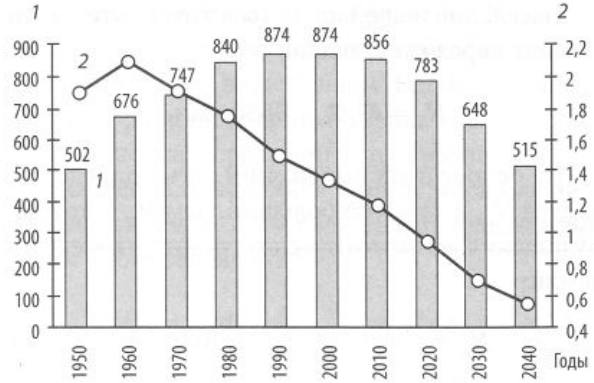
Демографический переход. Прирост населения мира с 1750 г. по 2100 г. осредненный за декады. *1* — развивающиеся, *2* — развитые страны



Прохождение населения стран через демографический переход. *1* — Швеция, *2* — Германия, *3* — СССР, *4* — США, *5* — Маврикий, *6* — Шри Ланка, *7* — Коста Рика



Распределение населения по возрастам и полу для 1975-го и 2000-го годов по расчетам Национального бюро переписей США.



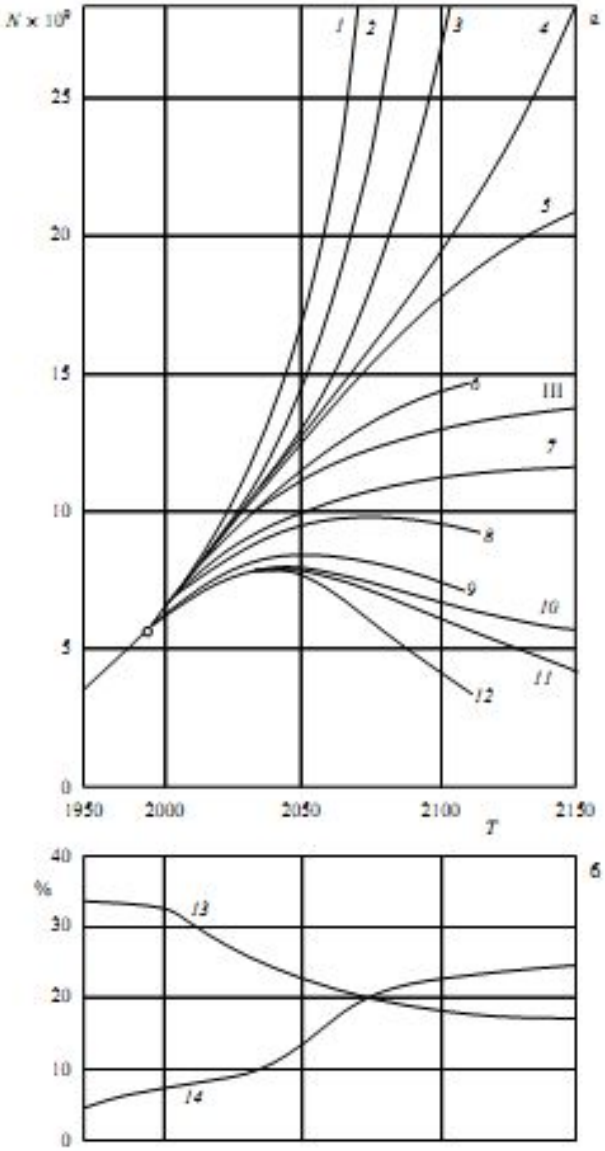
1 — абсолютный прирост населения, усредненный за декаду, млн; **2** — относительный прирост, % в год (данные ООН)

Таблица 1. Данные ООН (1992 г.)

Регион	Население (млрд.)			Проценты населения (середина 1990-х годов)			
	1990	2000	2025	Дети (0 ÷ 4)	Молодежь (15 ÷ 24)	Пожилые > 65	Городские жители
Население мира	5,3	6,3	8,5	12	19	6	45
Развитые страны	1,2	1,3	1,4	7	15	12	73
Развивающиеся	4,1	5	7,1	13	20	4	37
Европа	0,50	0,51	0,51	6	15	13	73

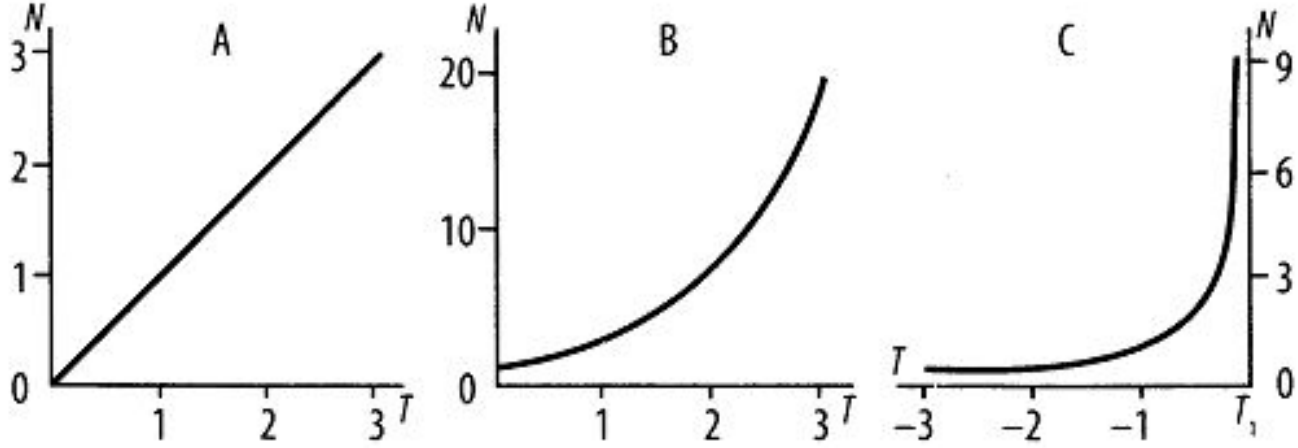
Таблица Рост населения мира

Год	$10^{-6}N$	$10^{-6}N_{III}$
$-4{,}4 \times 10^6$	(0)	0
$-1{,}6 \times 10^6$	0,1	0,1
−35000	1÷5	5
−15000	3÷10	11
−7000	10÷15	21
−2000	47	46
0	100÷230	93
1000	275	185
1500	450	366
1650	550	519
1750	728	717
1800	907	887
1850	1170	1158
1900	1617	1656
1920	1811	1992
1930	2020	2211
1940	2295	2480
1950	2515	2812
1955	2752	3009
1960	3019	3230
1965	3336	3478
1970	3698	3758
1975	4080	4073
1980	4450	4426
1985	4854	4820
1990	5292	5253
1995	5765	5724
2000	6251	6265
2005	6729	6746
2010	7561	7572
2025	8504	8749
2050	10019	10427
2075	10841	11462
2100	11185	12034
2125	11390	12398
2150	11543	12648
2200	11600	12946
2500	LN ↑	13536



(а) Проекции населения мира согласно прогнозам ООН [27] и IIASA [28]. *1* — постоянная фертильность, *2* — постоянная скорость роста, *3* — кризис III Мира, *4* — высокий вариант ООН, *5* — средневысокий вариант ООН, *6* — медленный спад фертильности, *7* — средний спад фертильности, *8* — медленное снижение смертности, *9* — постоянная смертность, *10* — среднениэкий вариант ООН, *11* — низкий вариант ООН, *12* — быстрое снижение фертильности, III — модель III, о — настоящее время. (б) Изменения возрастного состава населения мира при демографическом переходе. *13* — моложе 15 лет, *14* — старше 65 лет по среднему варианту ООН [27]

Закони зростання



$$\frac{dN}{dT} = A, N = AT \quad \frac{dN}{dT} = \frac{N}{T_e}, N = N_0 \exp\frac{T}{T_e}, \frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{C}, N = \frac{C}{T_1 - T}$$

математична модель росту народонаселення Землі

$$N = \frac{179 \times 10^9}{(2027 - T)^{0,99}} \qquad C = (179 \pm 0,14) \times 10^9, \qquad T_1 = 2027 \pm 5$$
$$\alpha = -0,99 \pm 0,009$$

Foerster, von H *et al.*
Doomsday : Friday, 13th November, AD 2026.
Science **132** 1291 (1960)

$$N = \frac{C}{T_1 - T} = \frac{200 \times 10^9}{2025 - T}$$

Hoerner, von S *J. of British Interplanetary Society* **28** 691 (1975)

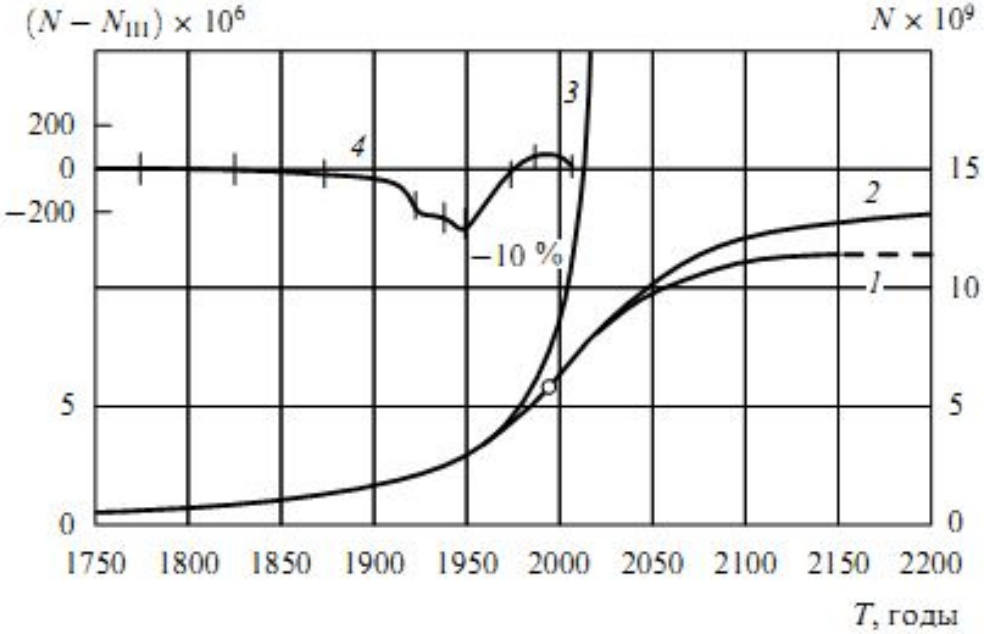
A: $$\frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{C} + \frac{1}{\tau}$$

B: $$\frac{dN}{dT} = \frac{C}{(T_1 - T)^2}$$

C: $$\frac{dN}{dT} = \frac{C}{(T_1 - T)^2 + \tau^2}$$

$$C = (186 \pm 1) \times 10^9, \qquad T_1 = 2007 \pm 1$$

$$\tau = 42 \pm 1, \qquad K = \left(\frac{C}{\tau}\right)^{1/2} = 67000.$$



Рост населения мира с 1750 г. по 2200 г. *1* — прогноз ООН и IIASA, *2* — модель, *3* — уход на бесконечность (2), *4* — разница между населением мира и расчетом по модели III.
○ — настоящее время

математична модель росту народонаселення Землі

$$T_0 = T_1 - \frac{\pi}{2} K\tau = T_1 - \frac{\pi}{2}\sqrt{C\tau} \longrightarrow$$

$T_0 = -4{,}4 \times 10^6$

$\Delta T_A = K\tau = 2{,}8$ миллиона лет

Homo habilis

$N_{A,B} = 1{,}04 \times 10^5$

$1965 = (\pi/4)K^2 = 3{,}5$ миллиарда

$N_\infty = \pi K^2 = 14 \times 10^9$

$P_{01} \simeq K^2 \ln K = 100 \times 10^9$.

$T_* = T_1 - \tau\sqrt{K} \simeq 9000$ лет до н.э. $\longrightarrow$ 1/2

$P_A = 5{,}5 \times 10^9$

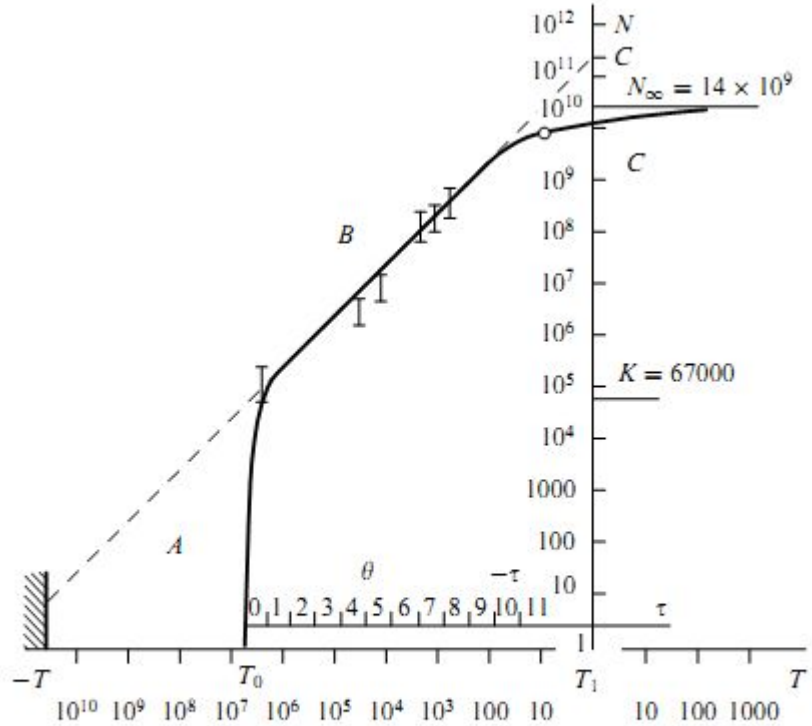


Рис. 5. Население мира от возникновения человечества до предвидимого будущего.

зміна масштабу історичного часу

-1,6 млн 0,0001% ⟶ за 1 млн 150000

-100000 0,001%

-2000 0,05%

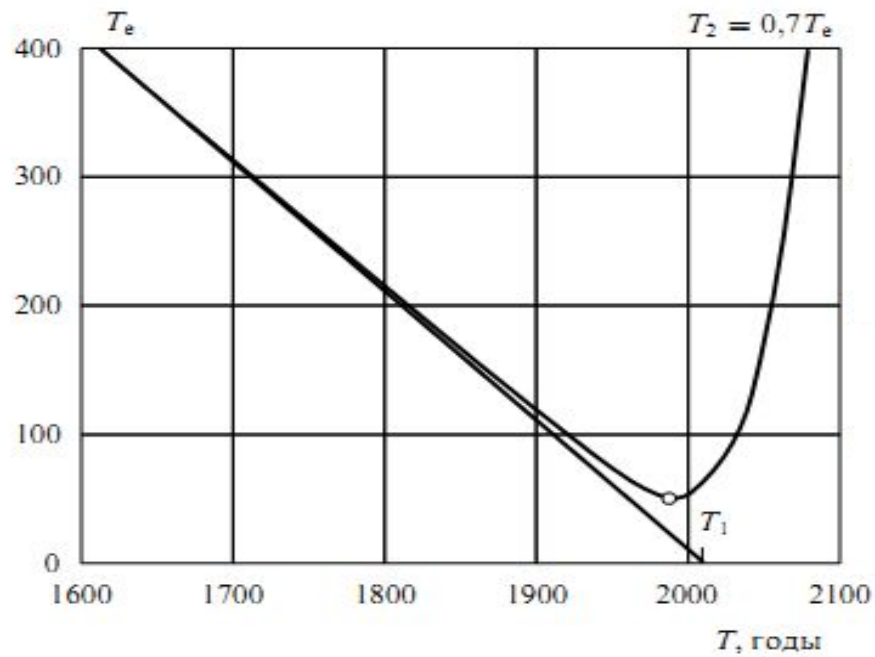
1900 1%

$$T_e = \left(\frac{1}{N}\frac{dN}{dT}\right)^{-1} = \frac{1}{\tau}\left[(T_1 - T)^2 + \tau^2\right] \operatorname{arcctg} \frac{T_1 - T}{\tau}$$

$$T_e(T) \simeq T_1 - T$$

1 миллиона лет ⟶ 42 лет

$\Delta P = 2K^2 = 9$ миллиардов людей



Зависимость мгновенного времени экспоненциального роста T_e от T

зміна масштабу історичного часу

Таблица 4. Развитие человечества в логарифмическом масштабе. Оледенения: 1 — Вюрм 10–54 тыс. лет, 2 — Рисс 200–250 тыс. лет, 3 — Миндель 400–500 тыс. лет, 4 — Гюнц 600–800 тыс. лет, 5 — Дунай 800–2000 тыс. лет. Последние данные указывают на более сложную последовательность оледенений [5]. Заметим, что для далекого прошлого оценки численности известны только по порядку величин, тогда как датировка известна сравнительно лучше.

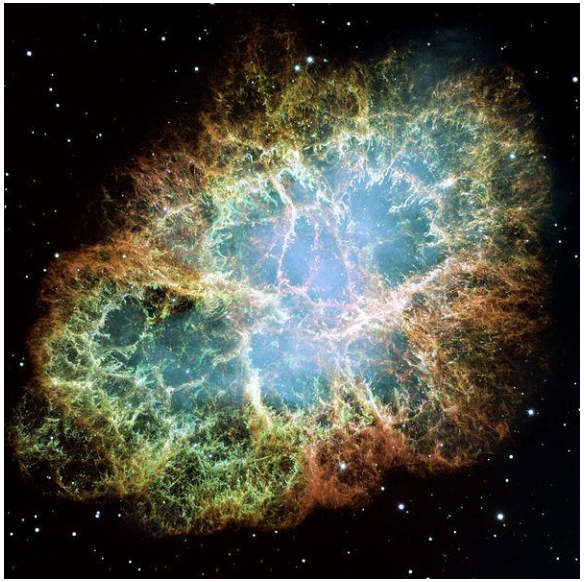
Геология		Демография и антропология							История и техника
Период	Период оледенения	Эпоха	Век	θ	T (даты)	N	Период	ΔT (годы)	
ГОЛОЦЕН		С	ИСТОРИЯ		2175 2050	13×10^9 $10{,}5 \times 10^9$	Стабилизация	125	Переход к 14×10^9 человек, изменение возрастного состава, урбанизация
					2007	7×10^9	Мировой демографический переход	42	
				11	1965	$3{,}5 \times 10^9$		42	— T_1 — настоящее время компьютеры мировые войны электроэнергия
		В		10	1840		Новейшая	125	промышленная революция
				9	1500	10^8	Новая	340	французская революция, великие географические открытия, книгопечатание
				8	500 н.э.		Средние века	1000	
				7	2000 до н.э.	10^8	Древний мир	2500	Падение Рима — Рождество Христово Греция, Будда, письменность
			КАМЕННЫЙ ВЕК	6	9000 до н.э.		Неолит	7000	Египет, Китай, Индия Одомашнивание животных Керамика, бронза, микролиты
ПЛЕЙСТОЦЕН	1			5	29000	10^7	Мезолит	20000	Заселение Америки
				4	80000		Мустье	51000	*Homo Sapiens* речь, овладение огнем
	2			3	220000	10^6	Ашель	140000	Заселение Европы, Азии
	3			2	600000		Шелль	380000	
	4			1	1600000	10^5	Олдувай	1000000	Рубила *Homo Habilis*
	5	А		0	4400000	(1)		2800000	Отделение гоминид от гоминоидов в Африке

Історична хронологія і астрономія

D відстань до рештка

φ кутовий розмір рештка

V_{exp} швидкість розширення рештка



крабовидна туманність як залишок наднової SN1054

P період пульсара

P' швидкість зміни періоду пульсара

$\rho_0(\mathbf{r})$ просторовий розподіл густини міжзіркової речовини

$$t_a = \frac{2}{5}\frac{R}{V_{exp}}$$

модель сильного вибуху Л.І Седова

$R \longrightarrow R = 0{,}5D\varphi$ радіус рештка

Седов
Леонид Иванович
1907-1999

параметри історичних наднових

Обозначение исторической сверхновой	Обозначение остатка СН по Каталогу галактических сверхновых	D, кпк	φ, угл. мин	R, пк	V_{exp}, км/с	t_a, лет ($t_{СН}$, лет)
СН 837	G189.1 + 3.0; 3C157; IC443	1,5	40	9	3000	1170 (1156)
СН 1006	G327.6 + 14.6; PKS1459-41	1,2	30	5	2300	850 (980)
СН 1054	G184.6 – 5.8; 3C144; Crab	2,0	6	1,75	1500	456 (932)
СН 1181	G130.7 + 3.1; 3C58	2,6	8	3	1000	1170 (805)
СН 1408	G69.0 + 2.7; CTB80	3,0	8	3,5	2000	684 (585)
СН 1572	G120.1 + 1.4; 3C10; Tycho	3,0	3,6	3,3	3600	359 (414)
СН 1604	G4.5 + 6.8; 3C358; Kepler	3,2	1,3	1,3	⩽ 300	1695 (382)
СН 1604*	–"–	–"–	–"–	–"–	3040	418 (395)

$$t_P = \frac{P^2 - P_0^2}{2PP'}$$

$$P \gg P_0 \longrightarrow t_P \approx P/2P'$$

$P \quad P'$ сучасні значення періоду і швидкості зміни періоду радіопульсара

P_0 початкове значення періоду

СН 1054 NP 0531

$P = 0{,}033$

$P' = 4{,}17 \times 10^{-13}$ с/с.

$P_0 = 0$ $\quad t_P = 1250$ лет

$P_0 = 0{,}017$ с