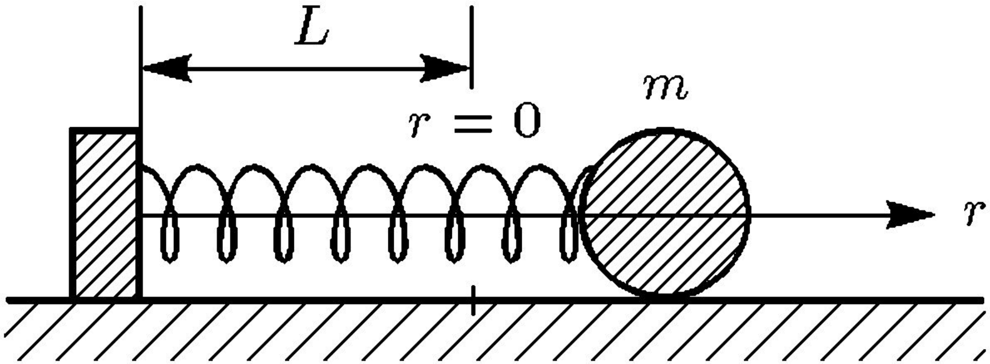
Принцип аналогій



$$E_{к} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\,(dr/dt)^2}{2}$$

$$E_{п} = -\int_0^r F\,dr' = \int_0^r kr'\,dr' = k\,\frac{r^2}{2}$$

$$E = E_{к} + E_{п}$$

$$E = \frac{m\,(dr/dt)^2}{2} + \frac{kr^2}{2}$$

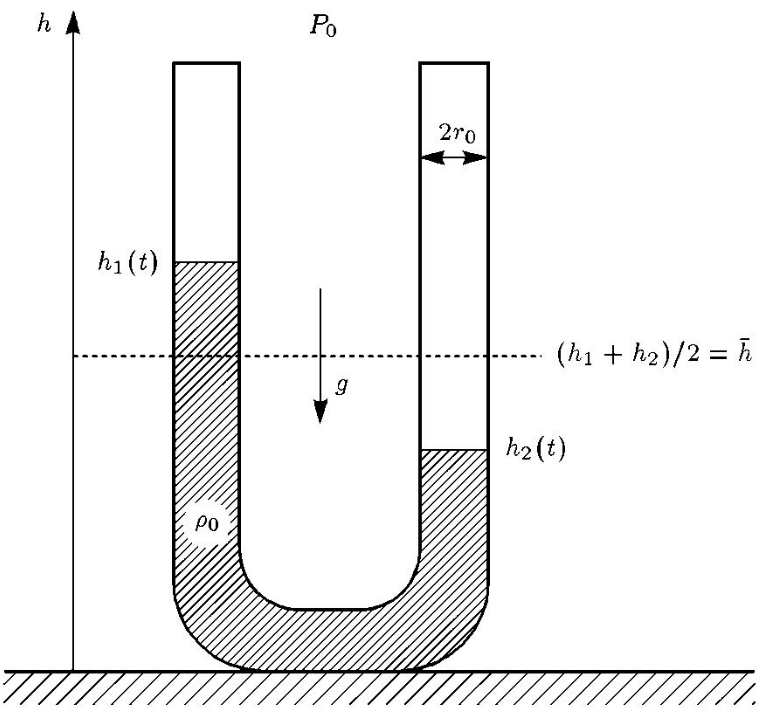
$$dE/dt \equiv 0 \longrightarrow m\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d^2r}{dt^2} + k\,\frac{dr}{dt}\,r = \frac{dr}{dt}\left(m\,\frac{d^2r}{dt^2} + kr\right) = 0$$

$$F = ma = m\,\frac{d^2r}{dt^2}$$

$$F = -kr,$$

$$m\,\frac{d^2r}{dt^2} = -kr. \longrightarrow r = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$\omega = \sqrt{k/m}$$



$$E_{\text{п}} = -\int_{\bar h}^{h_2} P\,dh_2 = -\int_{\bar h}^{h_2} \rho_0 s_0 (h_1 - h)\,g\,dh$$

де $\bar h = \dfrac{h_1 + h_2}{2}$ $\quad s_0 = \pi r_0^2$

$$h_1(t) + h_2(t) = \text{const} \rightarrow \quad E_{\text{п}} = -\rho_0 s_0 g\,(-h_2^2(t) + C h_2(t) + C_1)$$

$$E_{\text{п}} = -\rho_0 s_0 g\,(-h_2^2(t) + C h_2(t) + C_1)$$

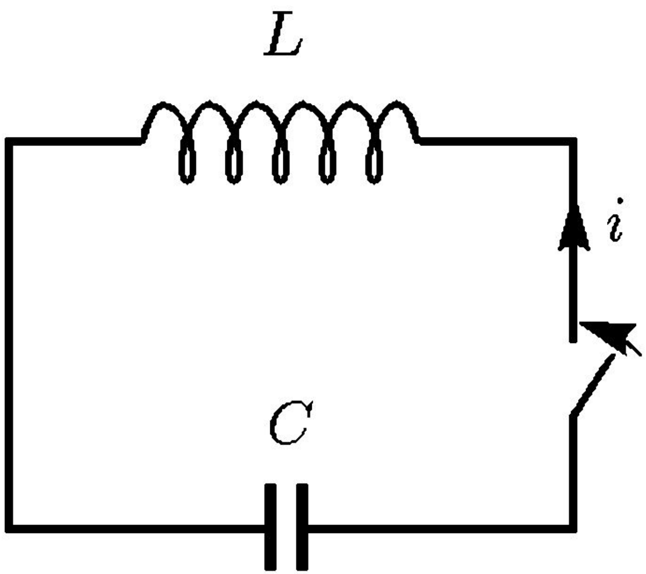
$$E_{\text{к}} = \frac{1}{2} M_0 \left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2$$

$$E(t) = E_{\text{к}}(t) + E_{\text{п}}(t) = \frac{M_0}{2}\left(\frac{dh_2}{dt}\right)^2 - \rho_0 s_0 g\,(-h_2^2 + C h_2 + C_1)$$

$$dE/dt = 0 \quad \longrightarrow \quad M_0 \frac{d^2 h_2}{dt^2} = \rho_0 s_0 g\,(-2h_2 + C)$$

$$M_0 \frac{d^2 h}{dt^2} = -\rho_0 s_0 g h = -\pi \rho_0 r_0^2 g h \qquad \text{де} \quad h = (h_2 - h_1)/2$$

$v(t) = -\varepsilon(t)$ де $v(t) = q(t)\, C \quad \varepsilon = -L\, di/dt$



$q(t)\, C = -\varepsilon(t) = L\, di/dt$

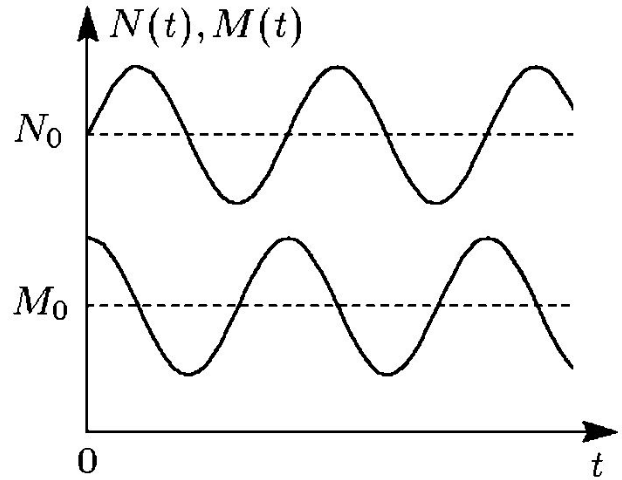
закон Ома

$i = -dq/dt \longrightarrow L\,\frac{d^2q}{dt^2} = -Cq$

Динаміка системи “хижак-здобич”

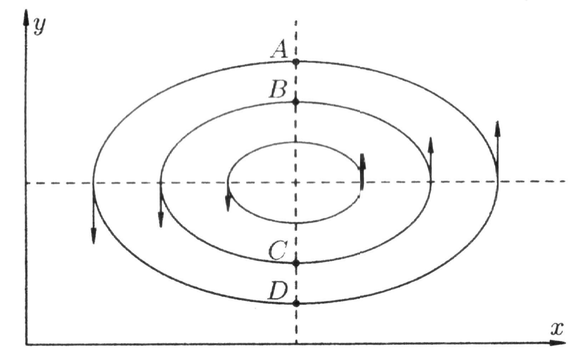
$$\frac{dN}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 M)\, N \qquad \alpha_1 > 0,\, \beta_1 > 0$$

$$\frac{dM}{dt} = (-\alpha_2 + \beta_2 N)\, M \qquad \alpha_2 > 0,\, \beta_2 > 0$$



$N_0 = \alpha_2/\beta_2 \qquad M_0 = \alpha_1/\beta_1$ рівновага

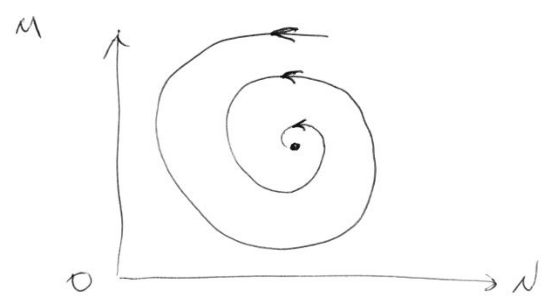
$N = N_0 + n,\ M = M_0 + m,\ n \ll N_0,\ m \ll M_0$



$$\frac{dn}{dt} = -\beta_1 N_0 m,$$

$$\frac{dm}{dt} = -\beta_2 M_0 n.$$

$$\frac{d^2 n}{dt^2} = -\alpha_1 \alpha_2 n \qquad \omega = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$$



Динаміка зайнятості

$p(t) \qquad p_0 > 0$ заробітна плата

$N(t) \qquad \bar{N}_0 > 0$ чисельність зайнятих

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha_1 (N - N_0), \qquad \alpha_1 > 0$$

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_2 (p - p_0), \qquad \alpha_2 > 0$$

число робітників (зарплата) змінюється пропорційно змінам зарплати (числу робітників) відносно рівноважного значення N_0 (p_0)

$$\frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} = -\alpha_1\alpha_2 (p - p_0)$$

$$\alpha_1 (N - N_0)^2 + \alpha_2 (p - p_0)^2 = \text{const} > 0$$

$$p = p_0 \longrightarrow N > N_0$$

$$N = N_0 \longrightarrow p > p_0$$

Принцип ієрархії моделей

Закон збереження імпульсу

$$m(t)\,v(t) = m(t+dt)\,v(t+dt) - dm\,[v(t+\xi\,dt) - u]$$

імпульс ракети

імпульс, що переданий газом

$$m(t+dt) = m(t) + (dm/dt)\,dt + O(dt^2) \longrightarrow m\,\frac{dv}{dt} = -\,\frac{dm}{dt}\,u$$

$$v(t) = v_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) \xrightarrow[\textbf{мах}]{} v = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right)$$

формула Ціолковського

m_0 початкова маса

m_p корисна маса

m_s структурна маса

$$\lambda = \frac{m_s}{m_0 - m_p}$$

характеризує відношення структурної і початкової мас ракети

навіть за умов $m_p = 0$ $\xrightarrow[\lambda = 0{,}1,\ u = 3\ \text{км/с}]{}$ $v = u\ln(1/\lambda) = 7\ \text{км/с}$

Ієрархія моделей

λm_i структурна маса ракети

$(1-\lambda)\, m_i)$ маса палива

$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$ початкова маса ракети при $n = 3$

(1) $$v_1 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)$$

$m_p + m_2 + m_3$

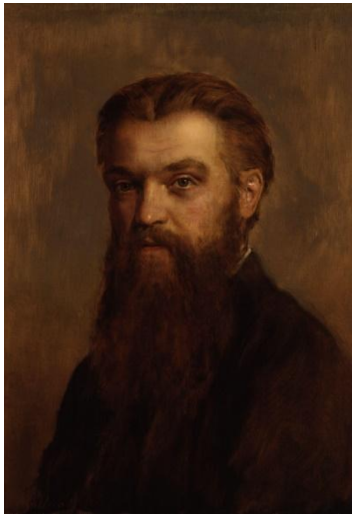
(2) $$v_2 = v_1 + u \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)$$

(3) $$v_3 = v_2 + u \ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right)$$

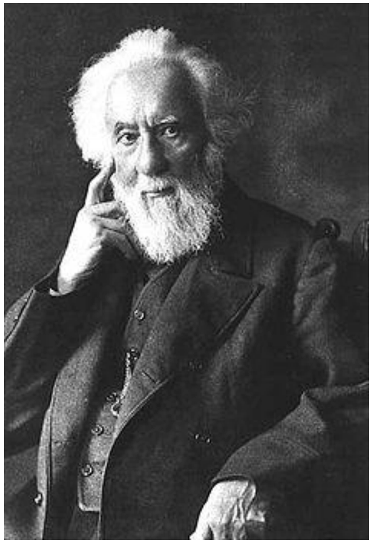
$$\frac{v_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right)\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_n = 10{,}5 \text{ км/с} \\ \lambda = 0{,}1 \end{array}\right\} n = 2,\ 3,\ 4 \rightarrow m_0 = 149\, m_p,\ m_0 = 77\, m_p,\ m_0 = 65\, m_p$$

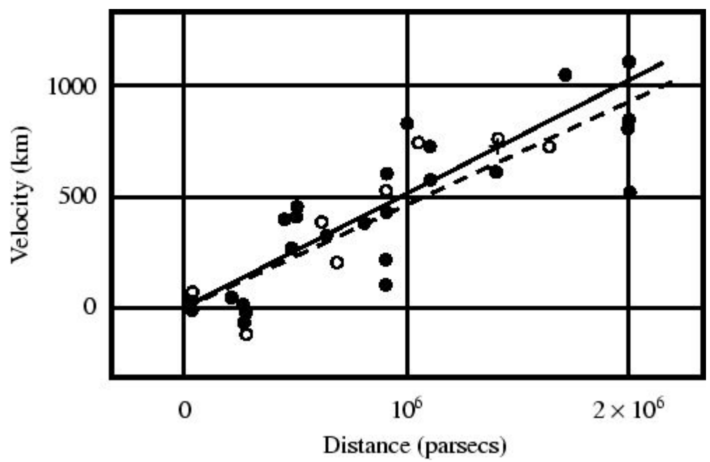
Ієрархія моделей (модель Всесвіту)



William Clifford
1845-1879

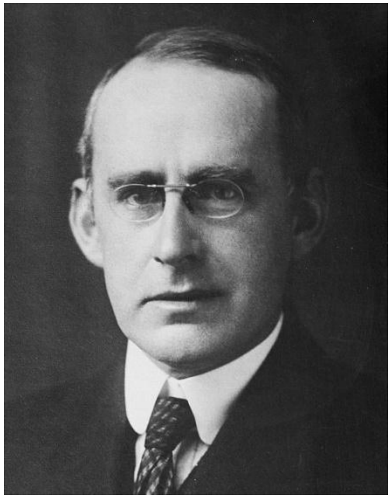


William Huggins
1824-1910

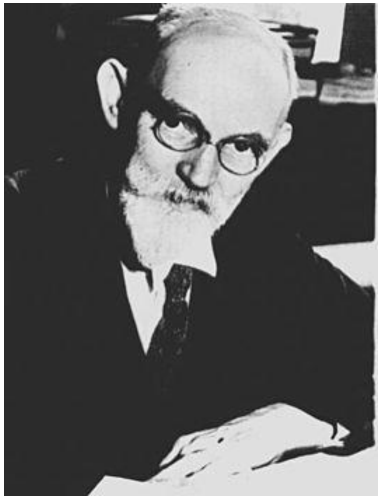


Edwin Hubble
1889-1953

Vesto Slipher
1875-1969



Arthur Eddington
1882-1944



Willem de Sitter
1872-1934

Georges Lemaître
1894-1966

Ієрархія моделей (модель Всесвіту)

А. А. Фридман 1916

$$v = Hr \quad \text{(а)} \qquad H \approx 50 \div 100 \;\; \hat{e}\grave{i} \,/\left(\tilde{n}\cdot \grave{I}\ddot{i}\tilde{n}\right)$$

$$H = 72 \pm 8 \;\; \hat{e}\grave{i} \,/\left(\tilde{n}\cdot \grave{I}\ddot{i}\tilde{n}\right)$$

$$\mathbf{M} \;\; \mathbf{R} \;\; \Delta m \longrightarrow v_R = H\mathbf{R}$$

$$E_K = \frac{\Delta m v_R^2}{2} \qquad E_P = -\gamma \frac{\mathbf{M}\Delta m}{2}$$

$$\Delta m\left(\frac{v_R^2}{2} - \gamma \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{R}}\right) = const$$

$$\left.\begin{array}{lll} const > 0 & v_R^2 = 2\gamma\, \mathbf{M}/\mathbf{R} + k & k = const/\Delta m \\ const < 0 & \mathbf{R} = -\dfrac{2\gamma \mathbf{M}}{k} & \end{array}\right\} \; v_R^2 - 2\gamma \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{R}} = 0 \quad \text{(б)}$$

$$\mathbf{M} = \frac{4}{3}\pi \mathbf{R}^3 \rho \longrightarrow \mathbf{R}^2\left(H^2 - \frac{8\pi}{3}\gamma\rho\right) = 0 \quad \text{або} \quad \rho = \frac{3H^2}{8\pi\gamma}$$

$$v_R = \frac{dR}{dt} = \sqrt{2\gamma \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{R}}} \qquad \left.\begin{array}{c} \sqrt{\mathbf{R}}dR = \sqrt{2\gamma \mathbf{M}}dt \\ \dfrac{dR}{dt} = HR \end{array}\right\} \frac{2}{3}\mathbf{R}^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2\gamma \mathbf{M}}t \longrightarrow t = \frac{2}{3H} \approx 10^{10}$$

Популяційна динаміка

$$u_1 = D_1 \Delta u_1 + f_1\left(u_1(t), u_2(t-\tau_1), \ldots\ldots, u_m(t), u_m(t-\tau_m)\right)$$

. . .

. . .

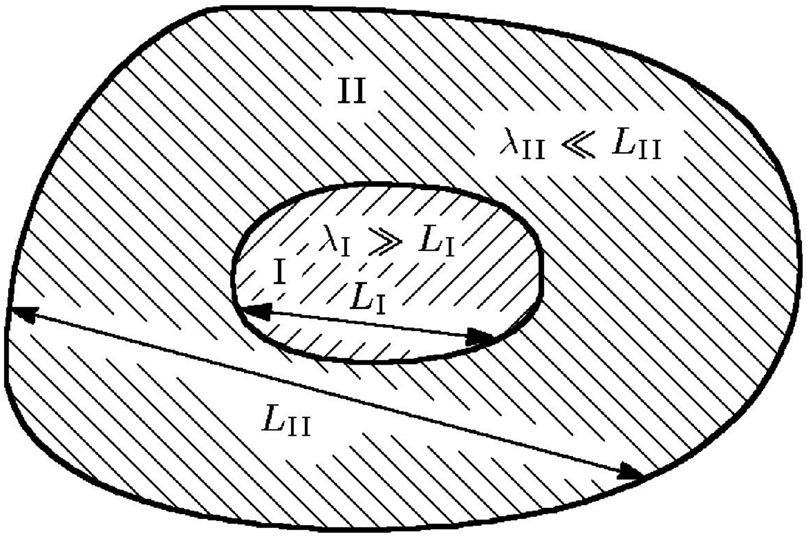
. . .

$$u_m = D_m \Delta u_m + f_m\left(u_1(t), u_2(t-\tau_1), \ldots\ldots, u_m(t), u_m(t-\tau_m)\right)$$

$$u_k(\vec{r}, 0) = h_k(\vec{r})$$

$$u_k(\vec{r}, t) = v_k(t) \qquad k = 1, \ldots\ldots, m$$

експонентне зростання



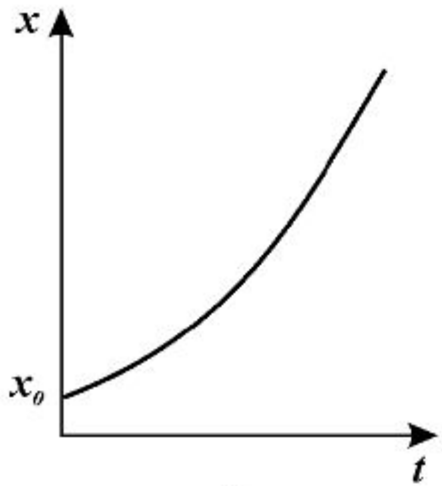
$$M_{\rm I}(0) + M_{\rm II}(0) = M_{\rm I}(t) + M_{\rm II}(t)$$

$$\frac{dN_{\rm I}(t)}{dt} = -\alpha N_{\rm I}(t) \longrightarrow \frac{dM_{\rm I}(t)}{dt} = -\alpha M_{\rm I}(t) \longrightarrow M_{\rm I}(t) = M_{\rm I}(0)\, e^{-\alpha t}$$

$$M_{\rm II}(t) = M_{\rm II}(0) + M_{\rm I}(0) - M_{\rm I}(0)\, e^{-\alpha t} = M_{\rm II}(0) + M_{\rm I}(0)\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$$

експонентне зростання

$$\frac{dx}{dt} = rx.$$



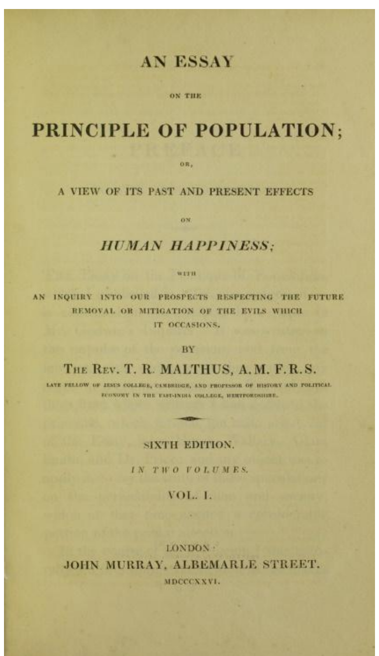
a

Augustin Louis Cauchy
1789-1857

$$y' = f(x, y)$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t)$$



AN ESSAY

ON THE

PRINCIPLE OF POPULATION;

OR,

A VIEW OF ITS PAST AND PRESENT EFFECTS

ON

HUMAN HAPPINESS;

WITH

AN INQUIRY INTO OUR PROSPECTS RESPECTING THE FUTURE REMOVAL OR MITIGATION OF THE EVILS WHICH IT OCCASIONS.

BY

THE REV. T. R. MALTHUS, A.M. F.R.S.

LATE FELLOW OF JESUS COLLEGE, CAMBRIDGE, AND PROFESSOR OF HISTORY AND POLITICAL ECONOMY IN THE EAST-INDIA COLLEGE, HERTFORDSHIRE.

SIXTH EDITION.

IN TWO VOLUMES.

VOL. I.

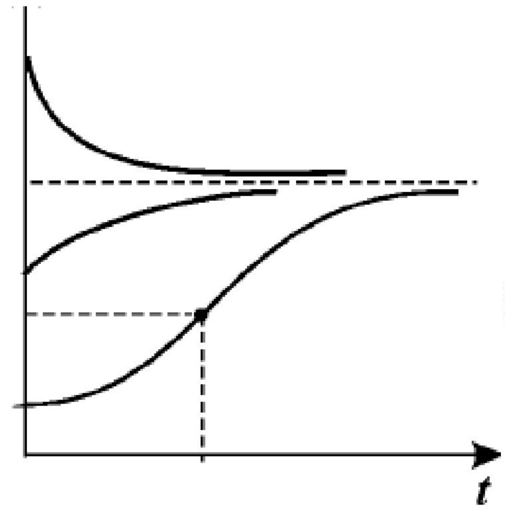
LONDON:
JOHN MURRAY, ALBEMARLE STREET.
MDCCCXXVI.

Томас Роберт Мальтус
1766-1834

обмежене зростання

Pierre Francois Verhulst

1804-1849

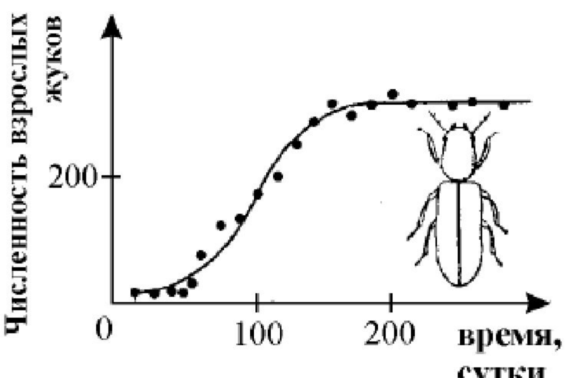


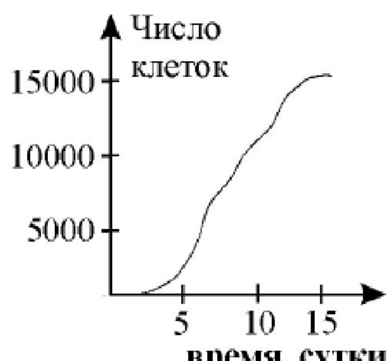
$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

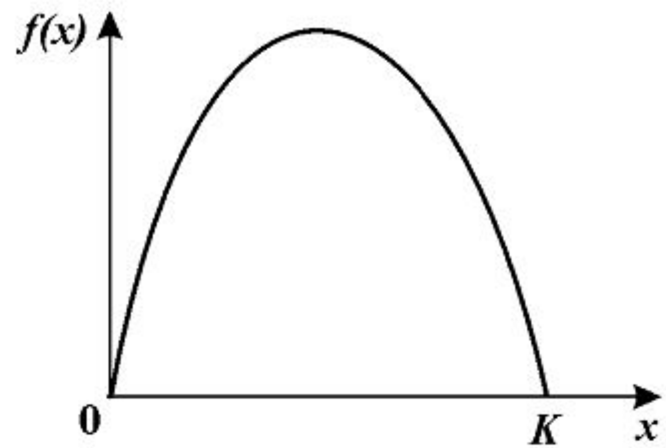
$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{K - x_0 + x_0 e^{rt}}$$

$$f(\overline{x}) = 0 \qquad \overline{x}_1 = 0, \quad \overline{x}_2 = K$$

$$a = f'(x)\Big|_{x=\overline{x}} = r - \frac{2r\overline{x}}{K}$$







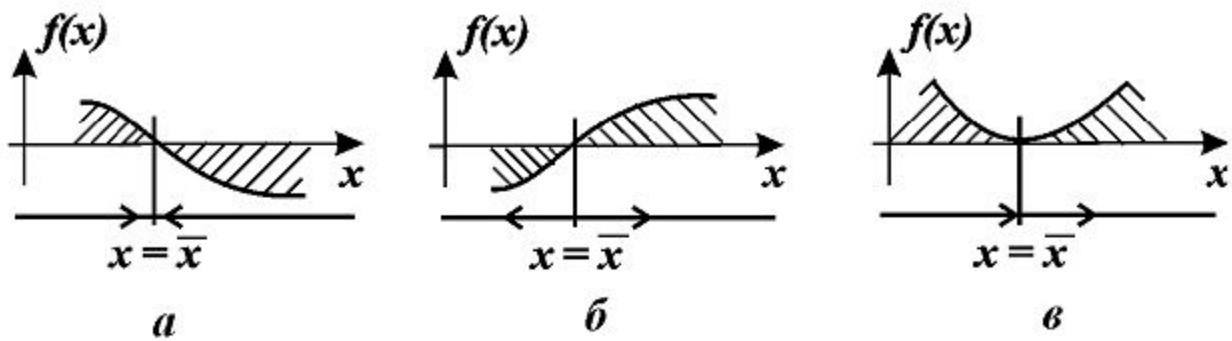
Дослідження стійкості стаціонарного стану

$\frac{dx}{dt} = f(x).$ $\longrightarrow$ $\frac{d(\overline{x}+\xi)}{dt} = f(\overline{x}+\xi).$ з урахуванням $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=\overline{x}} = 0$ та $\xi/\overline{x} \ll 1$

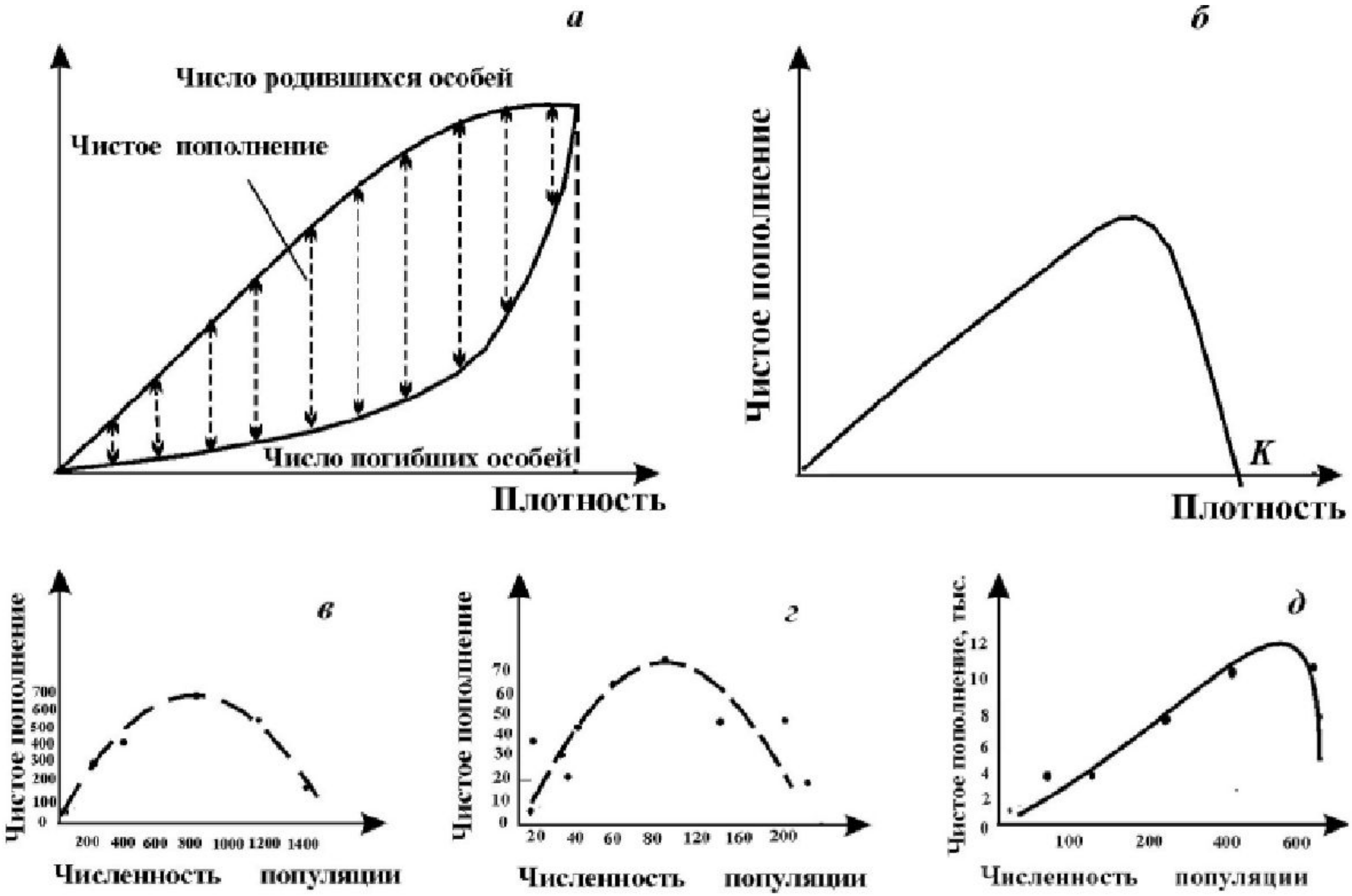
$\frac{d\xi}{dt} = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})\xi + \frac{1}{2}f''(\overline{x})\xi^2 + \ldots$ або

$\frac{d\xi}{dt} = a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots,$ де $a_1 = f'(\overline{x}),\ a_2 = \frac{1}{2}f''(\overline{x}),\ \ldots$

$d\xi/dt = a_1\xi,$ $\longrightarrow$ $\xi(t) = c \cdot \exp(\lambda t),$ де $\lambda = a_1 = f'(\overline{x}),\ c$ - довільна стала



поповнення

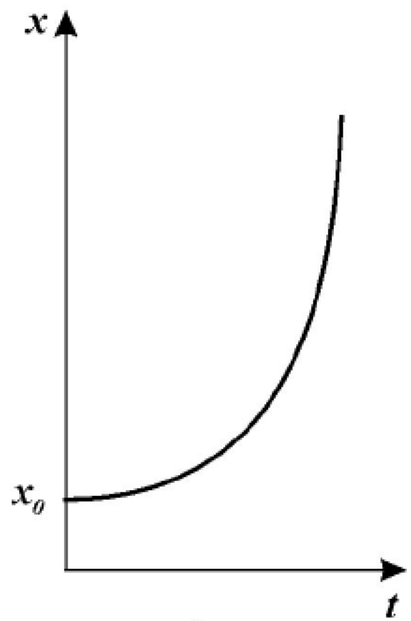


а
Число родившихся особей
Чистое пополнение
Число погибших особей
Плотность
б
Чистое пополнение
K
Плотность
в
Чистое пополнение
700
600
500
400
300
200
100
0
200 400 600 800 1000 1200 1400
Численность популяции
г
Чистое пополнение
70
60
50
40
30
20
10
0
20 40 60 80 120 160 200
Численность популяции
д
Чистое пополнение, тыс.
12
10
8
6
4
2
0
100 200 400 600
Численность популяции

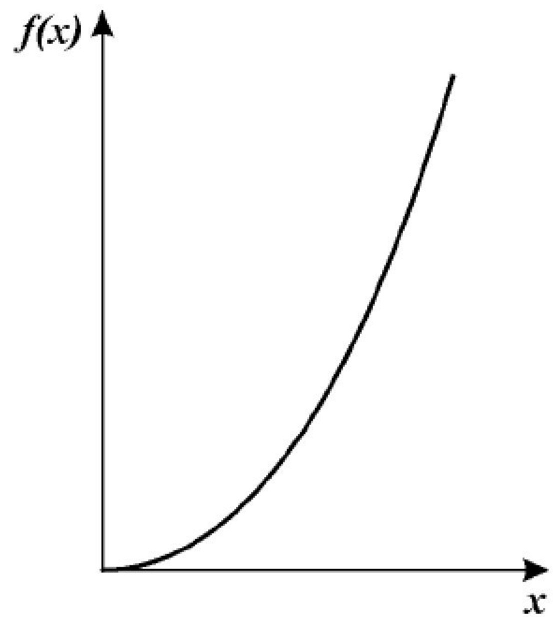
моделі з найменшою критичною чисельністю

$$\frac{dx}{dt} = rx^2$$

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x}$$



а

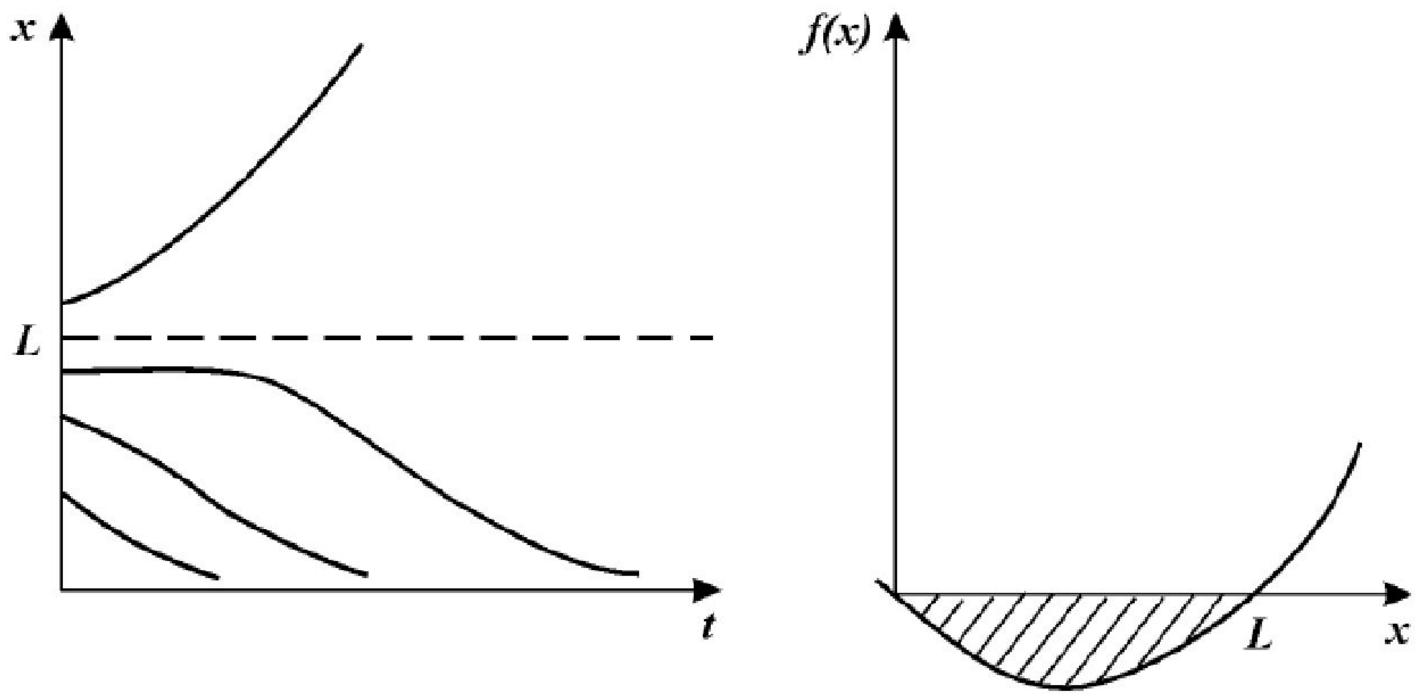


б

моделі з найменшою критичною чисельністю

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx$$

$$\overline{x} = 0 \qquad \overline{x} = d\beta(\alpha\beta - d\tau) = L$$



а *б*

моделі з найменшою критичною чисельністю

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{\beta x^2}{\beta + \tau x} - dx - \delta x^2$$

$$\overline{x} = 0 \quad \overline{x} = K \quad \overline{x} = L$$