

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Правило Лопитала

Рассмотрим отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$. Будем говорить, что это отношение при $x \rightarrow a$ есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

Если существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$,

то вычисление этого предела называют *раскрытием* упомянутой *неопределенности*.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

В случае когда функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к бесконечности при $x \rightarrow a$, также применимо правило Лопиталя.

Справедливо правило Лопиталя и для функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к бесконечности при $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример. Вычислить пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x};$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 3x)'}{(4x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos 3x}{4} = \frac{3}{4};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x};$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x}}{1} = 3;$$

$$\text{B) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Экстремум функции

Точка x_0 называется **точкой локального максимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки выполняется неравенство

$$f(x_0) > f(x).$$

Точка x_0 называется **точкой локального минимума** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки выполняется неравенство

$$f(x_0) < f(x).$$

Общий термин для локального максимума и локального минимума – **локальный экстремум**.

Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции: для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ имела в точке x_0 локальный экстремум, необходимо, чтобы в этой точке выполнялось равенство $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых производная функции обращается в нуль или не существует, называются **критическими** (или **стационарными**).

Первое достаточное условие экстремума

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку, и дифференцируема во всех точках этого интервала, кроме, может быть, самой точки x_0 . Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с «плюса» на «минус», то в точке x_0 имеется локальный максимум, а если с «минуса» на «плюс», то минимум.

Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

1. Найти производную $y' = f'(x)$.
2. Найти критические точки.
3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии локальных экстремумов функции.
4. Найти значения функции в точках локального экстремума.

Пример. Исследовать функцию на экстремум:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 10.$$

Решение.

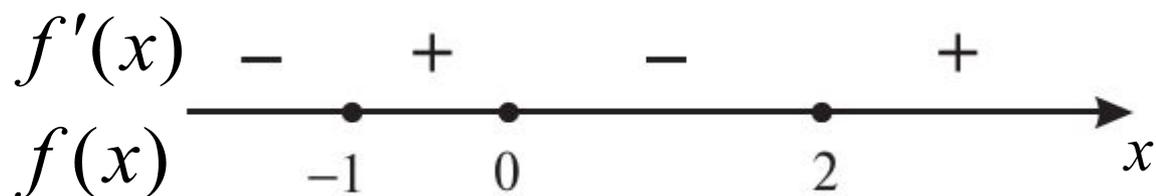
Найдем производную:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \implies x(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2 \text{ - критические точки}$$

Иследуем знак производной:



$x = -1, x = 2$ - точки локального минимума;

$f(-1) = 5, f(2) = -22$ - минимальные значения функции;

$x = 0$ точка локального максимума,

$f(0) = 10$ - максимальное значение функции в этой точке.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Наибольшее или наименьшее значение функции может достигаться как в точках локального экстремума, так и на концах отрезка.

Схема для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке:

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки.
3. Найти значения функции в критических точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^2 e^x \text{ на отрезке } [-3, 1].$$

Решение.

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x.$$

$$f'(x) = 0: x(x+2)e^x = 0.$$

Стационарные точки: $x_1 = 0, x_2 = -2.$

$$f(-3) = 9e^{-3}, \quad f(-2) = 4e^{-2},$$

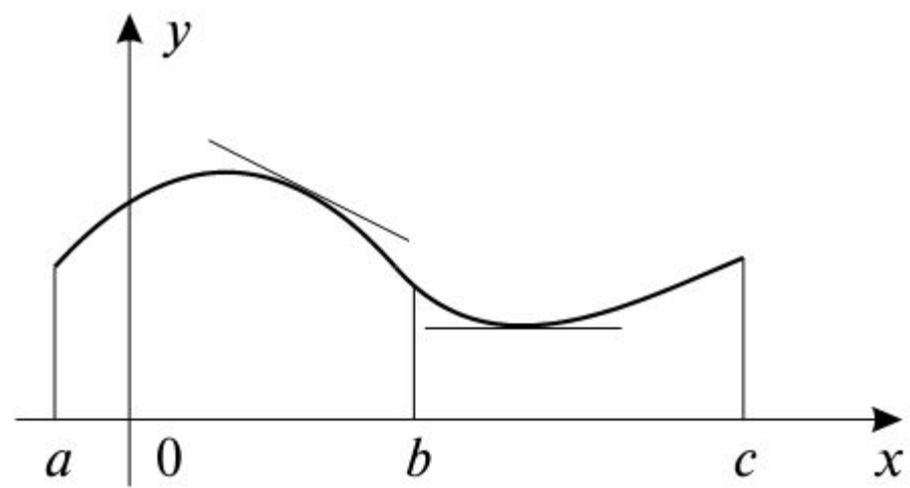
$$f(0) = 0, \quad f(1) = e;$$

$$f_{\text{наиб}} = f(1) = e, \quad f_{\text{наим}} = f(0) = 0.$$

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Кривая $y=f(x)$ имеет на $(a; b)$ **выпуклость, направленную вверх**, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая $y=f(x)$ имеет на $(b; c)$ **выпуклость, направленную вниз**, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.



Если функция $y = f(x)$ имеет на интервале $(a; b)$ вторую производную и $f''(x) > 0$ на $(a; b)$, то график этой функции имеет на $(a; b)$ выпуклость, направленную вниз; если же $f''(x) < 0$ на $(a; b)$, то график имеет на (a, b) выпуклость, направленную вверх.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Необходимое условие перегиба в точке x_0 для графика функции $f(x)$, имеющей в этой точке непрерывную вторую производную, заключается в том, что $f''(x_0) = 0$.

Достаточным условием перегиба является смена знака второй производной функции $y=f(x)$ при переходе через точку x_0 (т.е. если вторая производная имеет разные знаки слева и справа от x_0 , то график функции имеет перегиб при $x = x_0$).

АСИМПТОТЫ

Прямая линия называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки M , лежащей на графике, до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат.

Различают три вида асимптот:
вертикальные, горизонтальные и наклонные .

Прямая $x=a$ называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y=b$ называется **горизонтальной асимптотой** графика функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \right)$.

Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y=f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$).

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = b$$

Пример.

Найти наклонную асимптоту графика функции

$$y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}.$$

Решение.

Уравнение наклонной асимптоты имеет вид: $y = kx + b$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - x + 1} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - x + 1} - x \right) =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} = 1.$$

Уравнение наклонной асимптоты:

$$y = x + 1.$$

Пример.

Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}$$

Решение.

$x = 1$ – вертикальная асимптота.

Горизонтальных асимптот нет.

Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2x(x-1)^2} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2}x \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{2(x-1)^2} = 1.$$

$y = \frac{1}{2}x + 1$ – наклонная асимптота.

