

Алгоритмы Прима и Крускала построения остовного связного дерева минимального веса



**Гуляева
Татьяна Викторовна**
учитель информатики и
математики МБОУ СОШ №9
с УИОП г.Павлово

2014 год

Содержание

- [Повторение основных понятий теории графов](#)
- [Понятие остовного связного дерева](#)
- [Понятие цикломатического числа](#)
- [Алгоритм Прима](#)
- [Алгоритм Крускала](#)
- [Вопросы и задания](#)



Основные понятия теории графов

По горизонтали:

1. Графы являются абстрактными моделями объектов и связей между ними. Они состоят из множества вершин (узлов) и множества ребер (связей) между ними. Графы используются для моделирования различных систем, таких как социальные сети, транспортные сети, компьютерные сети и т.д.

2. Путь в графе — это последовательность ребер, соединяющих вершины. Путь может быть простым (не повторяет вершин) или непростым (повторяет вершины). Путь считается замкнутым, если начальная и конечная вершины совпадают.

3. Цикл в графе — это замкнутый путь, который не повторяет ребер. Циклы являются важными характеристиками графов, особенно в контексте теории графов.

4. Путь — это последовательность ребер, соединяющих вершины. Путь может быть простым (не повторяет вершин) или непростым (повторяет вершины). Путь считается замкнутым, если начальная и конечная вершины совпадают.

5. Цикл — это замкнутый путь, который не повторяет ребер. Циклы являются важными характеристиками графов, особенно в контексте теории графов.

6. Дуга — это неориентированное ребро графа. Дуги используются для моделирования связей между объектами, которые не имеют направления.

7. Пустой граф — это граф, который не содержит ни вершин, ни ребер. Пустой граф является тривиальным случаем графа.

8. Граф — это абстрактная модель объектов и связей между ними. Графы используются для моделирования различных систем, таких как социальные сети, транспортные сети, компьютерные сети и т.д.

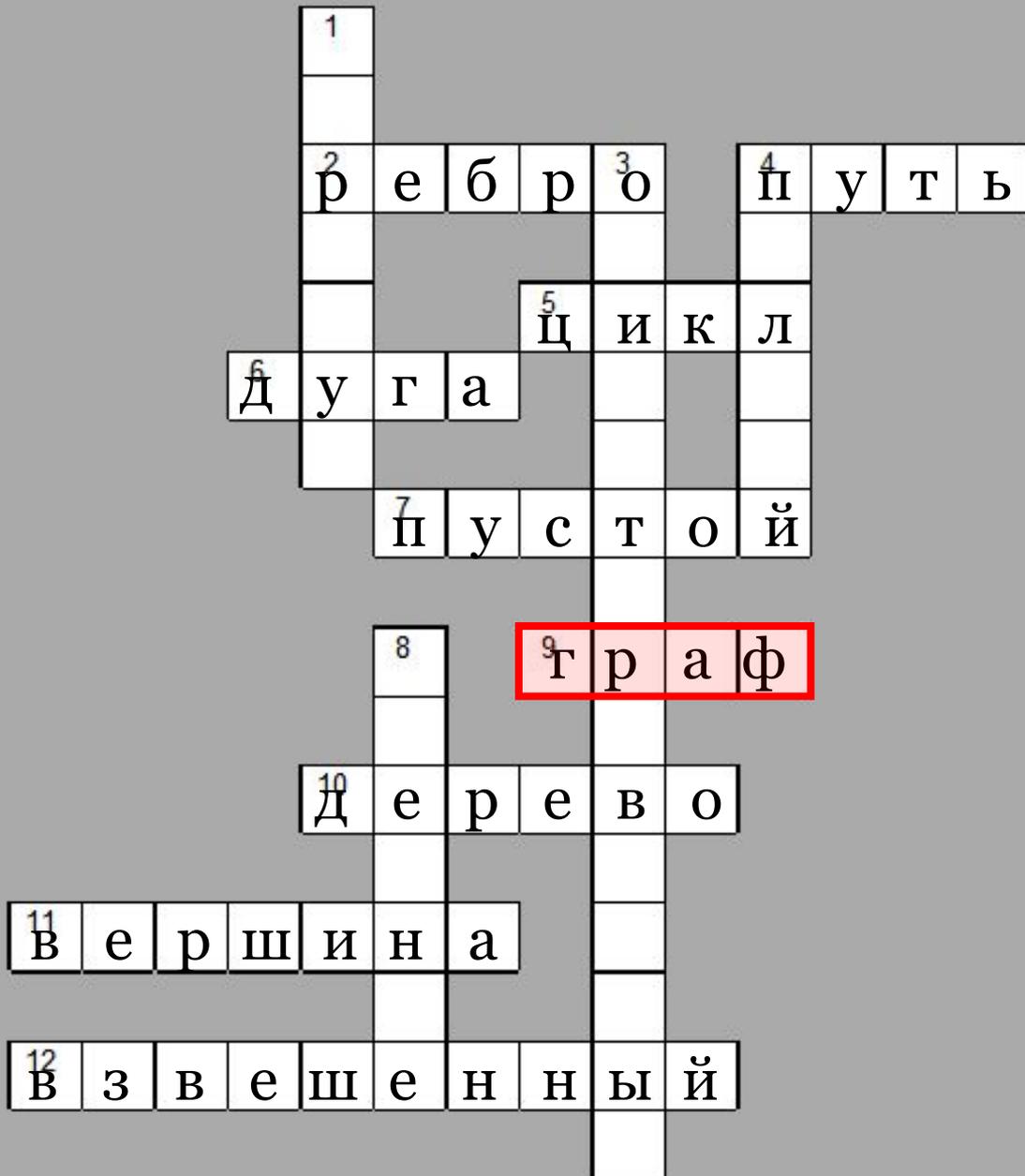
9. Ребро — это связь между двумя вершинами графа. Ребра могут быть ориентированными (дугами) или неориентированными.

10. Дерево — это связный граф, который не содержит циклов. Деревья являются важными структурами в теории графов, особенно в контексте алгоритмов поиска.

11. Вершина — это объект графа, который соединяется с другими объектами с помощью ребер. Вершины являются основными элементами графа.

12. Вешенный граф — это граф, который имеет одну или несколько вершин, которые являются центральными узлами графа. Вешенные графы используются для моделирования различных систем, таких как социальные сети, транспортные сети, компьютерные сети и т.д.

вертикали

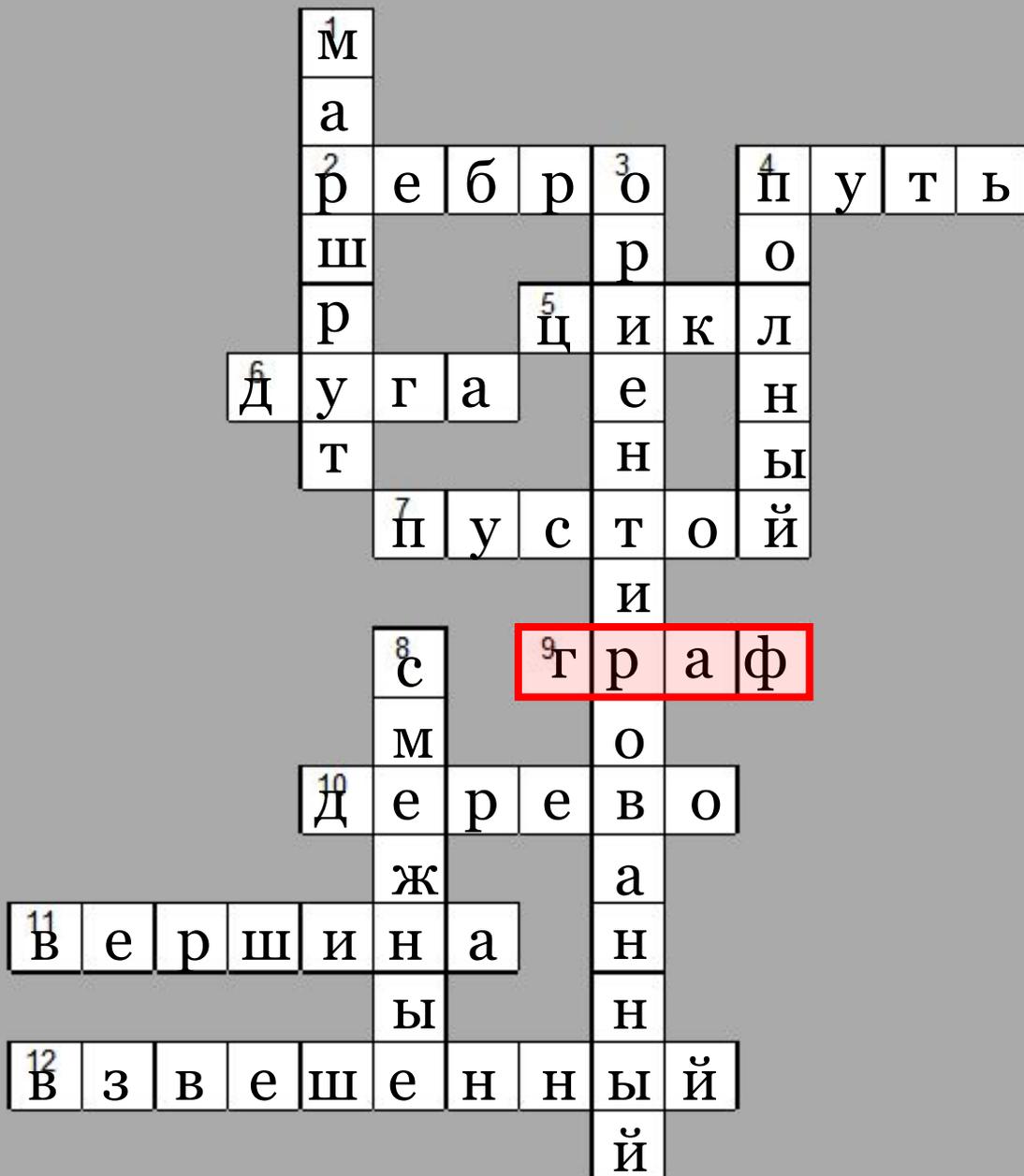


Основные понятия теории графов

По вертикали:

8. Верифицируем неравноудаленными вершинами графа при перемещении.

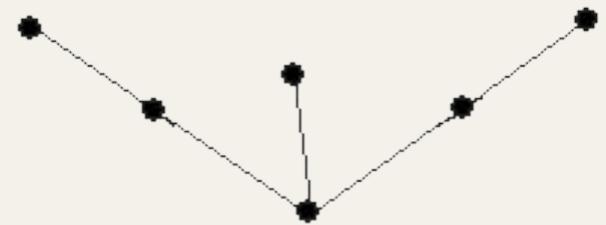
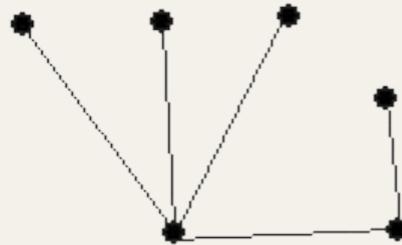
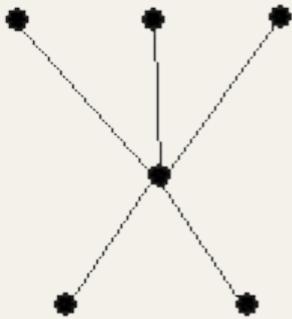
Перейдем к изучению
НОВЫХ ПОНЯТИЙ



Основные понятия теории графов

Остовное связное дерево

Остовной связный подграф – подграф графа G , который содержит все его вершины и каждая вершина достижима из любой другой.



Остовное связное дерево – подграф, включающий вершины исходного графа G , не содержащего циклы, каждая вершина которого достижима из любой другой.



Основные понятия теории графов

Цикломатическое число

Цикломатическое число γ показывает, сколько ребер нужно удалить из графа, чтобы в нем не осталось циклов

$$\gamma = m - n + 1,$$

m - количество ребер
 n - количество вершин



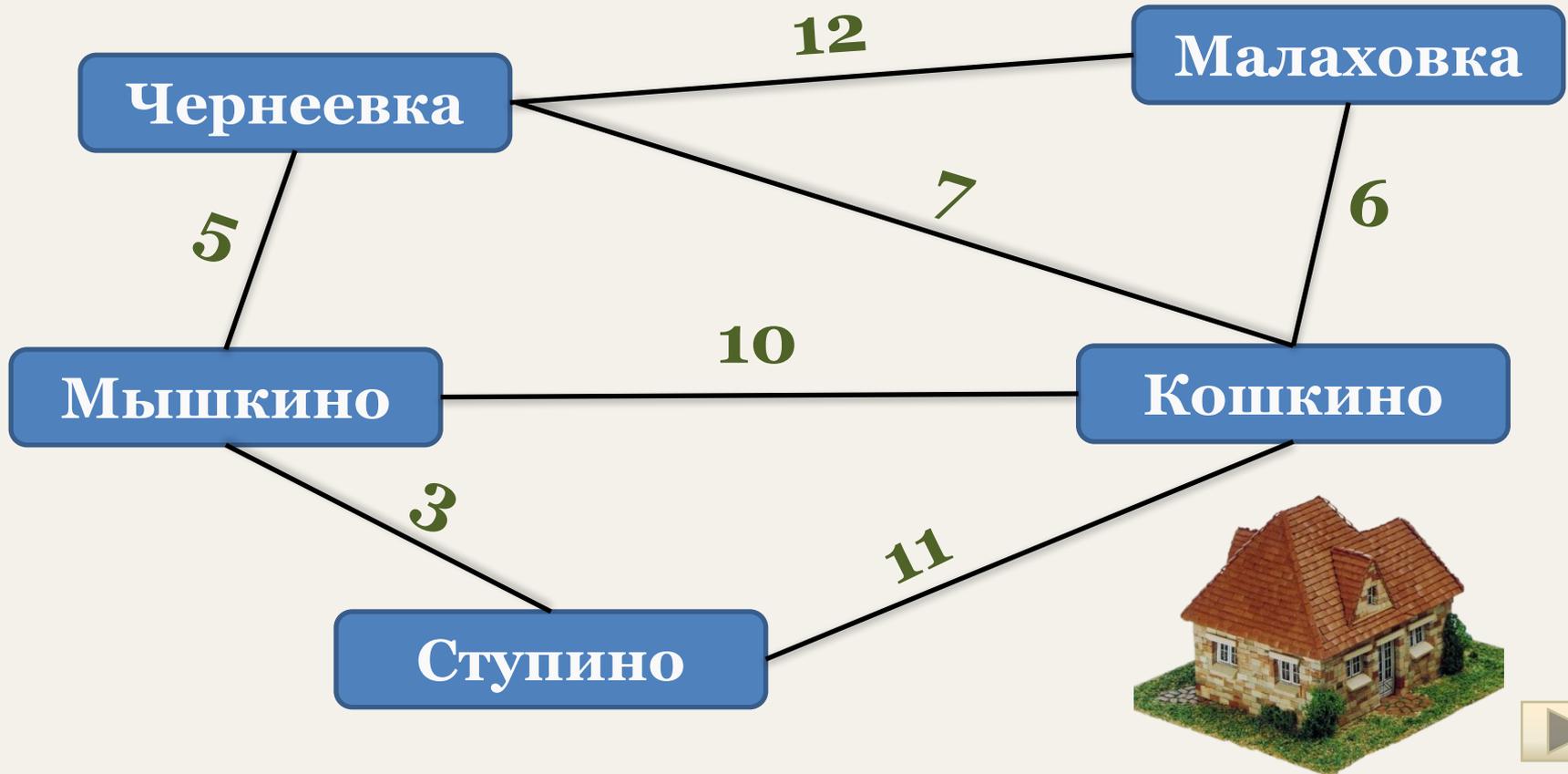
Задача 1

В некотором районе было решено провести газопровод между пятью деревнями. От Кошкино до Мышкино идти 10 км, от Мышкино до Ступино – 3 км, от Кошкино до Малаховки – 6 км, от Малаховки до Черняевки – 12 км, от Кошкино до Ступино – 11 км, от Мышкино до Чернеевки – 5 км, от Кошкино до Чернеевки – 7 км. Как необходимо провести трубу, чтобы она соединяла все пять деревень, и затраты при этом были минимальными?



Задача 1

Построим граф, моделирующий дороги, соединяющие деревни.



Задача 1

Задача сводится к построению остовного связного дерева минимального веса.

Рассчитаем цикломатическое число.

m (количество ребер) равно **7**

n (количество вершин) равно **5**

$$\gamma = 7 - 5 + 1 = 3$$

Т.е. три деревни напрямую соединены газовой трубой не будут.



(переходы по щелчку)

Алгоритм Прима

Пусть дан взвешенный неориентированный граф.

Для построения минимального остовного дерева необходимо:

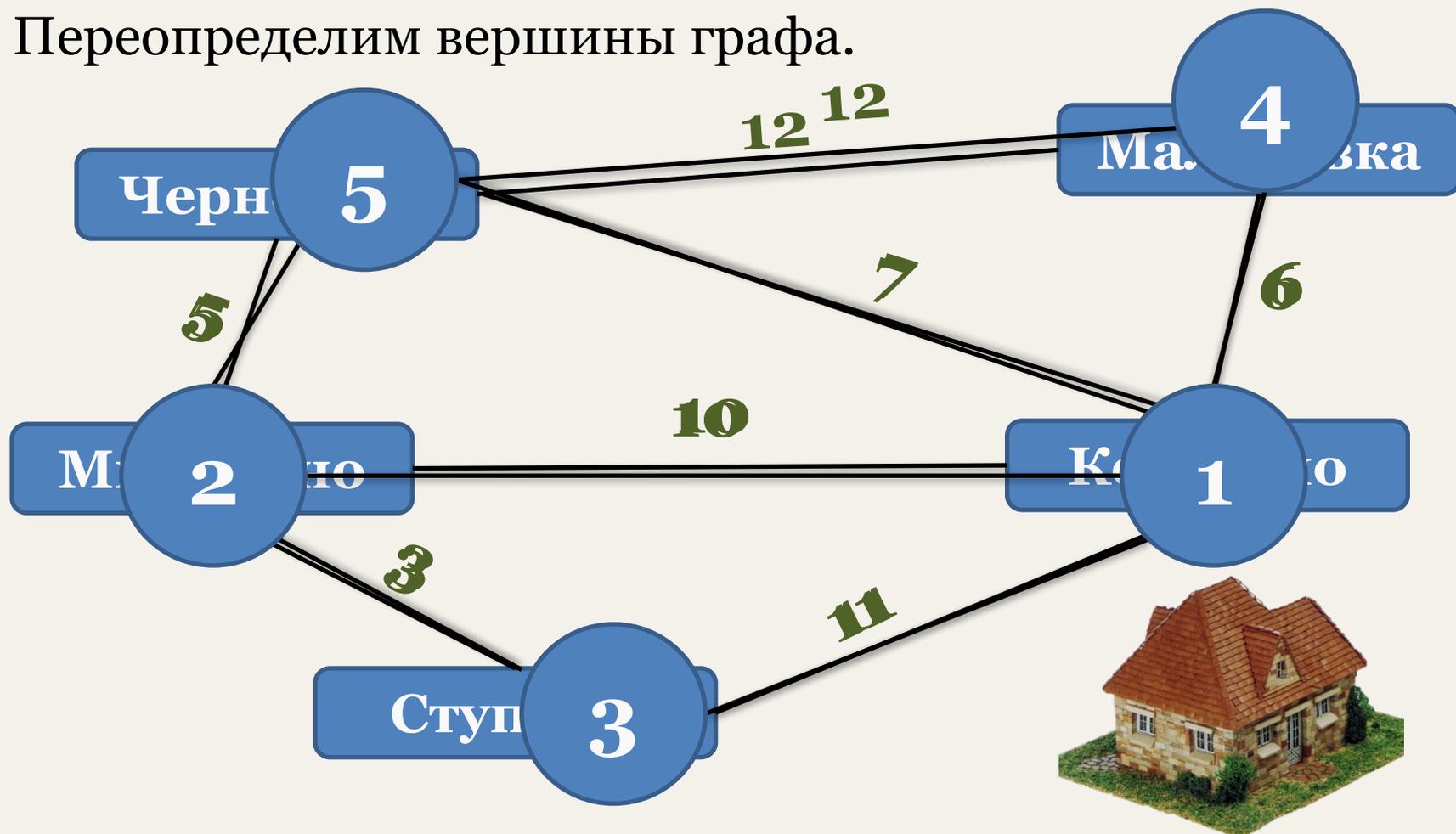
1. Представить граф в виде матрицы смежности
2. Найти в матрице наименьший элемент, соответствующий ребру, соединяющему i -ю и j -ю вершины графа
3. Вычеркнуть элементы i -й и j -й строки матрицы
4. Пометить i -й и j -й столбцы матрицы
5. В помеченных столбцах i и j найти наименьший элемент, отличный от уже найденного
6. Повторять пункты 3-5 до тех пор, пока не будут задействованы все вершины графа



(переходы по щелчку)

Задача 1

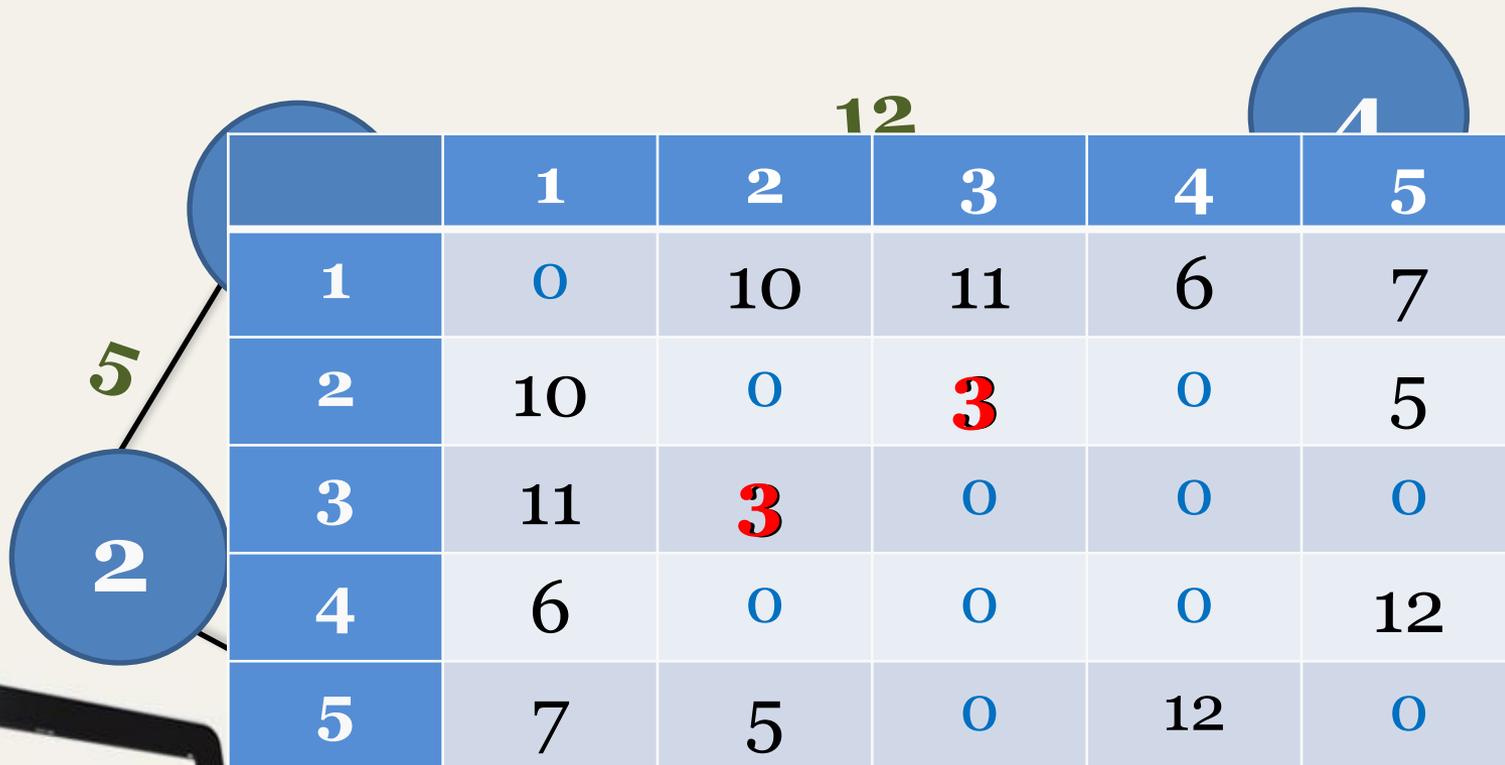
Решим задачу по алгоритму Прима.
Переопределим вершины графа.



(переходы по щелчку)

Задача 1

Представим граф в виде матрицы смежности.



The diagram shows a 5x5 adjacency matrix with nodes 1-5. Edges are highlighted with weights: 5 between nodes 1 and 2, 12 between nodes 2 and 5, and 4 between nodes 4 and 5. The matrix is as follows:

	1	2	3	4	5
1	0	10	11	6	7
2	10	0	3	0	5
3	11	3	0	0	0
4	6	0	0	0	12
5	7	5	0	12	0

Найдем минимальный элемент.

Он равен **3**



(переходы по щелчку)

Задача 1

Вычеркнем 2-ю и 3-ю строки таблицы. А столбцы 2 и 3 выделим.

	1	2	3	4	5
1	0	10	11	6	7
2			3		
3					
4	6	0	0	0	12
5	7	5	0	12	0

Найдем минимальный элемент в выделенных столбцах. Он равен 5



(переходы по щелчку)

Задача 1

Вычеркнем 5-ю строку таблицы. А столбец 5 выделим.

	1	2	3	4	5
1	0	10	11	6	7
2			3		
3					
4	6	0	0	0	12
5		5			

Найдем минимальный элемент в выделенных столбцах. Он равен 7



(переходы по щелчку)

Задача 1

Вычеркнем 1-ю строку таблицы. А столбец 1 выделим.

	1	2	3	4	5
1					7
2			3		
3					
4	6	0	0	0	12
5		5			

Найдем минимальный элемент в выделенных столбцах. Он равен **6**



(переходы по щелчку)

Задача 1

Вычеркнем 4-ю строку таблицы. А столбец 4 выделим.

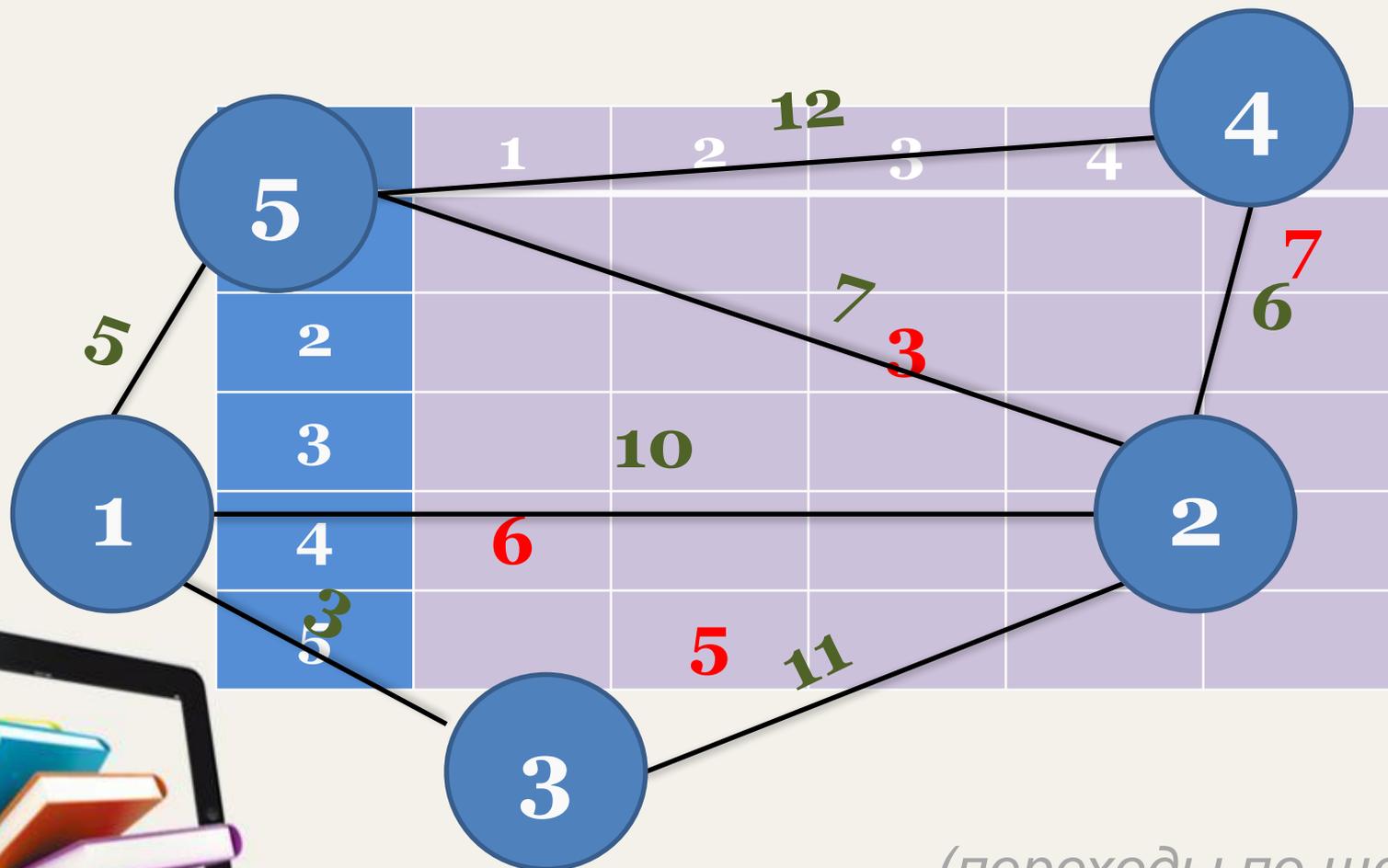
	1	2	3	4	5
1					7
2			3		
3					
4	6				
5		5			



(переходы по щелчку)

Задача 1

Получаем связное остовное дерево минимального веса.

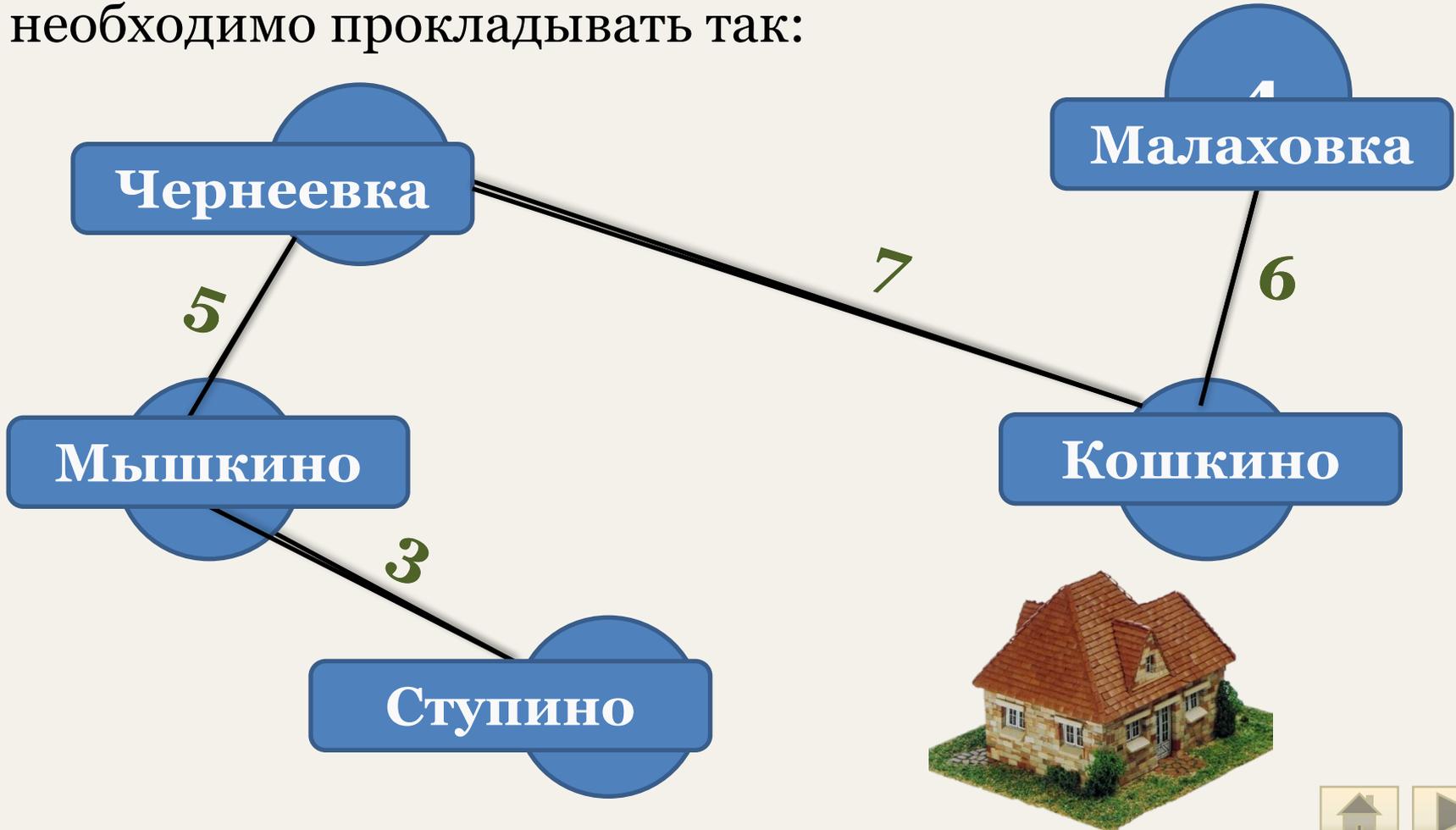


(переходы по щелчку)



Задача 1

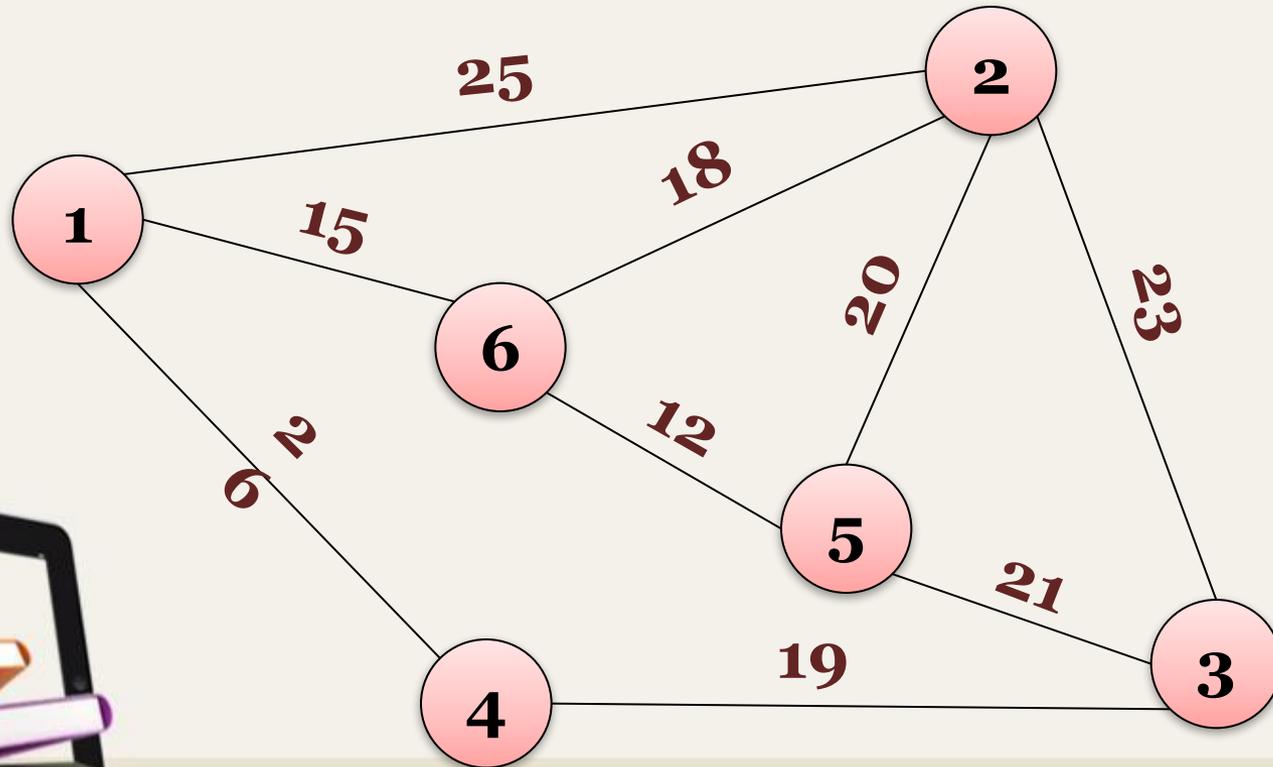
Ответ: газопровод с минимальными затратами необходимо прокладывать так:



Протяженность газопровода – **21 км.**

Задача 2

Даны города, часть которых соединена между собой дорогами. Необходимо проложить туристический маршрут минимальной длины, проходящий через все города.



Задача 2

Задача сводится к построению остовного связного дерева минимального веса.

Рассчитаем цикломатическое число.

m (количество ребер) равно **9**

n (количество вершин) равно **6**

$$\gamma = 9 - 6 + 1 = 4$$

Т.е. четыре дороги, соединяющие города, не будут включены в туристический маршрут.

(переходы по щелчку)

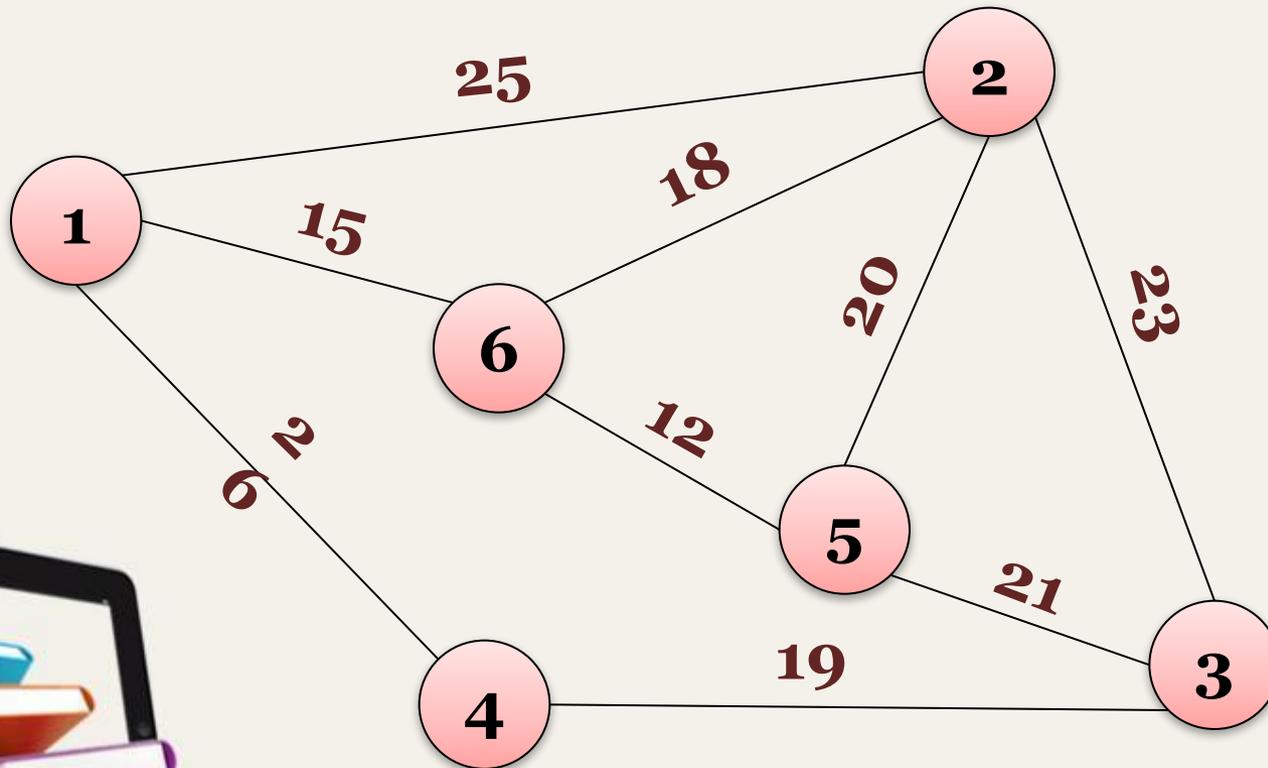
Алгоритм Крускала

1. Удалить все ребра и получить остовной подграф с изолированными вершинами.
2. Отсортировать ребра по возрастанию.
3. Ребра последовательно, по возрастанию их весов, включаются в остовное дерево. Возможны случаи:
 - а) обе вершины включаемого ребра принадлежат одноэлементным подмножествам, тогда они объединяются в новое, связное подмножество;
 - б) одна из вершин принадлежит связному подмножеству, другая нет, тогда включаем вторую в подмножество, которому принадлежит первая;
 - в) обе вершины принадлежат разным связным подмножествам, тогда объединяем подмножества;
 - г) обе вершины принадлежат одному связному подмножеству, тогда исключаем данное ребро.
4. Алгоритм завершается, когда все вершины будут объединены в одно множество.



Задача 2

Для определения туристического маршрута минимальной длины воспользуемся алгоритмом Крускала.

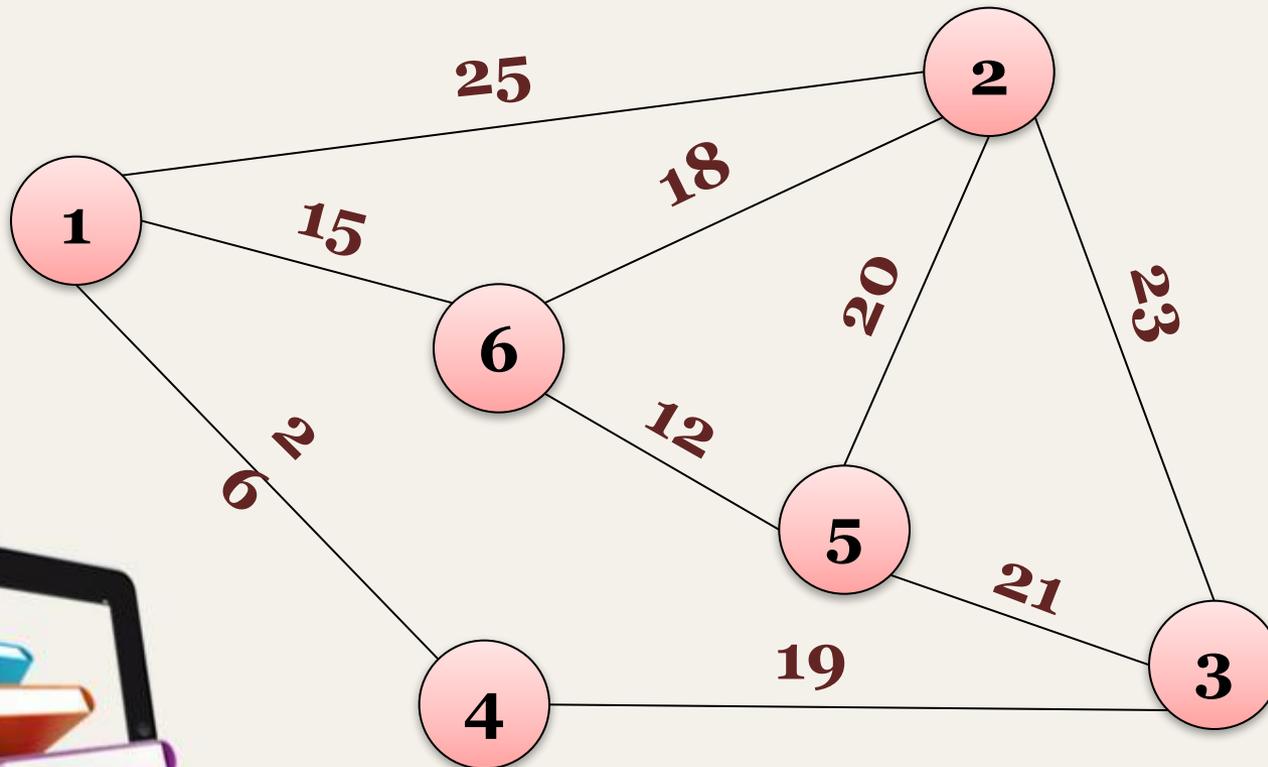


Шаг 1

Задача 2

Построим остовной подграф, содержащий только изолированные вершины.

Получаем шесть одноэлементных подмножеств.



пуск

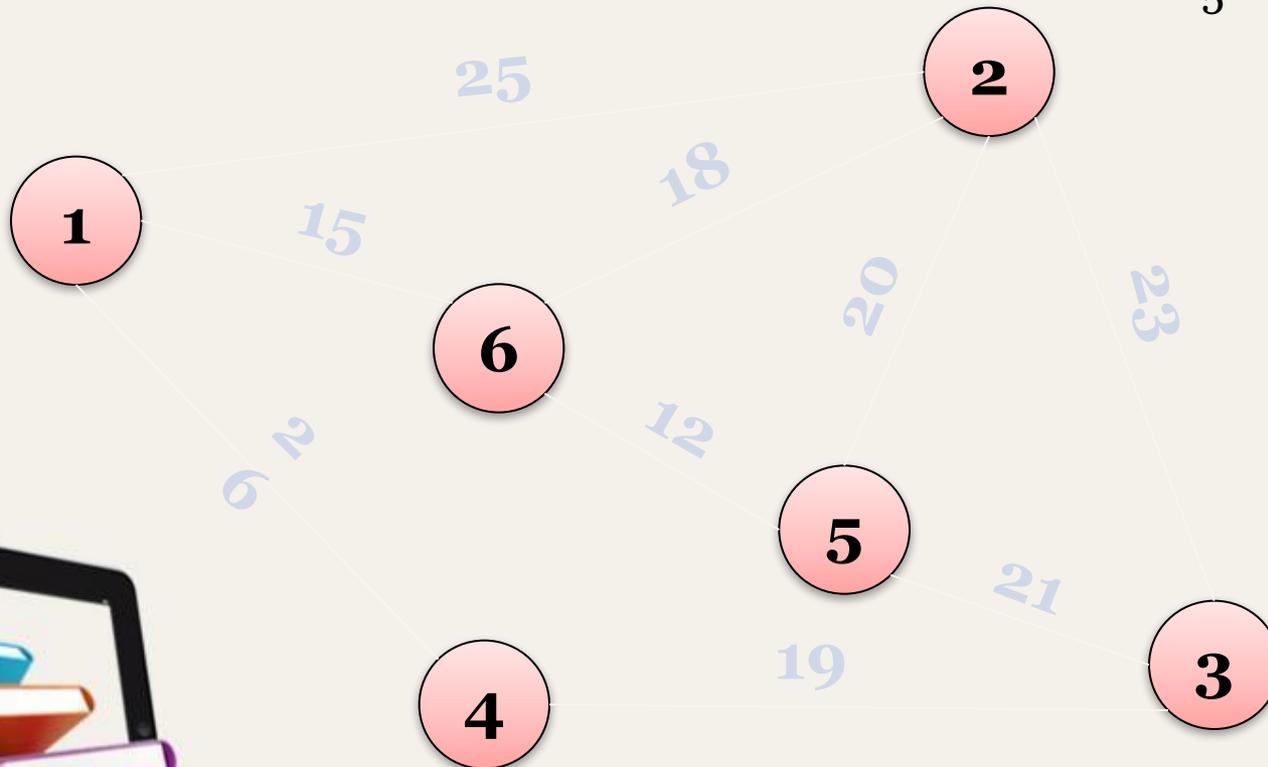


Шаг 2

Задача 2

Найдем ребро минимального веса и добавим его в остовный подграф.

Образуются связное подмножество вершин $\{V_5, V_6\}$.



пуск

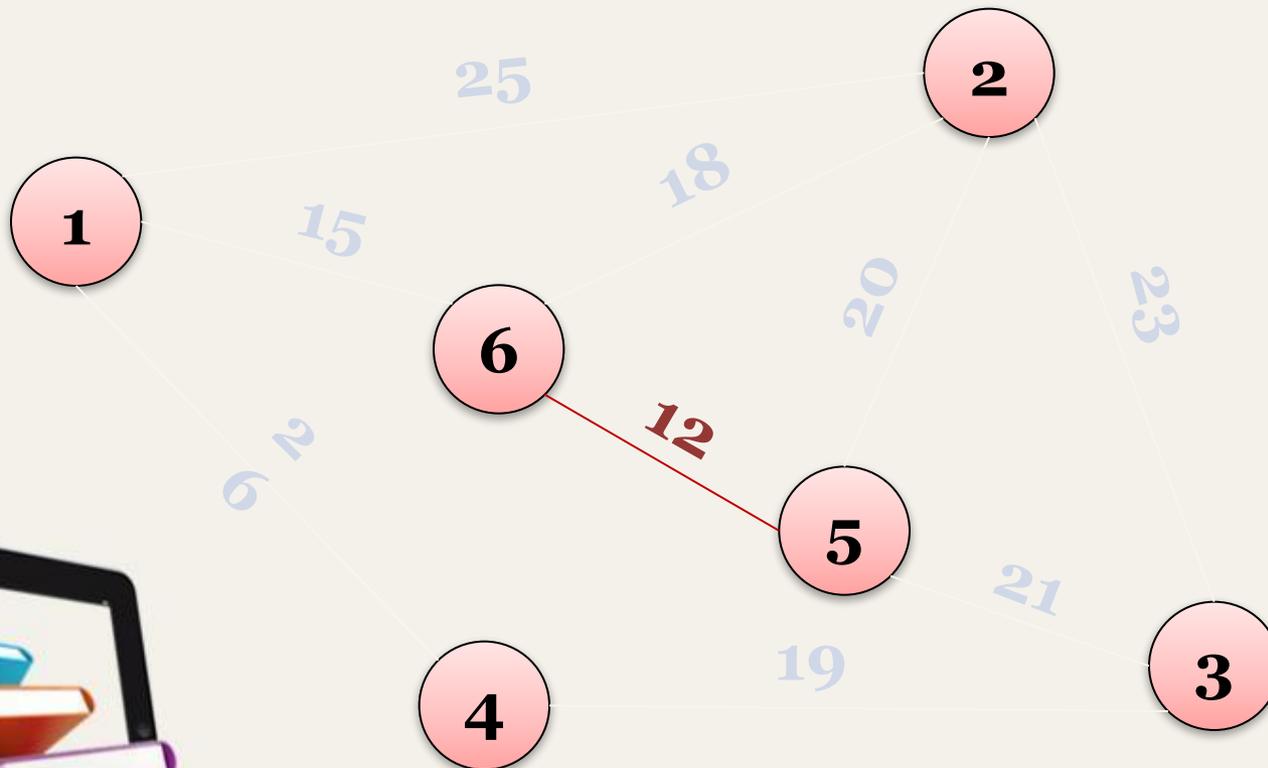


Шаг 3

Задача 2

Среди оставшихся ребер найдем ребро минимального веса и добавим его в остовный подграф.

Добавляем в подмножество вершин еще одну $\{V_5, V_6, V_1\}$.



пуск

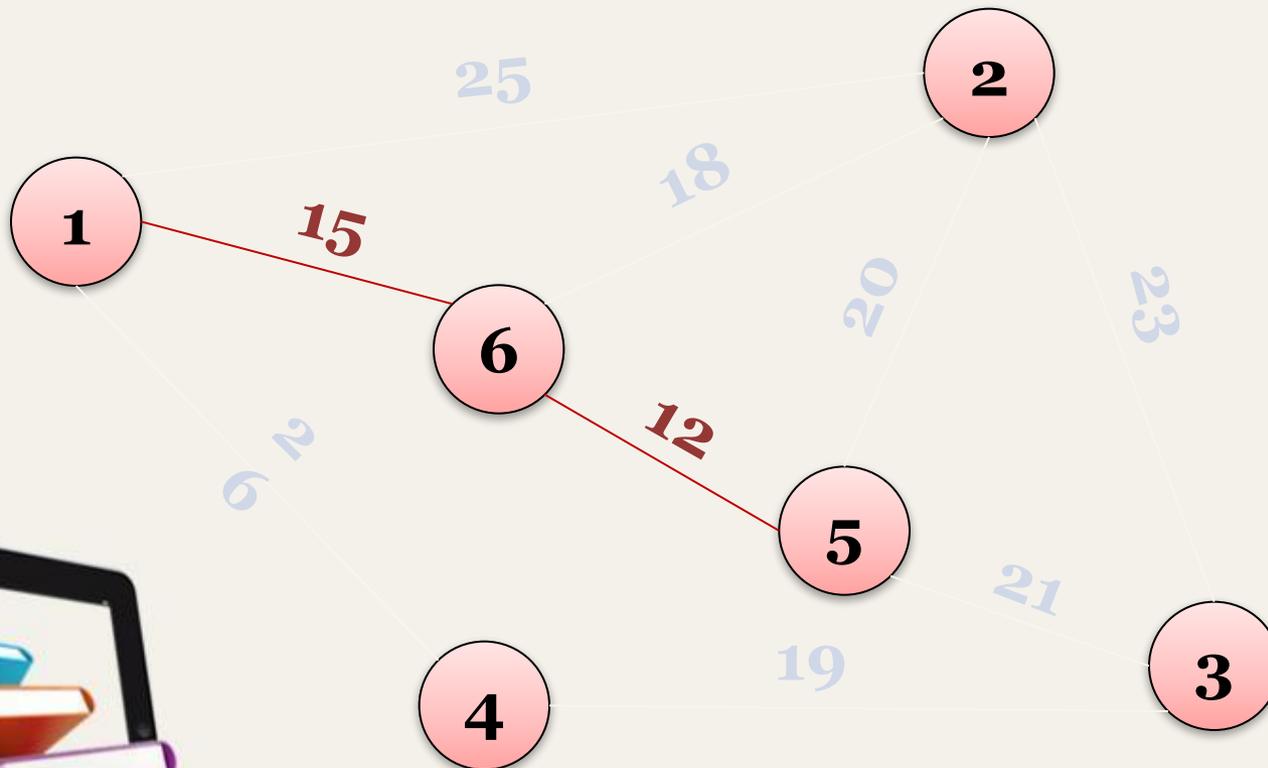


Шаг 4

Задача 2

Среди оставшихся ребер найдем ребро минимального веса и добавим его в остовный подграф.

Добавляем в подмножество вершин еще одну $\{V_5, V_6, V_1, V_2\}$.



пуск

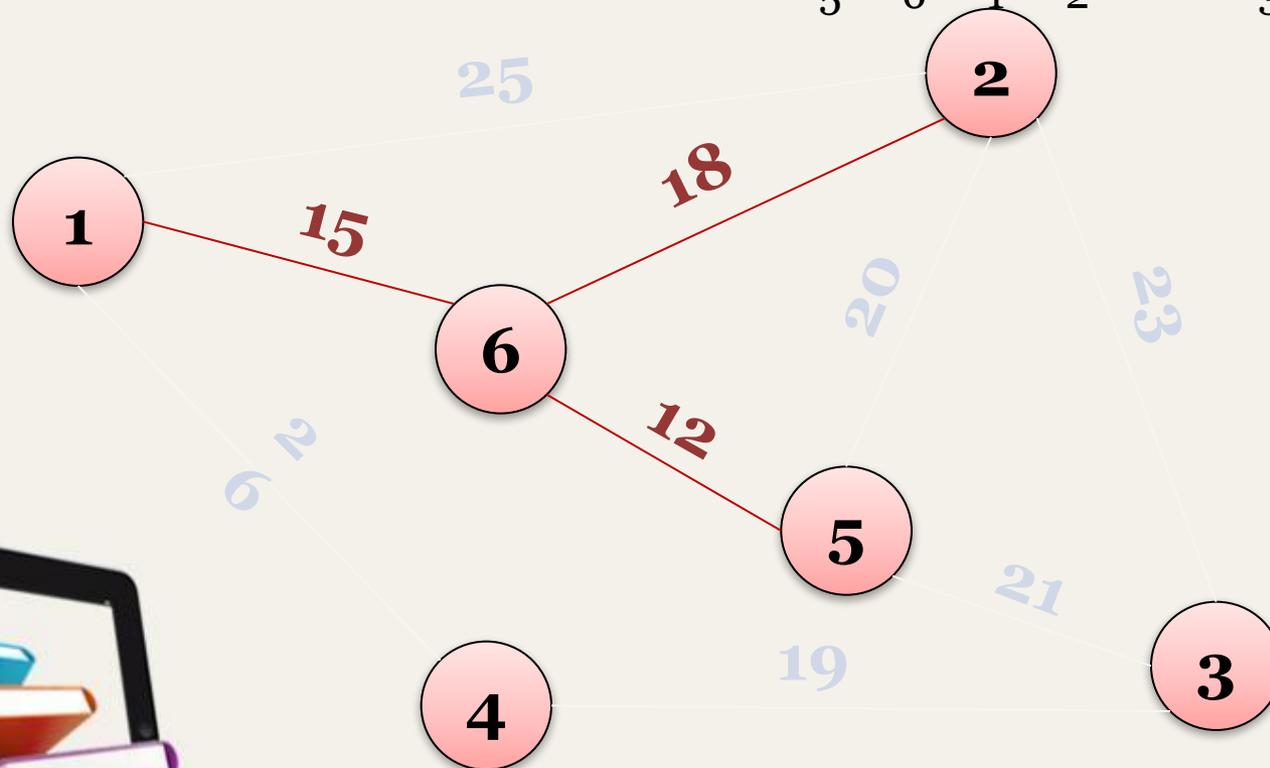


Шаг 5

Задача 2

Среди оставшихся ребер найдем ребро минимального веса и добавим его в остовный подграф.

Образуются два подмножества $\{V_5, V_6, V_1, V_2\}$ и $\{V_3, V_4\}$.



пуск

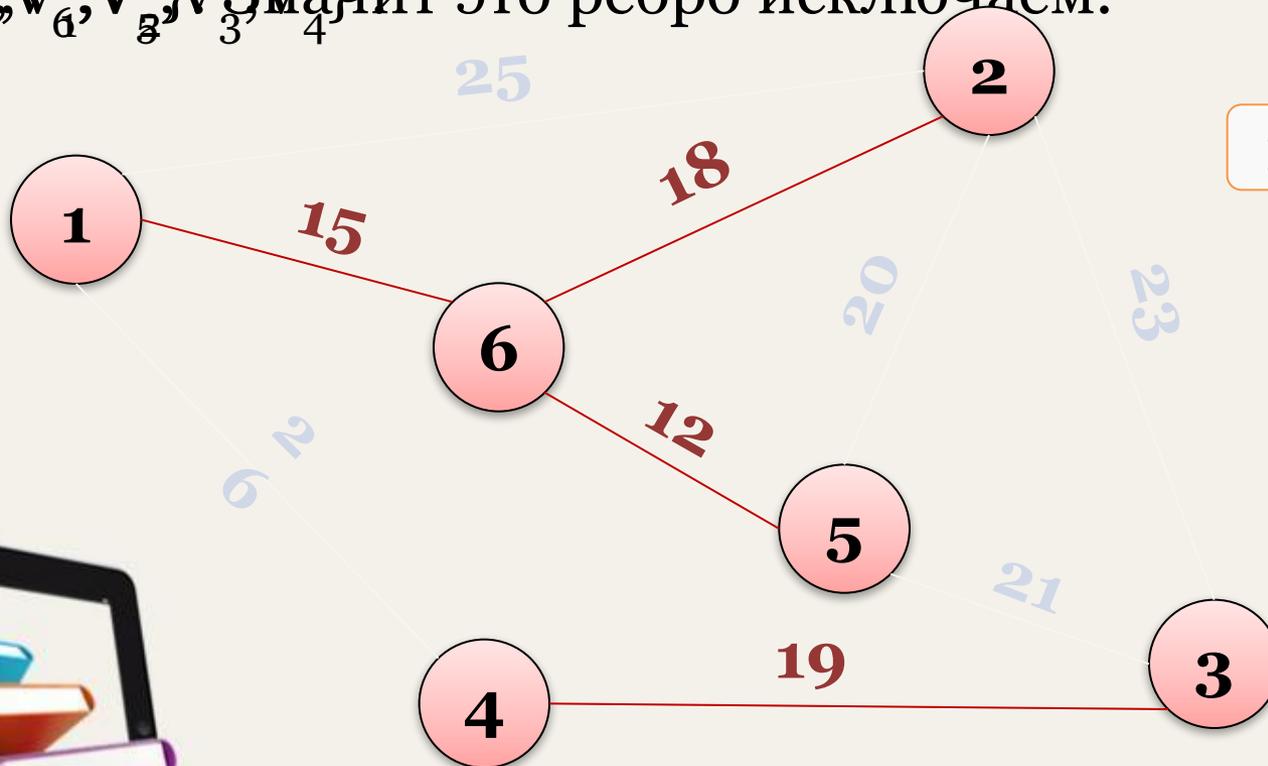


Шаг 6

Задача 2

Среди оставшихся ребер найдем ребро минимального веса и добавим его в остовный подграф.

Подобное ребро объединяет два компонента связности $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$. Значит это ребро исключаем.



пуск (2)

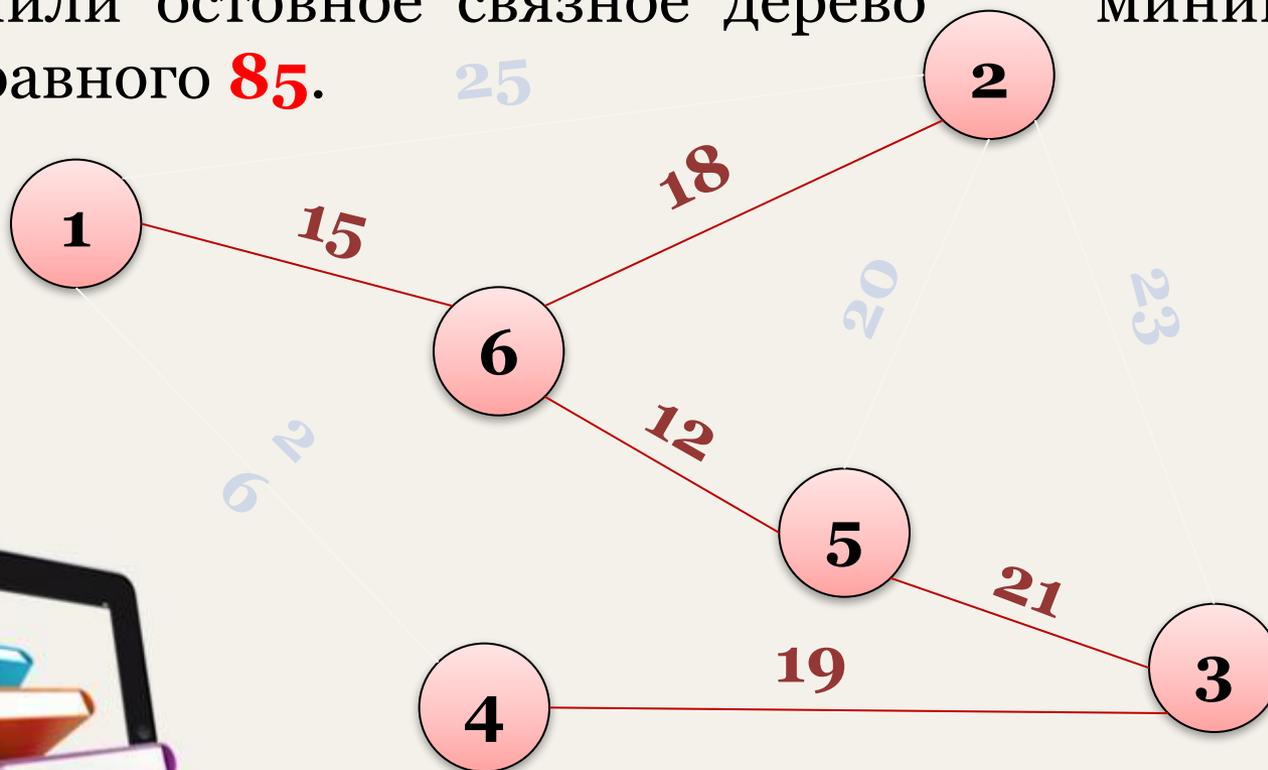


Итог

Задача 2

Остальные ребра включать в граф не надо, т.к. все их вершины уже принадлежат одному связному множеству.

Получили остовное связное дерево минимального веса, равного **85**.



Вопросы

Построенный граф (в задачах 1 и 2) является

- **ОСТОВНЫМ**

В граф включены все вершины

- **СВЯЗНЫМ**

Все вершины в графе можно соединить маршрутами

- **ДЕРЕВОМ**

В графе отсутствуют циклы

- **С МИНИМАЛЬНЫМ ВЕСОМ**

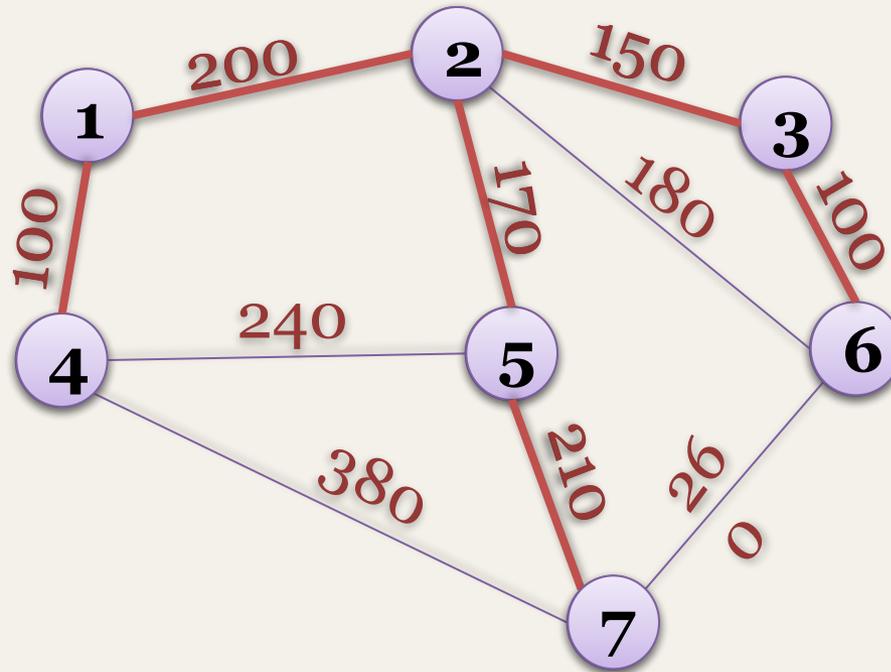
В граф последовательно включались ребра, отсортированные по возрастанию весов

Почему?



Задача 3

На строительном участке необходимо создать телефонную сеть, соединяющую все бытовки. Для того, чтобы телефонные линии не мешали строительству, их решили проводить вдоль дорог. Схема участка изображена на рисунке.



Ответ

Каким образом провести телефонные линии, чтобы их общая длина была минимальной? Общая длина телефонной линии равна **930** метров



Источники

- Кроссворд создан на сайте и расположен по адресу <http://puzzlecup.com/?guess=3C2D4A01E0522AAU>
- Информатика и ИКТ. Профильный уровень: учебник для 11 класса / Н.Д.Угринович. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010.
- Алгоритм Прима-Крускала (видео) http://www.youtube.com/watch?v=vm_9-vnV7PE
- Занимательные задачи по теории графов: Учеб.-метод. пособие/ О.И.Мельников. – Изд-е 2-е, стереотип. – Мн.: «ТетраСистемс», 2001



Источники изображений

- Изображение деревенского дома
http://www.diorama.com.ua/images/product_images/popup_images/2074_1.jpg
- Изображение связанных деревьев
http://xreferat.ru/image/54/1306491707_19.png



ВЫХОД