

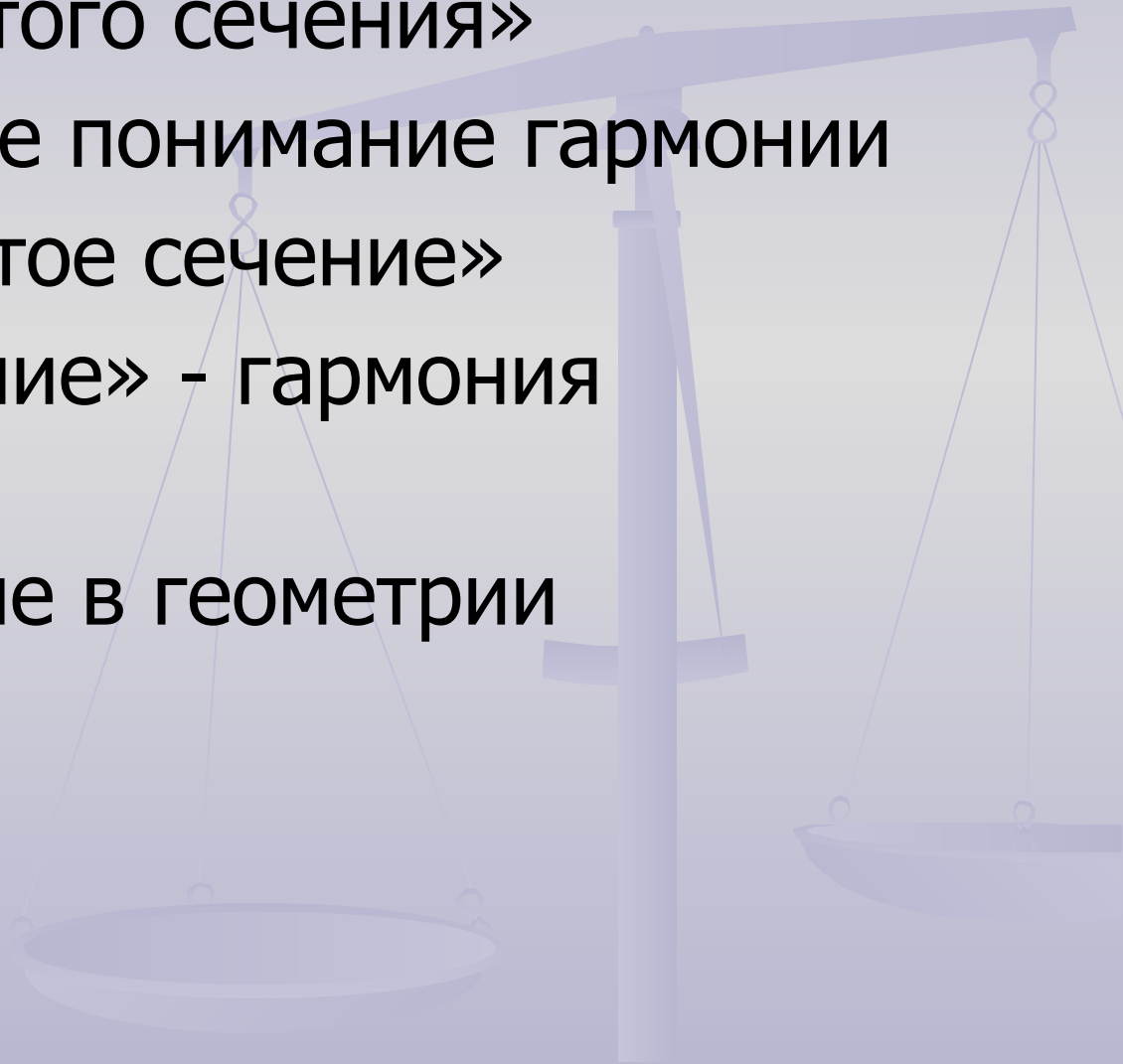


*Золотое сечение -  
гармония математики*

*Учитель математики МОУ СОШ № 4 с углубленным  
изучением отдельных предметов Прийма Т.Б.*

## Содержание:

- Вступление
- История «Золотого сечения»
- Математическое понимание гармонии
- Понятие «Золотое сечение»
- «Золотое сечение» - гармония математики
- Золотое сечение в геометрии
- Вывод



# Вступление

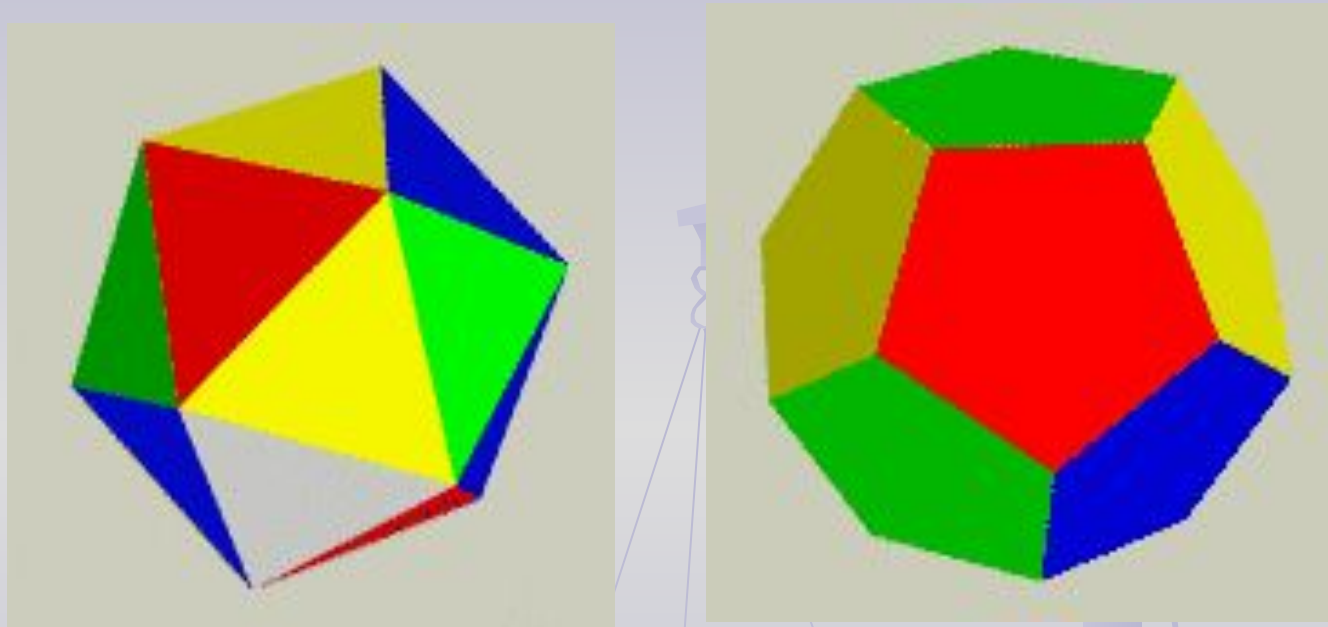
- В дошедшей до нас античной литературе золотое деление впервые упоминается в «Началах» Евклида. Во 2-й книге «Начал» дается геометрическое построение золотого деления. После Евклида исследованием золотого деления занимались многие ученые. Секреты золотого деления ревностно оберегались, хранились в строгой тайне. Они были известны только посвященным.
- Что же такое «золотое сечение»?

# История «Золотого сечения»

## Теория гармонии Древних

- В **Древнем Египте** существовала «система правил гармонии», основанная на Золотом Сечении.
- В **Древней Греции** Золотое Сечение было своеобразным каноном культуры, который пронизывает все сферы науки и искусства. Красота и гармония стали важнейшими категориями познания.
- В толковании древних греков **понятие золотого сечения, и понятие гармонии идентичны.**
- Согласно **Пифагору гармония имеет численное выражение**, то есть, она связана с концепцией числа.
- **Евклид** излагает теорию Платоновых тел, которая является существенным разделом геометрической теории Золотого Сечения.

# Икосаэдр и додекаэдр



Два главных Платоновых тела,  
додекаэдр и икосаэдр, основаны на  
Золотом Сечении.

# Ряд Фибоначчи

- С историей золотого сечения связано имя итальянского математика Леонардо Фибоначчи.
- Ряд чисел **0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55** и т.д. известен как ряд Фибоначчи.
- **Каждый член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, а отношение смежных чисел ряда приближается к отношению золотого деления.**
- Все исследователи золотого деления в растительном и в животном мире, искусстве, неизменно приходили к ряду Фибоначчи как арифметическому выражению закона



# «Золотая Пропорция» - главный эстетический принцип эпохи Средневековья

Эпоха Возрождения ассоциируется с именами таких «титанов», как Леонардо да Винчи, Микеланджело, Рафаэль, Николай Коперник, Альберт Дюрер, Лука Пачоли.

Имеется много авторитетных свидетельств о том, что именно **Леонардо да Винчи(1452-1519)** был одним из первых, кто ввел сам термин «**Золотое Сечение**».

Доказано, что во многих своих произведениях Леонардо да Винчи использовал пропорции золотого сечения, в частности, в своей всемирно известной фреске «**Тайная вечеря**» и непревзойденной «**Джоконде**».





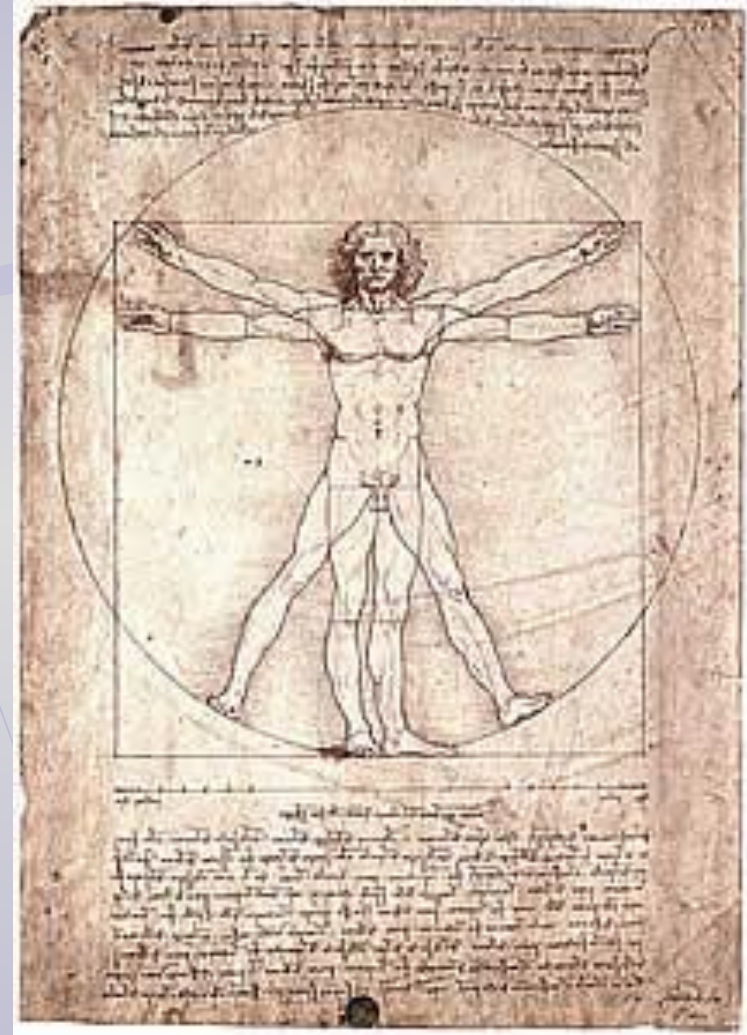
# «Витрувийский человек» Леонардо да Винчи

Разрабатывая правила изображения человеческой фигуры, Леонардо да Винчи пытался на основе литературных сведений древности восстановить так называемый **«квадрат древних»**.

Он выполнил рисунок, в котором показано, что размах вытянутых в сторону рук человека примерно равен его росту, вследствие чего **фигура человека вписывается в квадрат и в круг**.

При исследовании рисунка можно заметить, что комбинация рук и ног в действительности составляет четыре различных позы.

Рисунок и текст иногда называют **каноническими пропорциями**.





# Вклад Кеплера в теорию Золотого Сечения



- Гениальный астроном Иоганн Кеплер (1571-1630) был последовательным приверженцем Золотого Сечения, Платоновых тел и Пифагорейской доктрины о числовой гармонии Мироздания.
- Считается, что именно Кеплер обратил внимание на ботаническую закономерность **филлотаксиса** и установил **связь между числами Фибоначчи и золотой пропорцией**, доказав, что последовательность отношений соседних чисел Фибоначчи:  
 **$1/1; 2/1; 3/2; 5/3; 8/5; 13/8; \dots$**  в пределе стремится к золотой пропорции

# Математическое понимание гармонии

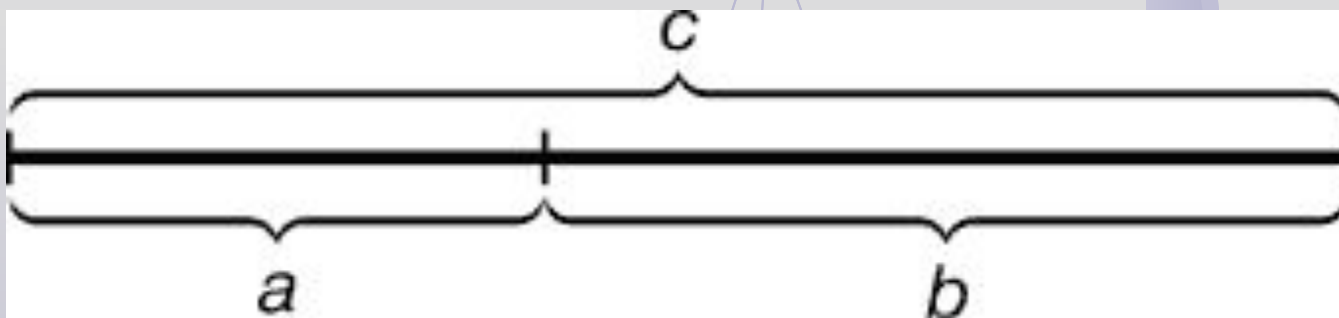
- «**Гармония** – соразмерность частей и целого, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В гармонии получают внешнее выявление внутренняя упорядоченность и мера бытия» - *Большая Советская Энциклопедия*

- **Математическая гармония** - это равенство или соразмерность частей с друг другом и части с целым.

Понятие математической гармонии тесно связано с понятиями **пропорции** и **симметрии**.

# Понятие «Золотое сечение»

**Золотое сечение** - деление непрерывной величины на две части в таком отношении, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая ко всей величине.

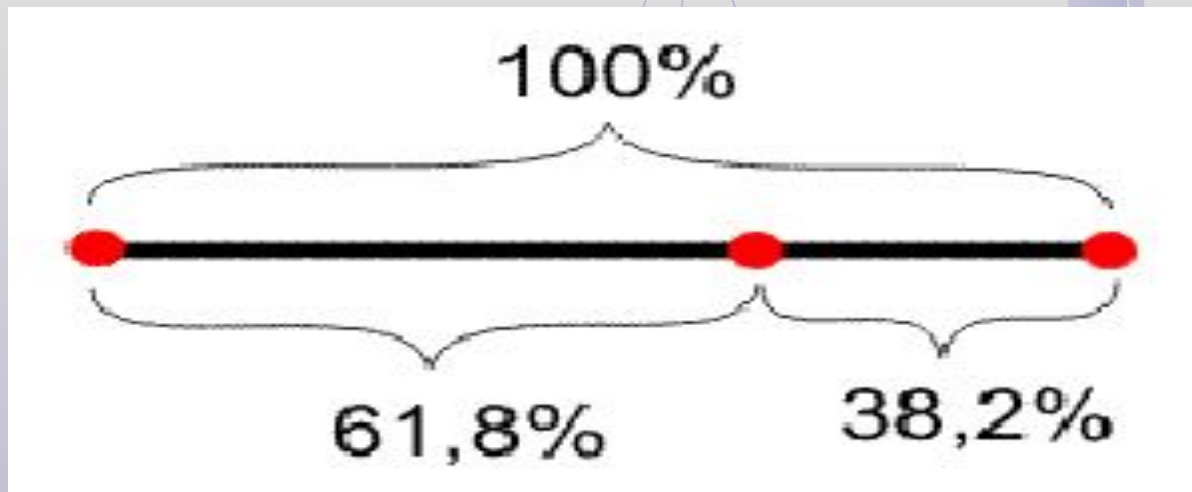


$$a : b = b : c \quad \text{или} \quad c : b = b : a$$

Эта пропорция равна:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398874989484 \dots$$

Золотое сечение в процентах



# «Золотое сечение» - гармония математики

Число  $\phi$  является положительным корнем квадратного уравнения:

$$x^2 = x + 1 \quad (1)$$

подставим корень  $\phi$  вместо  $x$  и разделим на  $\phi$  :

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \quad (2)$$

Если продолжить такую подстановку бесконечное число раз, то получим

**цепную дробь:**

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad (3)$$

Аналогично, если взять корень квадратный из правой и левой частей тождества (1) то получим

**представление золотой пропорции в «радикалах»:**

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} \quad (4)$$

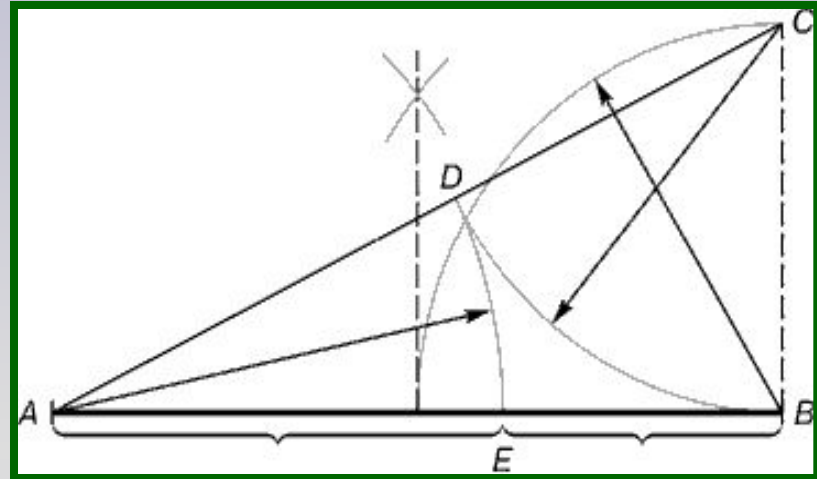
**Эти формулы (3) и (4) доставляют «эстетическое наслаждение» и вызывают неосознанное чувство ритма и гармонии...**

# Золотое сечение в геометрии

## Деление отрезка в золотом отношении

**Дано:** отрезок  $AB$ .

**Построить:** золотое сечение отрезка  $AB$ , т.е. точку  $E$  так, чтобы  $\frac{BE}{AE} = \frac{AE}{AB}$ .



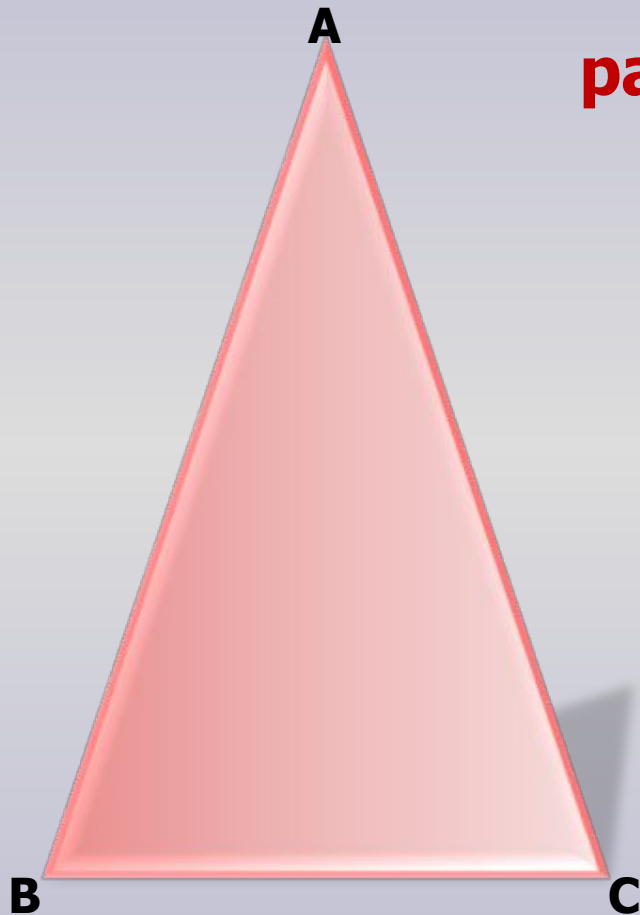
### Построение.

Построим прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза больше другого. Для этого восстановим в точке  $B$  перпендикуляр к прямой  $AB$  и на нем отложим отрезок  $BC = \frac{1}{2} AB$ . Далее, соединим точки  $A$  и  $C$ , отложим отрезок  $CD = CB$ , и наконец  $AE = AD$ .

Точка  $E$  является искомой, она производит золотое сечение отрезка  $AB$ .



# Золотой треугольник

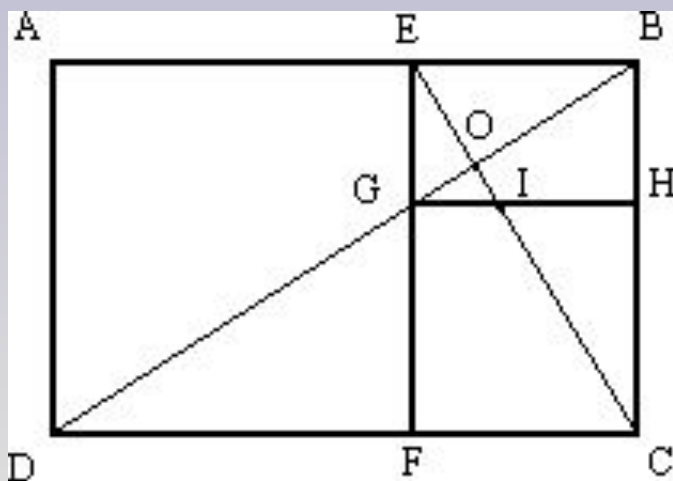


**Золотым** называется такой **равнобедренный треугольник**, основание и боковая сторона которого находятся в золотом отношении:

$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$$

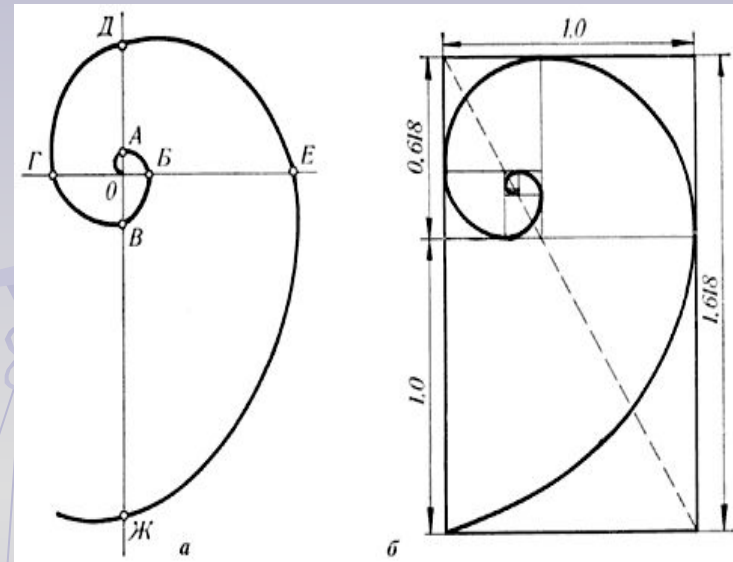
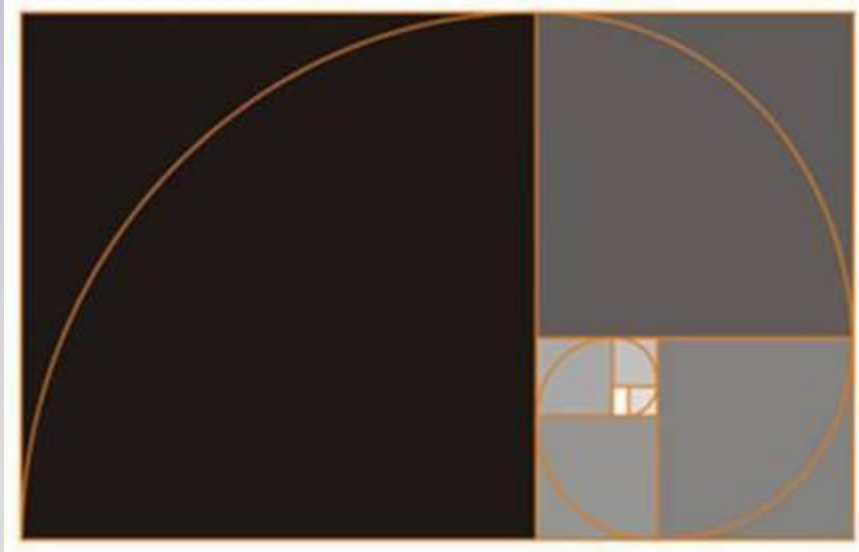
# Золотой прямоугольник



$$\frac{AB}{BC} = \varphi$$

Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, т.е. отношение длины к ширине даёт число  **$\varphi$** , называется **золотым прямоугольником.**

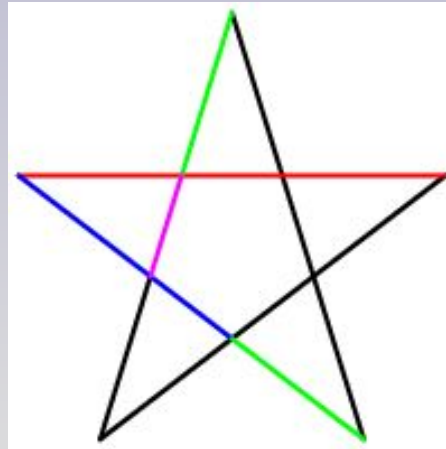
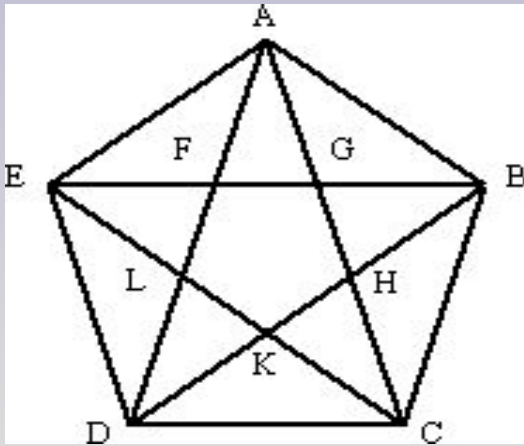
# Золотая спираль



Последовательно отрезая от золотого прямоугольника квадраты и вписывая в каждый по четверти окружности, получаем **золотую логарифмическую спираль**.

Форма спирально завитой раковины привлекла внимание Архимеда. Он изучал ее и вывел уравнение спирали. Спираль, вычерченная по этому уравнению, называется **спираль Архимеда**.

# Пентаграмма



Если в пентаграмме провести все диагонали, то в результате получим **пятиугольную звезду**.

Точки пересечения диагоналей в пентаграмме являются **точками золотого сечения диагоналей** (отношение синего отрезка к зелёному, красного к синему, зелёного к фиолетовому, равны **1.618**). При этом эти точки образуют **новую пентаграмму**  $FGHKL$  и **пять правильных треугольников** ( $ADC, ADB, EBD, AEC, EBC$ )

Здание военного ведомства США имеет форму пентаграммы и получило название «**Пентагон**», что значит правильный пятиугольник.

# Вывод

- Целое всегда состоит из частей, части разной величины находятся в определенном отношении друг к другу и к целому. Принцип золотого сечения – одно из замечательных проявлений структурного и функционального совершенства целого и его частей в искусстве, науке, технике и природе.

