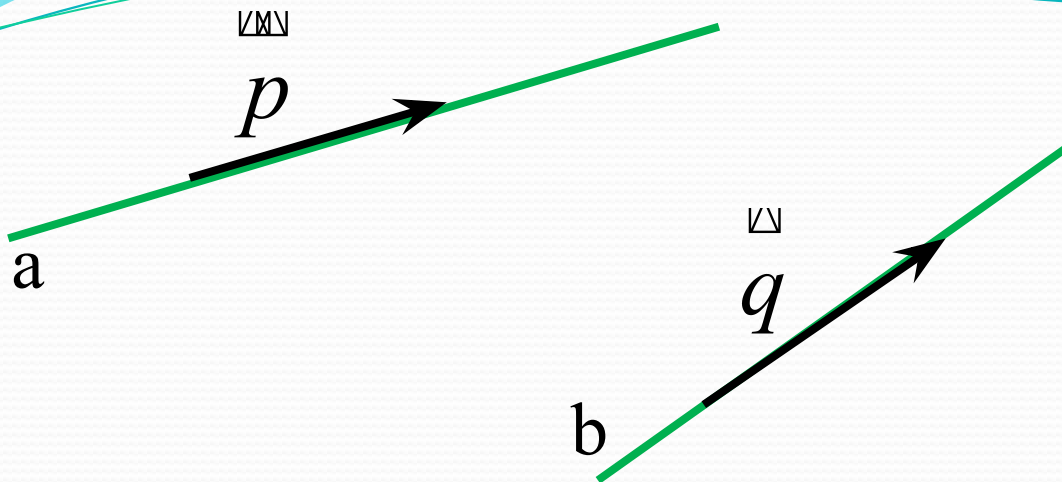


Задания С2 на ЕГЭ. Координатный метод. Углы в пространстве.

Лещенко С. И. учитель математики
МБОУ СОШ № 8 г. Туапсе
Краснодарского края

Угол между прямыми.



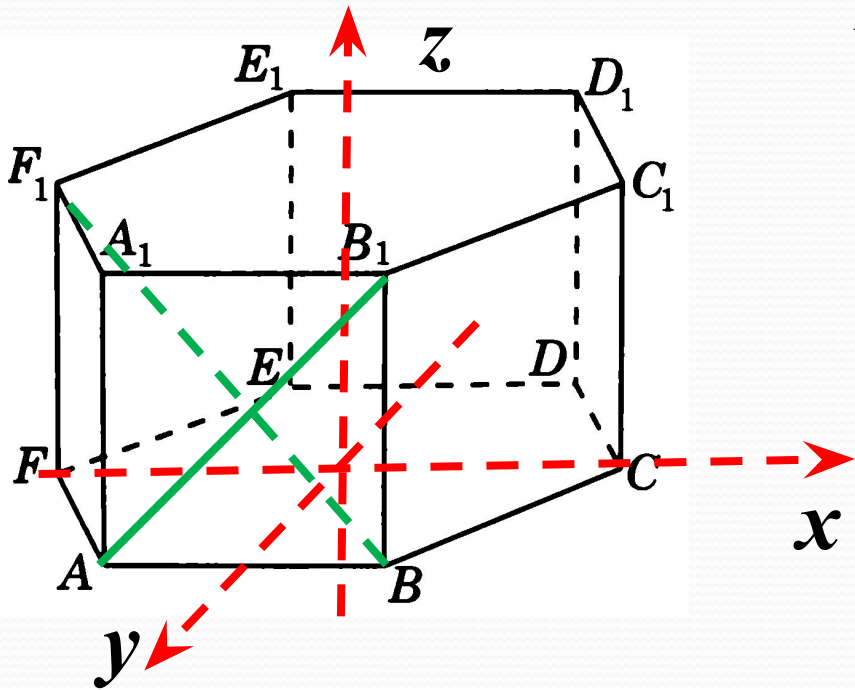
$$\overline{p} \{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\overline{q} \{x_2; y_2; z_2\}$$

-направляющие
вектора прямых

$$\cos \angle(a, b) = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

№ 1. В правильной шестиугольной призме все ребра равны 1. Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BF_1



$$A \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

$$B_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right)$$

$$B \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

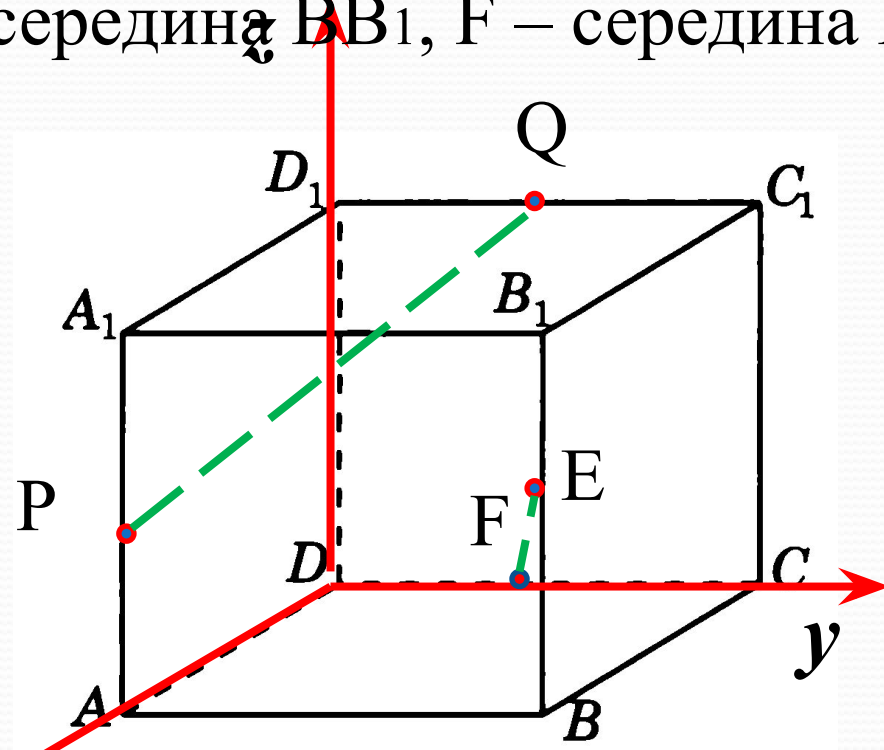
$$F_1 (-1; 0; 1)$$

$\overline{AB_1} \{1; 0; 1\}$ $\overline{BF_1} \left\{ -\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right\}$ -направляющие
вектора прямых

$$\cos \angle (AB_1, BF_1) = \frac{\left| -\frac{3}{2} \cdot 1 + 0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{\left(-\frac{3}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{8}$

№ 2. Ребро куба равно 4. Найдите косинус угла между прямыми PQ и EF, P – середина AA₁, Q – середина C₁D₁, E – середина BB₁, F – середина DC.



P (4; 0; 2)

Q (0; 2; 4)

E (4; 4; 2)

F (0; 2; 0)

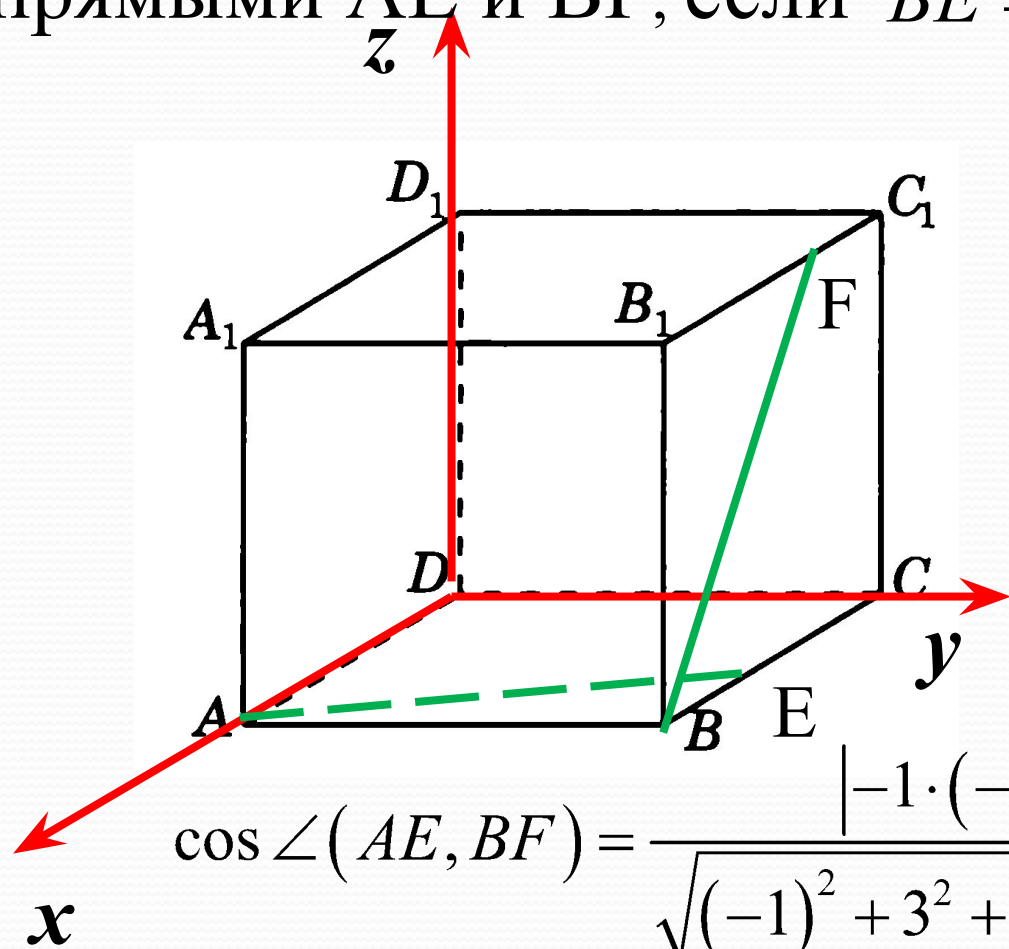
$\overrightarrow{PQ} \{-4; 2; 2\}$

$\overrightarrow{EF} \{-4; -2; -2\}$

$$\cos \angle (PQ, EF) = \frac{|-4 \cdot (-4) + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2)|}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

№ 3. Ребро куба равно 3. Найдите угол между прямыми AE и BF , если $BE = \frac{1}{3}BC$, $C_1F = \frac{1}{3}C_1B_1$.



$$A(3; 0; 0) \quad \overline{AE} \{-1; 3; 0\}$$

$$E(2; 3; 0)$$

$$B(3; 3; 0)$$

$$\overline{BF} \{-2; 0; 3\}$$

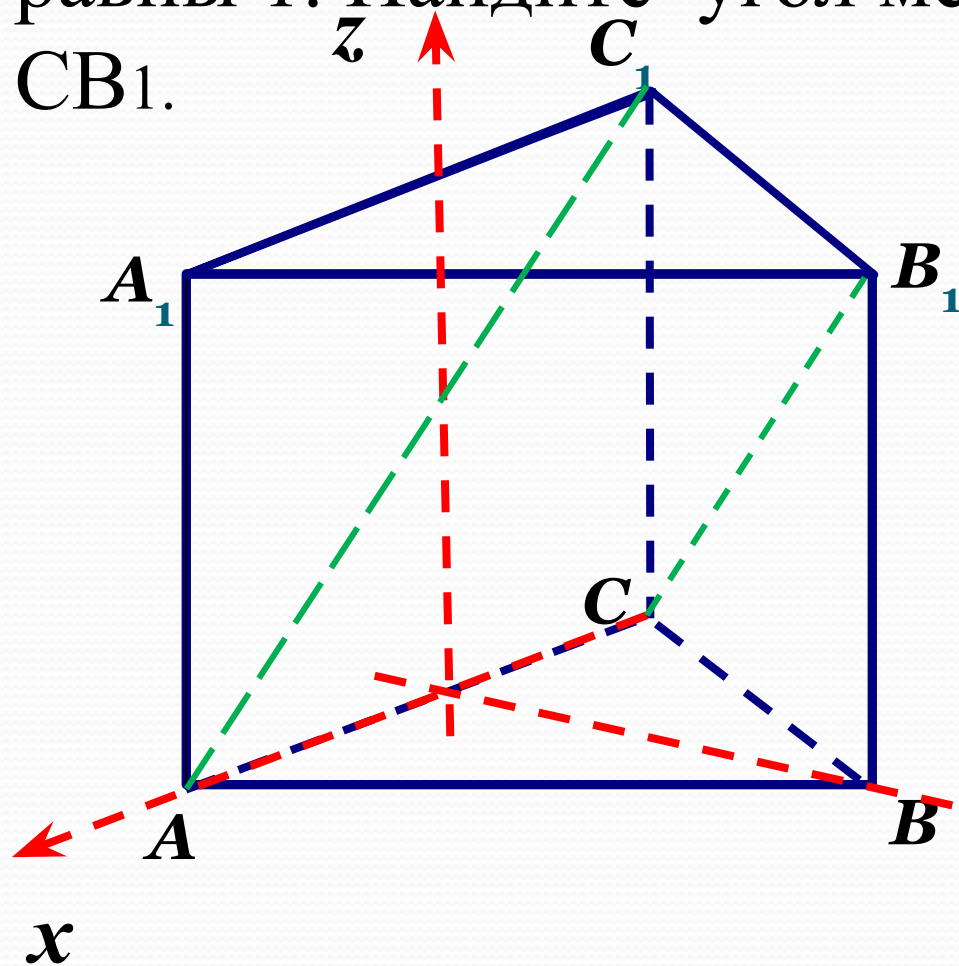
$$F(1; 3; 3)$$

$$\cos \angle(AE, BF) = \frac{|-1 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2} \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{130}}{65}$$

$$\angle(AE, BF) = \arccos \frac{\sqrt{130}}{65}$$

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{130}}{65}$

№ 4. В правильной треугольной призме все ребра равны 1. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1 .



$$A \left(\frac{1}{2}; 0; 0 \right) \quad \text{---} \quad AC_1 \{ -1; 0; 1 \}$$

$$C_1 \left(-\frac{1}{2}; 0; 1 \right)$$

$$C \left(-\frac{1}{2}; 0; 0 \right)$$

$$\text{---} \quad CB_1 \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right\}$$

$$B_1 \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right)$$

$$\overline{AC_1} \{-1; 0; 1\}$$

$$\overline{CB_1} \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right\}$$

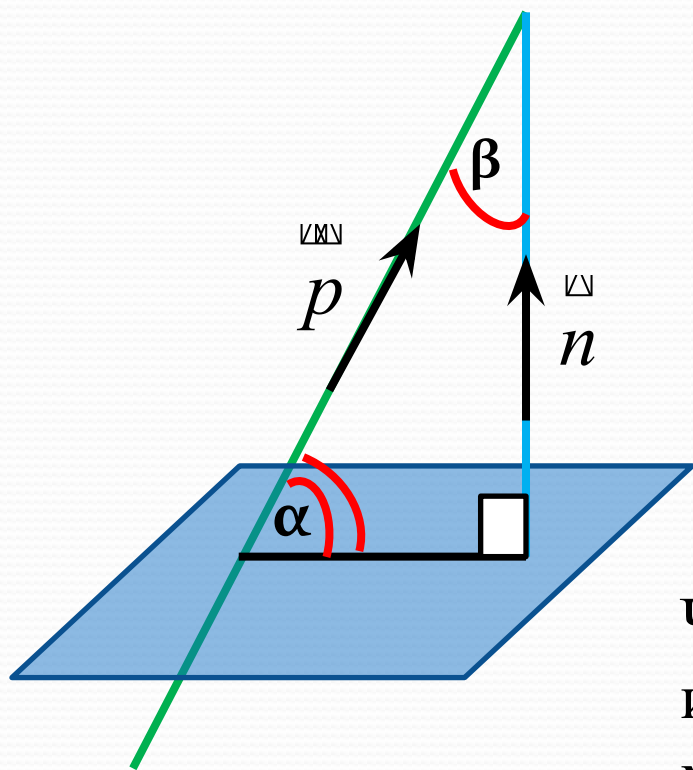
$$\cos \angle (AC_1, CB_1) = \frac{\left| \frac{1}{2} \cdot (-1) + 0 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{4}$$

$$\angle (AC_1, CB_1) = \arccos \frac{1}{4}$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{4}$

Угол между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



α - угол между прямой и плоскостью

$$\sin \alpha = \sin(90 - \beta) = \cos \beta$$

β – угол между прямой и перпендикуляром к плоскости

Чтобы найти синус угла между прямой и плоскостью можно найти косинус угла между прямой и перпендикуляром к плоскости

$ax + by + cz + d = 0$ уравнение плоскости

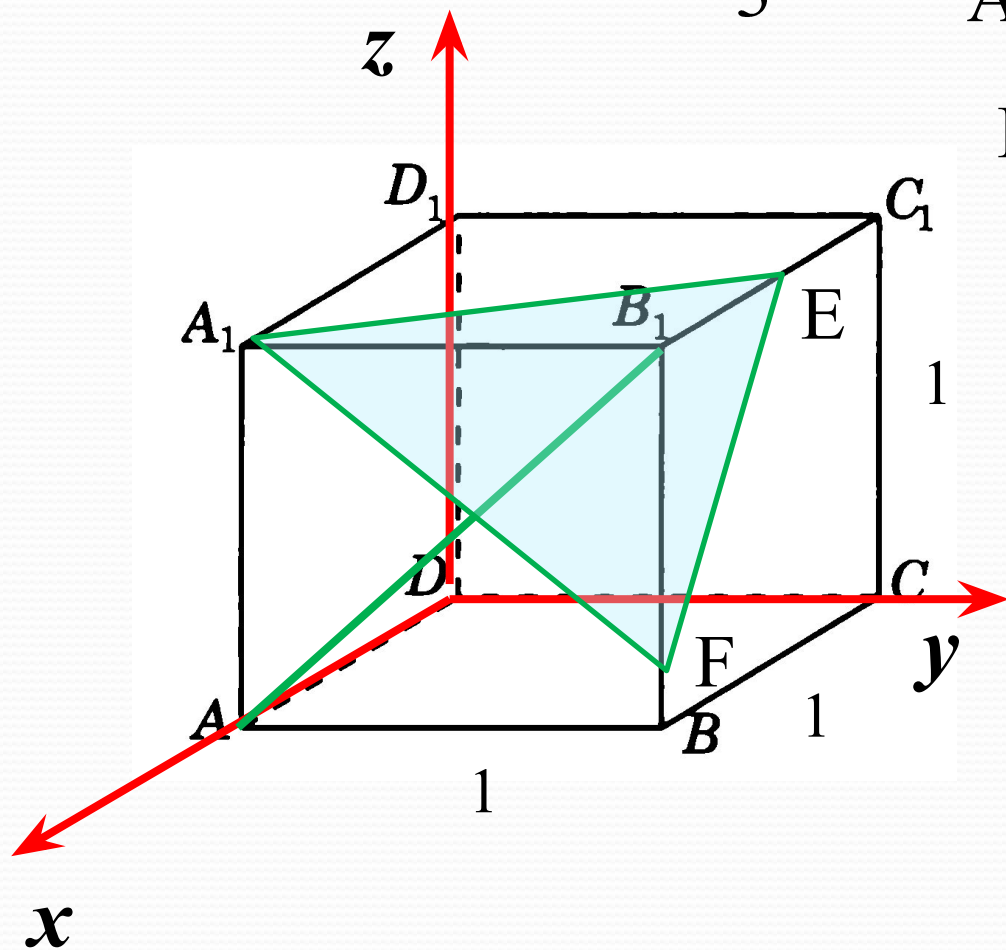
∇
 $n \{a; b; c\}$ - вектор нормали к плоскости

$\nabla\nabla$
 $p \{x_1; y_1; z_1\}$ - направляющий вектор прямой

$$\varphi = \angle \left(\overset{\nabla}{n}, \overset{\nabla\nabla}{p} \right)$$

$$\sin \varphi = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

№ 1 В единичном кубе найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью (A_1EF) , где E – середина B_1C_1 , $BF = \frac{1}{3}BB_1$



$$A_1 (1; 0; 1)$$

$$A (1; 0; 0)$$

$$E (0,5; 1; 1)$$

$$B_1 (1; 1; 1)$$

$$F \left(1; 1; \frac{1}{3} \right)$$

$$p = AB_1$$

$$p \{ 0; 1; 1 \}$$

Запишем уравнение плоскости (A_1EF) :

$$A_1 (1; 0; 1) \quad E (0,5; 1; 1) \quad ax + by + cz + d = 0$$

$$F \left(1; 1; \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{4}{3}cx + \frac{2}{3}cy + cz - \frac{7}{3}c = 0$$

$$\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y + z - \frac{7}{3} = 0$$

$$4x + 2y + 3z - 7 = 0$$

- уравнение плоскости (A₁EF).

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ \frac{1}{2}a + b + c + d = 0 \\ a + b + \frac{1}{3}c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{4}{3}c \\ b = \frac{2}{3}c \\ d = -\frac{7}{3}c \end{cases}$$

$$4x + 2y + 3z - 7 = 0$$

$\overline{n} \{4; 2; 3\}$ - вектор нормали к плоскости

$\overline{p} \{0; 1; 1\}$ - направляющий вектор прямой

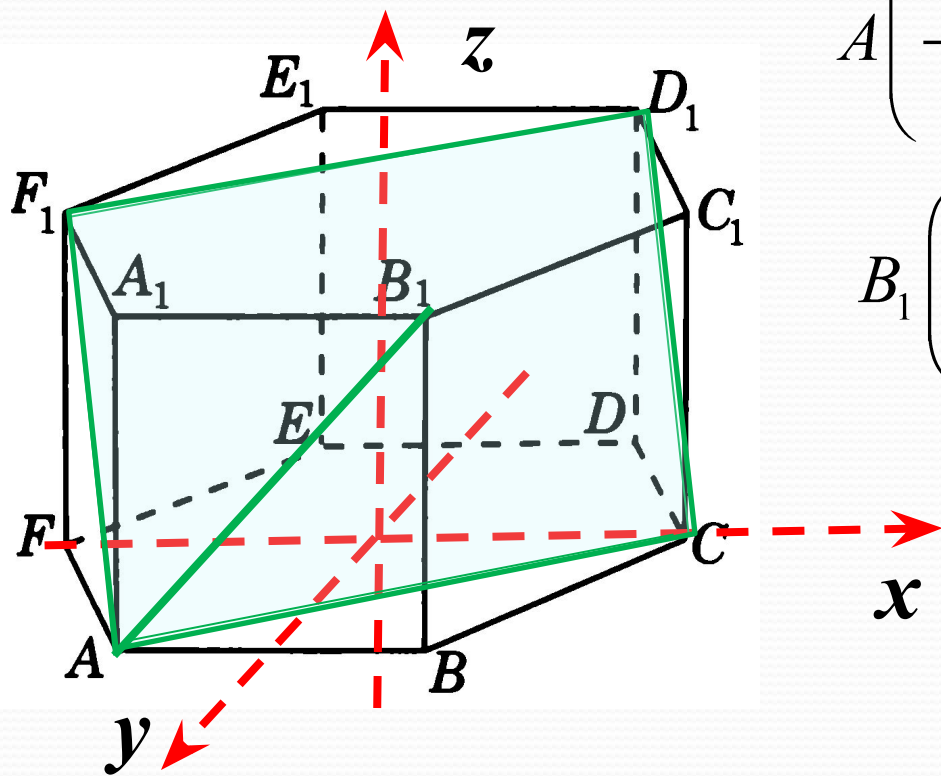
$$\varphi = \angle(\overline{n}, \overline{p})$$

$$\sin \varphi = \frac{|4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{58}}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{5}{\sqrt{58}}$$

Ответ: $\arcsin \frac{5}{\sqrt{58}}$

№ 2. В правильной шестиугольной призме все ребра равны 1. Найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью (ACF_1) .



$$A \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

$$p = AB_1$$

$$B_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right)$$

$$p \{ 1; 0; 1 \}$$

Запишем уравнение
плоскости (ACF_1) :

$$A \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right) \quad C (1; 0; 0)$$

$$F_1 (-1; 0; 1)$$

$$-dx - \sqrt{3}dy - 2dz + d = 0$$

$$x + \sqrt{3}y + 2z - 1 = 0$$

- уравнение плоскости (АСF₁).

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \\ a + d = 0 \\ -a + c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -d \\ b = -\sqrt{3}d \\ c = -2d \end{cases}$$

$$x + \sqrt{3}y + 2z - 1 = 0$$

$\vec{n} \{1; \sqrt{3}; 2\}$ - вектор нормали к плоскости

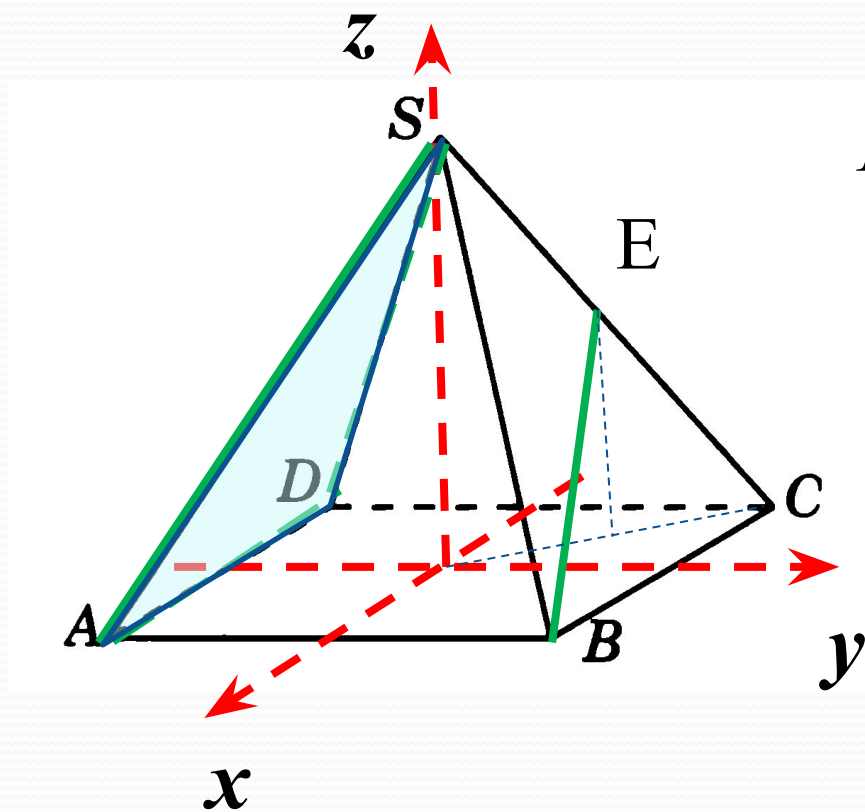
$\vec{p} \{1; 0; 1\}$ - направляющий вектор прямой

$$\varphi = \angle(\vec{n}, \vec{p})$$

$$\sin \varphi = \frac{|1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$

№ 3. В правильной четырехугольной пирамиде ребро основания равно 4, а высота – 6. Найдите угол между прямой BE , где E – середина SC и плоскостью (ADS) .



$$B(2; 2; 0) \quad \overline{MN} \quad \overline{N_1N_2N_3N_4}$$

$$E(-1; 1; 3) \quad p = BE$$

$$\overline{MN} \quad p \{-3; -1; 3\}$$

Запишем уравнение плоскости (ASD) :

$$A(2; -2; 0) \quad D(-2; -2; 0)$$

$$S(0; 0; 6)$$

$$0dx + \frac{1}{2}dy - \frac{1}{6}dz + d = 0$$

$$0x + 3y - z + 6 = 0$$

- уравнение плоскости (ASD).

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} 2a - 2b + d = 0 \\ -2a - 2b + d = 0 \\ 6c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2}d \\ c = -\frac{1}{6}d \end{cases}$$

$$0x + 3y - z + 6 = 0$$

∇
 $n \{0; 3; -1\}$ - вектор нормали к плоскости

$\nabla\nabla$
 $p \{-3; -1; 3\}$ - направляющий вектор прямой

$$\varphi = \angle \left(\overset{\nabla}{n}, \overset{\nabla\nabla}{p} \right)$$

$$\sin \varphi = \frac{|-3 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)|}{\sqrt{0^2 + 3^2 + (-1)^2} \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{190}}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{6}{\sqrt{190}} \quad \text{Ответ: } \arcsin \frac{6}{\sqrt{190}}$$

**Угол между
плоскостями.**

Угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям.

уравнение плоскости α —

α

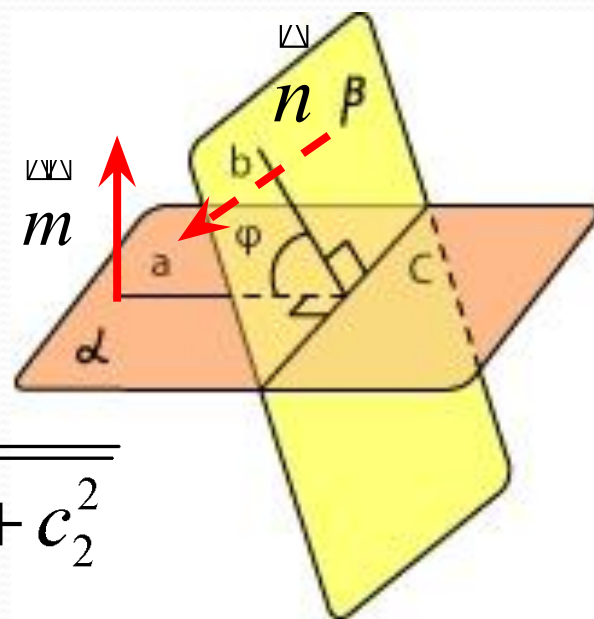
уравнение плоскости β —

β

$$\vec{m}\{a_1; b_1; c_1\} \perp \alpha$$

$$\vec{n}\{a_2; b_2; c_2\} \perp \beta$$

$$\cos(\vec{m}; \vec{n}) = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



Например:

2 уравнения по 6 координатам

α

4 уравнения по 6 координатам

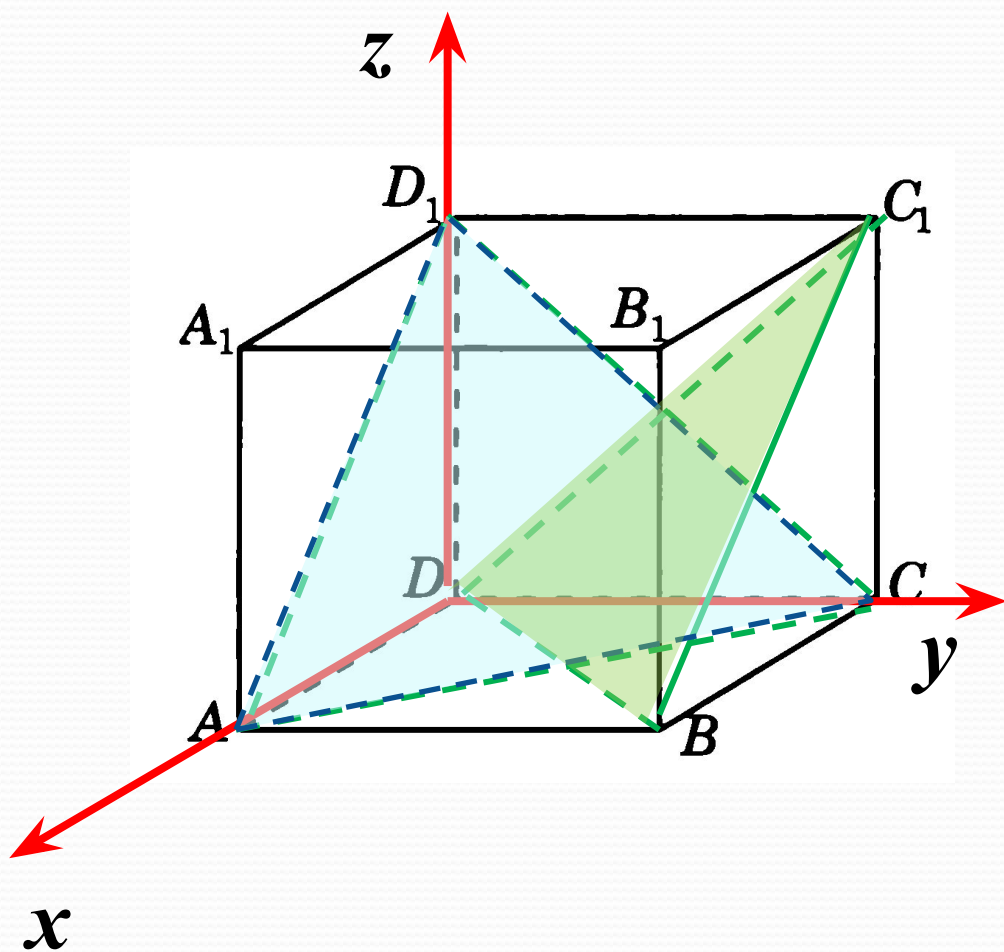
β

$$m \{2; 3; 6\} \perp \alpha$$

$$n \{4; 4; 2\} \perp \beta$$

$$\cos \left(\begin{matrix} \square \square \square \square \\ m; n \end{matrix} \right) = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{16}{21}$$

№ 1. В единичном кубе найдите угол между плоскостями (ACD_1) и (BDC_1) .



$$A (1; 0; 0) \quad D_1 (0; 0; 1)$$

$$C (0; 1; 0)$$

$$D (0; 0; 0) \quad C_1 (0; 1; 1)$$

$$B (1; 1; 0)$$

Запишем уравнения
плоскостей (ACD_1) и
 (BDC_1) :

$$ax + by + cz + d = 0$$

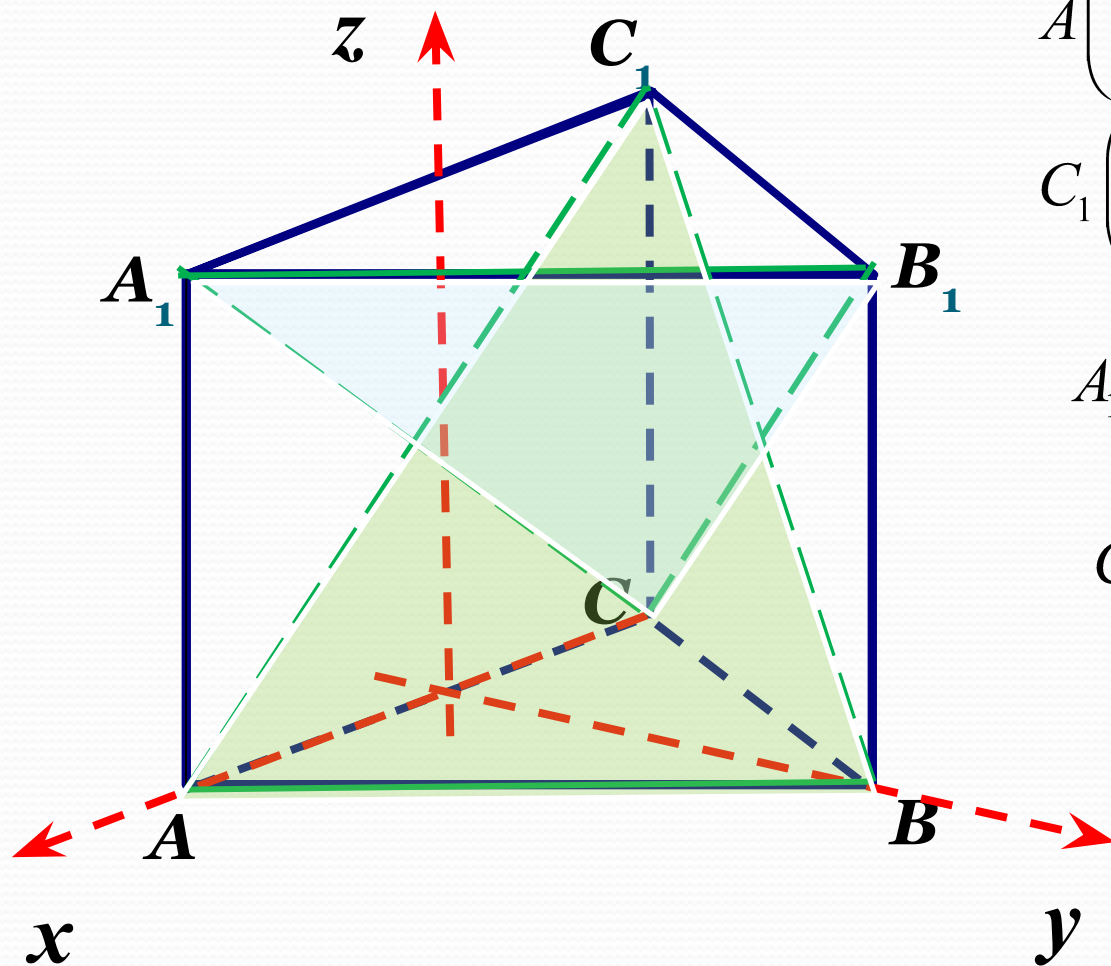
| | | | |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| A (1; 0; 0) | $\begin{cases} a + d = 0 \\ b + d = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} a = -d \\ b = -d \\ c = -d \end{cases}$ | $-dx - dy - dz + d = 0$ |
| C (0; 1; 0) | | | $x + y + z - 1 = 0$ |
| D ₁ (0; 0; 1) | | | $\overline{\overline{\overline{\overline{\downarrow}}}} m \{1; 1; 1\} \perp (ACD_1)$ |
| D (0; 0; 0) | $\begin{cases} d = 0 \\ a + b + d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} d = 0 \\ a = -b \\ c = -b \end{cases}$ | $-bx + by - bz = 0$ |
| B (1; 1; 0) | | | $x - y + z = 0$ |
| C ₁ (0; 1; 1) | | | $\overline{\overline{\downarrow}} n \{1; -1; 1\} \perp (DBC_1)$ |

$$\cos(\overline{\overline{\overline{\overline{\downarrow}}}} m; \overline{\overline{\downarrow}} n) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\angle(\overline{\overline{\overline{\overline{\downarrow}}}} m; \overline{\overline{\downarrow}} n) = \arccos \frac{1}{3}$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$

№ 2. В правильной треугольной призме все ребра равны 1.
Найдите угол между плоскостями (ABC_1) и (A_1B_1C) .



$$A\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right) \quad B\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$C_1\left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right)$$

$$A_1\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \quad B_1\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$$

$$C\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$$

Запишем уравнения
плоскостей (ABC_1) и
 (A_1B_1C) :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$A \left(\frac{1}{2}; 0; 0 \right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2d \\ b = -\frac{2}{\sqrt{3}}d \\ c = -2d \end{cases}$$

$$-2dx - \frac{2}{\sqrt{3}}dy - 2dz + d = 0$$

$$B \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \end{cases}$$

$$2x + \frac{2}{\sqrt{3}}y + 2z - 1 = 0$$

$$C_1 \left(-\frac{1}{2}; 0; 1 \right)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + c + d = 0 \end{cases}$$

$$\boxtimes m \left\{ 2; \frac{2}{\sqrt{3}}; 2 \right\} \perp (ABC_1)$$

$$A_1 \left(\frac{1}{2}; 0; 1 \right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2d \\ b = \frac{2}{\sqrt{3}}d \\ c = -2d \end{cases}$$

$$2dx + \frac{2}{\sqrt{3}}dy - 2dz + d = 0$$

$$B_1 \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right)$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}b + c + d = 0 \end{cases}$$

$$2x + \frac{2}{\sqrt{3}}y - 2z + 1 = 0$$

$$C \left(-\frac{1}{2}; 0; 0 \right)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + d = 0 \end{cases}$$

$$\boxtimes n \left\{ 2; \frac{2}{\sqrt{3}}; -2 \right\} \perp (A_1B_1C)$$

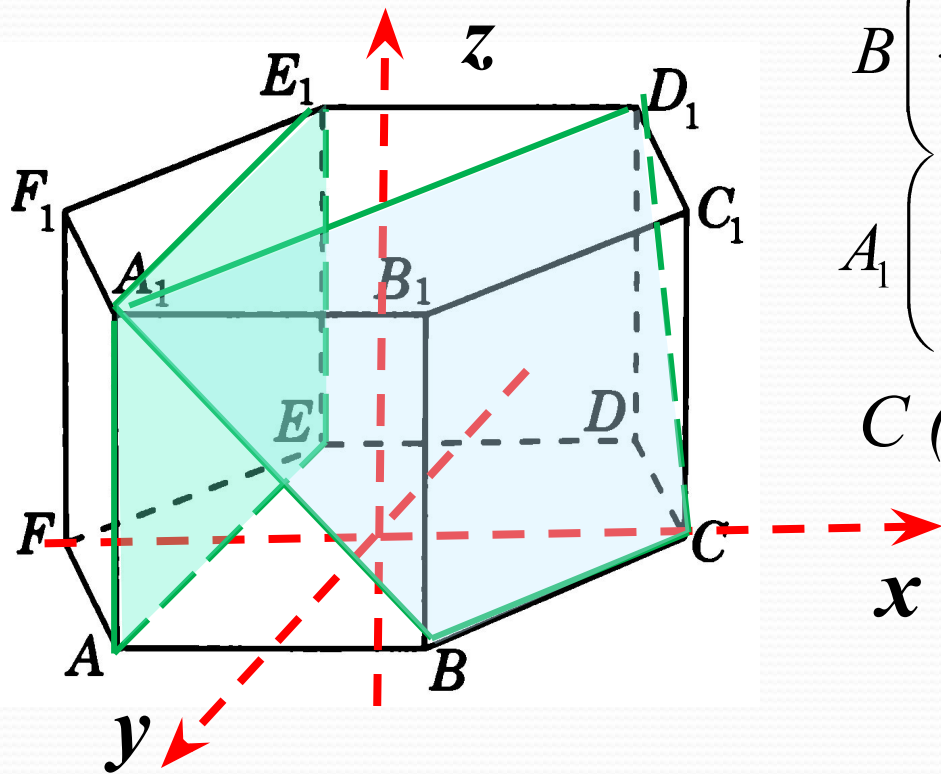
$$\begin{matrix} \square\square \\ m \end{matrix} \left\{ 2; \frac{2}{\sqrt{3}}; 2 \right\} \quad \begin{matrix} \square \\ n \end{matrix} \left\{ 2; \frac{2}{\sqrt{3}}; -2 \right\}$$

$$\cos \begin{pmatrix} \square\square\square \\ m;n \end{pmatrix} = \frac{\left| 2 \cdot 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - 2 \cdot 2 \right|}{\sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} + 2^2 \sqrt{2^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{7}$$

$$\angle \begin{pmatrix} \square\square\square \\ m;n \end{pmatrix} = \arccos \frac{1}{7}$$

Ответ: $\arccos \frac{1}{7}$

№ 3. В правильной шестиугольной призме ребро основания равно 1, а боковое ребро – 2. Найдите угол между плоскостями (BA_1D_1) и (AA_1E_1) .



$$B \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right) \quad A \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

$$A_1 \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2 \right) \quad E \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

$$C (1; 0; 0)$$

Запишем уравнения плоскостей (A_1BC) и (AA_1E) :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$B \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)$$

$$A_1 \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2 \right)$$

$$C (1; 0; 0)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + 2c + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -d \\ b = -\frac{1}{\sqrt{3}}d \\ c = -\frac{1}{2}d \end{cases}$$

$$-dx - \frac{1}{\sqrt{3}}dy - \frac{1}{2}dz + d = 0$$

$$x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{2}z - 1 = 0$$

$$\boxtimes m \left\{ 1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{2} \right\} \perp (A_1BC)$$

$$\begin{array}{l}
 A \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right) \\
 A_1 \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2 \right) \\
 E \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right)
 \end{array}
 \quad
 ax + by + cz + d = 0
 \quad
 \left\{ \begin{array}{l}
 -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \\
 -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + 2c + d = 0 \\
 -\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0
 \end{array} \right.
 \quad
 \left\{ \begin{array}{l}
 a = 2d \\
 b = 0 \\
 c = 0
 \end{array} \right.$$

$$2dx + 0 \cdot y + 0 \cdot z + d = 0$$

$$2x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 1 = 0$$

$$\stackrel{\perp}{n} \{2; 0; 0\} \perp (A_1 A E)$$

$$\overset{\boxtimes\boxtimes}{m} \left\{ 1; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{2} \right\} \quad \overset{\boxtimes}{n} \{ 2; 0; 0 \}$$

$$\cos(\overset{\boxtimes\boxtimes\boxtimes}{m;n}) = \frac{\left| 1 \cdot 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \sqrt{\frac{12}{19}}$$

$$\angle(\overset{\boxtimes\boxtimes}{m}; \overset{\boxtimes}{n}) = \arccos \sqrt{\frac{12}{19}}$$

Ответ: $\arccos \sqrt{\frac{12}{19}}$

Литература :

Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: виды задач и методы их решения. МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011 (типовые задания С2) 18.02.2011
<http://alexlarin.net/ege11.html>