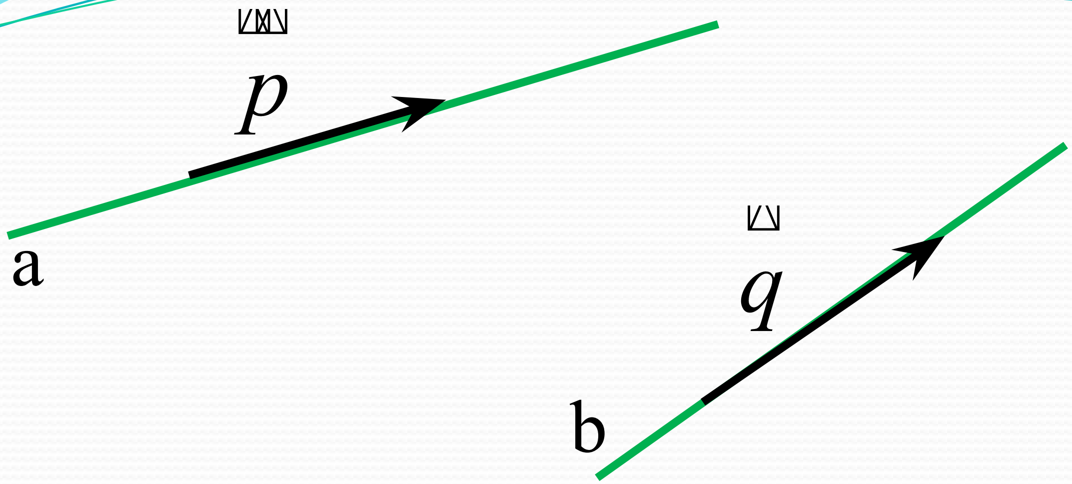
Задания С2 на ЕГЭ. Координатный метод. Углы в пространстве.

Лещенко С. И. учитель математики
МБОУ СОШ № 8 г. Туапсе
Краснодарского края

Угол между прямыми.



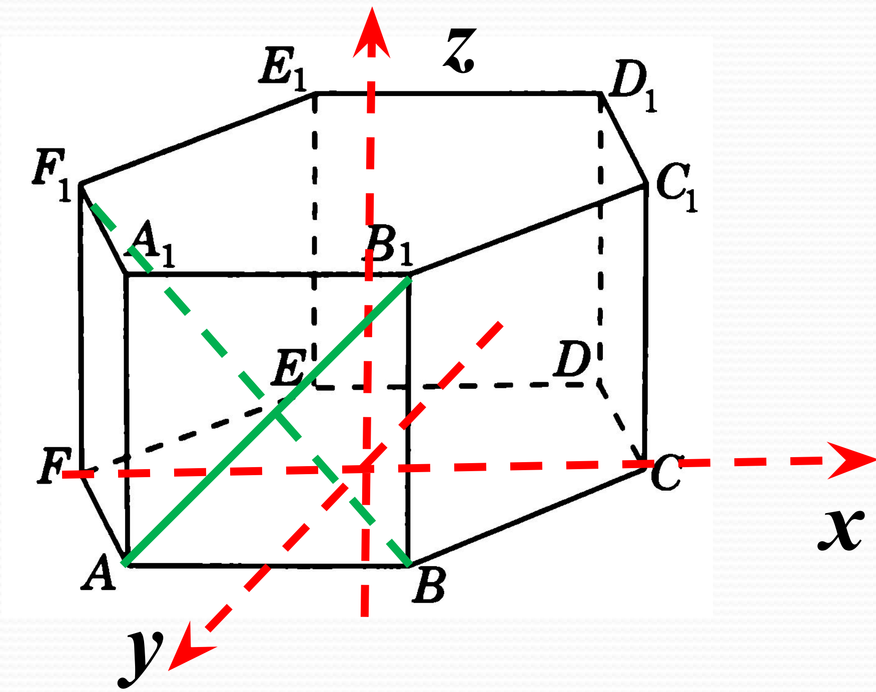
$$\vec{p}\left\{x_1; y_1; z_1\right\}$$

$$\vec{q}\left\{x_2; y_2; z_2\right\}$$

-направляющие вектора прямых

$$\cos\angle(a,b)=\frac{\left|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right|}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}$$

№ 1. В правильной шестиугольной призме все ребра равны 1. Найдите косинус угла между прямыми AB1 и BF1



$$A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$B_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$$

$$B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

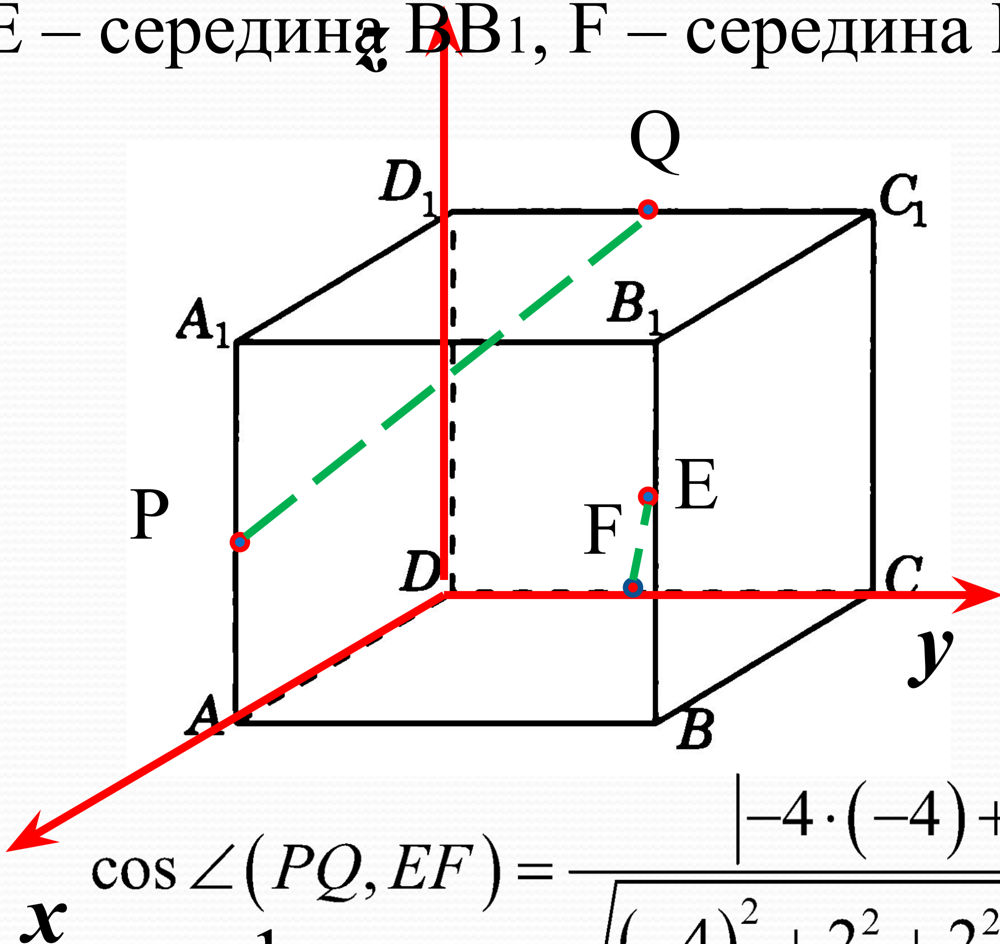
F1 (- 1; 0;1)

$\overrightarrow{AB_1}\left\{1;0;1\right\}$ $\overrightarrow{BF_1}\left\{-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};1\right\}$ -направляющие вектора прямых

$$\cos\angle\left(AB_1, BF_1\right)=\frac{\left|-\frac{3}{2}\cdot 1+0\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1\cdot 1\right|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{8}$

№ 2. Ребро куба равно 4. Найдите косинус угла между прямыми PQ и EF, P – середина AA_1, Q – середина C_1D_1, E – середина BB_1, F – середина DC.



P (4; 0; 2)

Q (0; 2; 4)

E (4; 4; 2)

F (0; 2; 0)

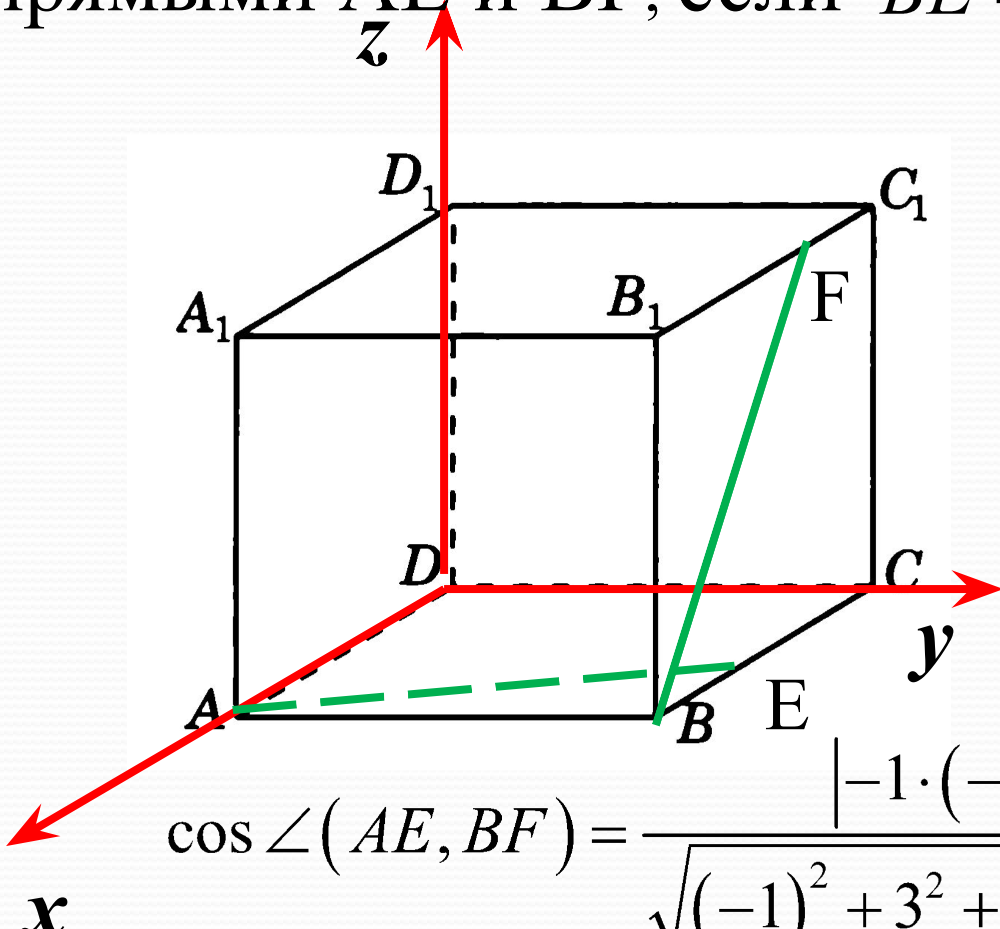
$\overrightarrow{PQ}\{-4; 2; 2\}$

$\overrightarrow{EF}\{-4; -2; -2\}$

$$\cos\angle(PQ, EF) = \frac{|-4\cdot(-4)+2\cdot(-2)+2\cdot(-2)|}{\sqrt{(-4)^2+2^2+2^2}\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-2)^2}} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$

№ 3. Ребро куба равно 3. Найдите угол между прямыми AE и BF, если $BE = \frac{1}{3}BC,\ C_1F = \frac{1}{3}C_1B_1.$



A (3; 0; 0)

E (2; 3; 0)

$\overrightarrow{AE}\left\{-1; 3; 0\right\}$

B (3; 3; 0)

F (1; 3; 3)

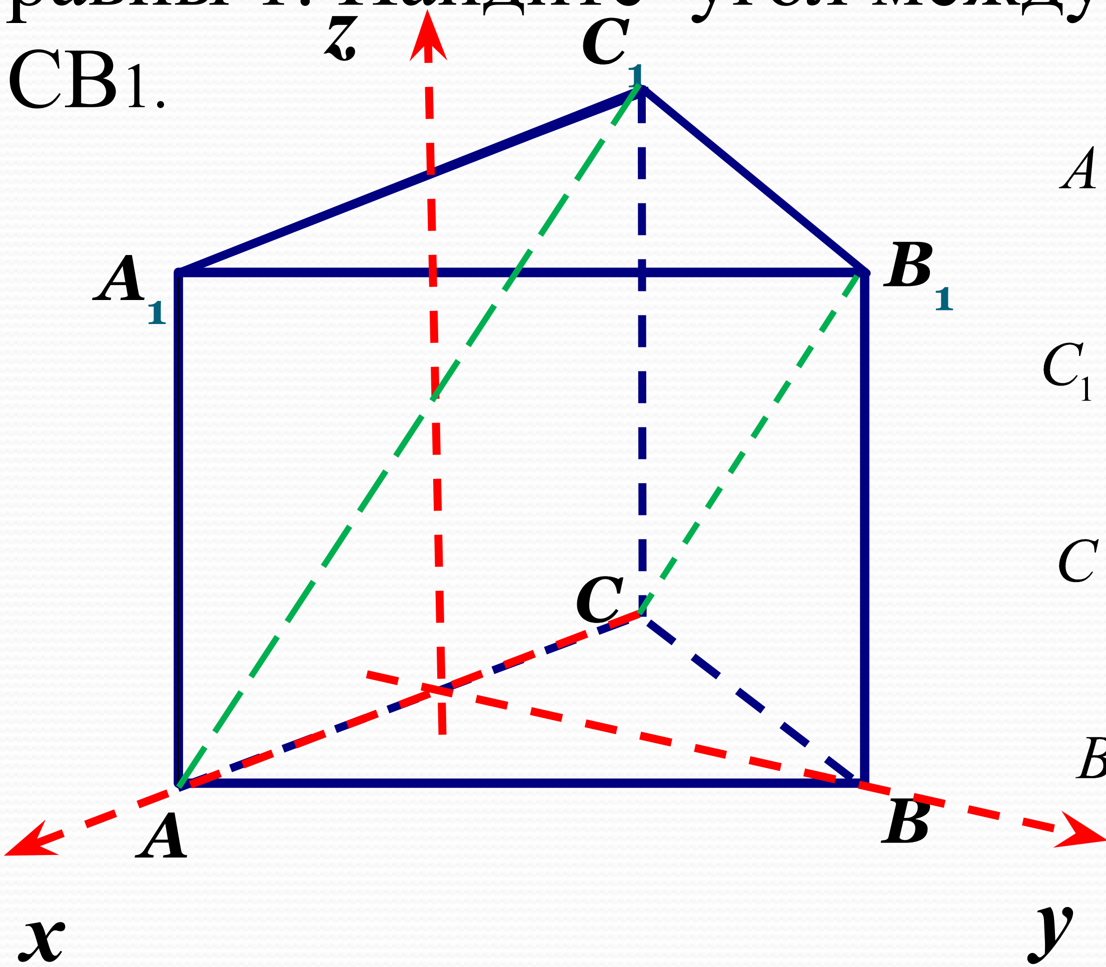
$\overrightarrow{BF}\left\{-2; 0; 3\right\}$

$$\cos\angle\left(AE, BF\right) = \frac{\left|-1\cdot\left(-2\right)+0\cdot3+0\cdot3\right|}{\sqrt{\left(-1\right)^2+3^2+0^2}\sqrt{\left(-2\right)^2+\left(0\right)^2+3^2}} = \frac{\sqrt{130}}{65}$$

$$\angle\left(AE, BF\right) = \arccos\frac{\sqrt{130}}{65}$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{130}}{65}$

№ 4. В правильной треугольной призме все ребра равны 1. Найдите угол между прямыми AC1 и CB1.



$$A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$$

$$C_1\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$$

$$C\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$$

$$B_1\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$$

$$\overrightarrow{AC_1}\left\{-1;0;1\right\}$$

$$\overrightarrow{CB_1}\left\{\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right\}$$

$$\overrightarrow{AC_1}\left\{-1;0;1\right\} \qquad \overrightarrow{CB_1}\left\{\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right\}$$

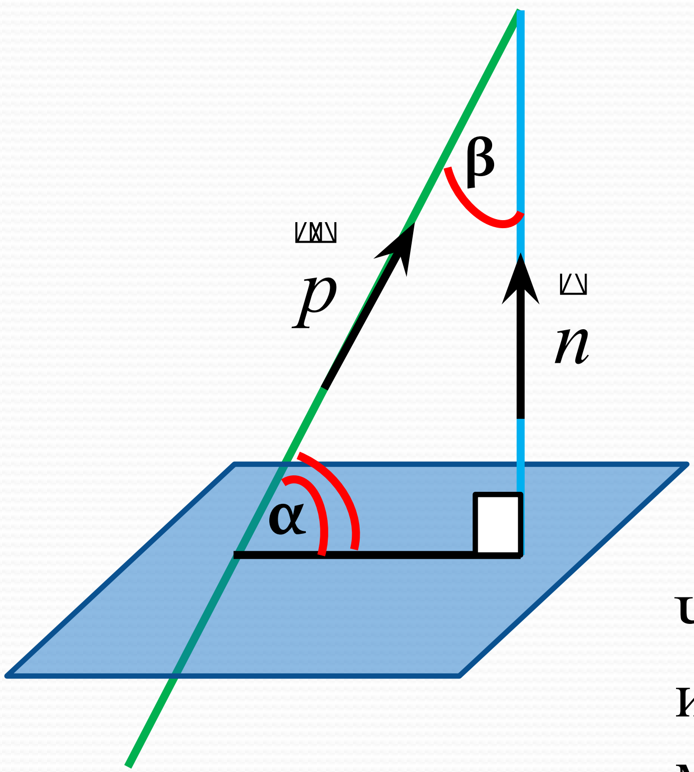
$$\cos\angle\left(AC_1,CB_1\right)=\frac{\left|\frac{1}{2}\cdot(-1)+0\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1\cdot1\right|}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1^2}}=\frac{1}{4}$$

$$\angle\left(AC_1,CB_1\right)=\arccos\frac{1}{4}$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$

Угол между прямой и плоскостью.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.



α - угол между прямой и плоскостью

$$\sin\alpha = \sin(90 - \beta) = \cos\beta$$

β – угол между прямой и перпендикуляром к плоскости

Чтобы найти синус угла между прямой и плоскостью можно найти косинус угла между прямой и перпендикуляром к плоскости

$$ax + by + cz + d = 0$$ уравнение плоскости

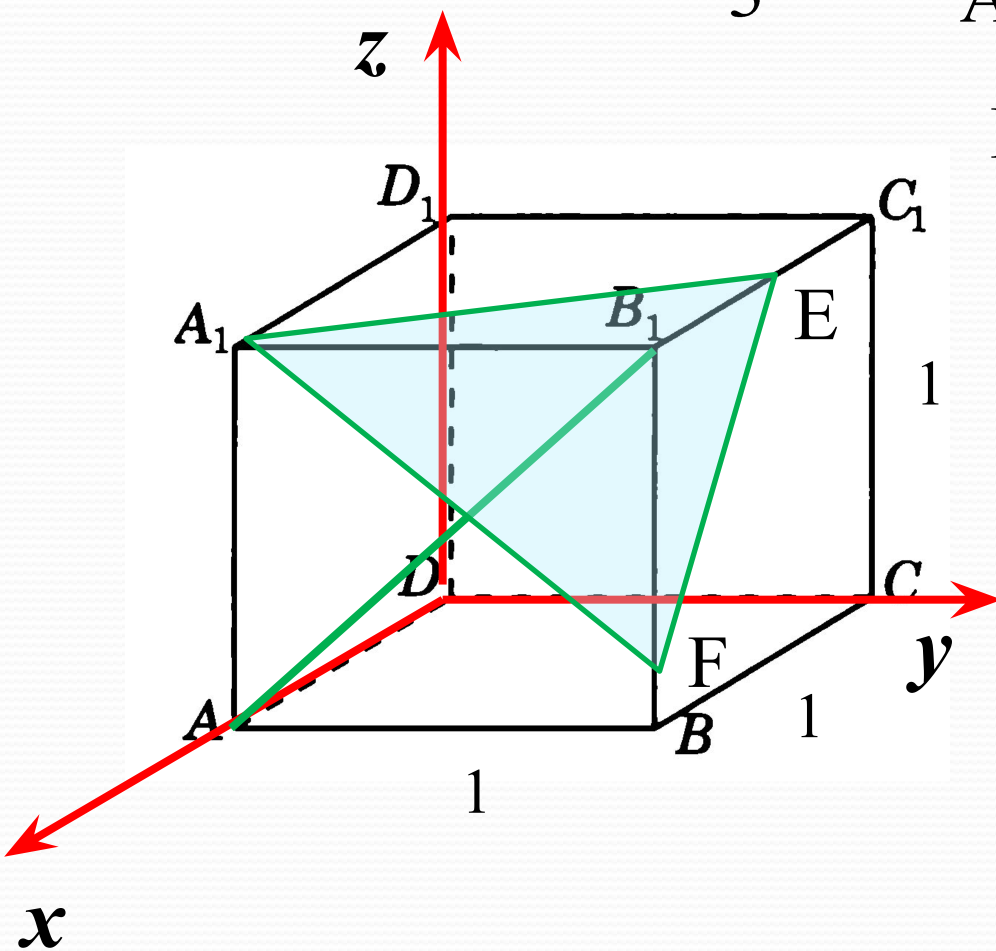
$$\vec{n}\{a; b; c\}$$ - вектор нормали к плоскости

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$$ - направляющий вектор прямой

$$\varphi = \angle\left(\vec{n}, \vec{p}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2}}$$

№ 1 В единичном кубе найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью (A_1EF), где E – середина B_1C_1, $BF = \frac{1}{3} BB_1$



$A_1\ (1;\ 0;\ 1)$ $A\ (1;\ 0;\ 0)$

$E\ (0{,}5;\ 1;\ 1)$ $B_1\ (1;\ 1;\ 1)$

$F\left(1;1;\frac{1}{3}\right)$

$\vec{p} = \overrightarrow{AB_1}$

$\vec{p}\,\{0;1;1\}$

Запишем уравнение плоскости (A_1EF):

A1 (1; 0; 1)   E (0,5; 1; 1)

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$F\left(1;1;\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{cases} a + c + d = 0 \\ \frac{1}{2}a + b + c + d = 0 \\ a + b + \frac{1}{3}c + d = 0 \end{cases}$$

$$\frac{4}{3}cx + \frac{2}{3}cy + cz - \frac{7}{3}c = 0$$

$$\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y + z - \frac{7}{3} = 0$$

$$\begin{cases} a = \frac{4}{3}c \\ b = \frac{2}{3}c \\ d = -\frac{7}{3}c \end{cases}$$

$$4x + 2y + 3z - 7 = 0$$

- уравнение плоскости (A1EF).

$$4x + 2y + 3z - 7 = 0$$

$\vec{n}\{4;2;3\}$ - вектор нормали к плоскости

$\vec{p}\{0;1;1\}$ - направляющий вектор прямой

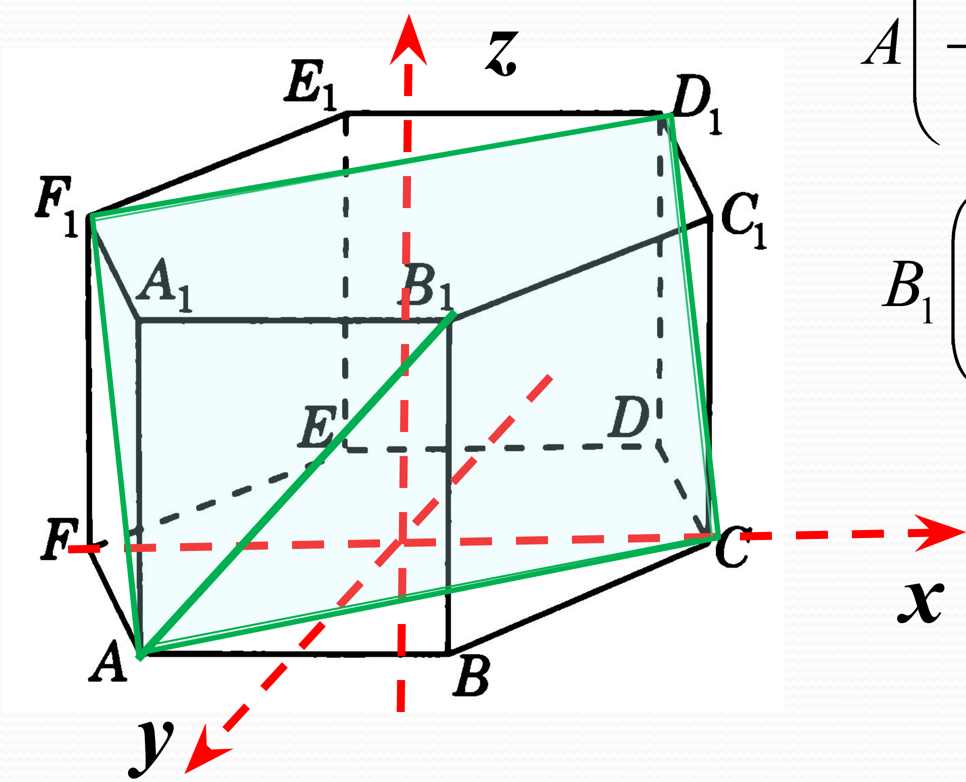
$$\varphi = \angle\left(\vec{n}, \vec{p}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{|4\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1|}{\sqrt{4^2+2^2+3^2}\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{58}}$$

$$\varphi = \arcsin\frac{5}{\sqrt{58}}$$

Ответ: $\arcsin\frac{5}{\sqrt{58}}$

№ 2. В правильной шестиугольной призме все ребра равны 1. Найдите синус угла между прямой AB_1 и плоскостью (ACF_1).



$$A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right) \qquad \vec{p}=\overrightarrow{AB_1}$$

$$B_1\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right) \qquad \vec{p}\left\{1;0;1\right\}$$

Запишем уравнение плоскости (ACF_1):

$$A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right) \quad C\,(1;\,0;0) \qquad ax+by+cz+d=0$$

F_1 (- 1; 0;1)

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0 \\ a+d=0 \\ -a+c+d=0 \end{cases}$$

$$-dx-\sqrt{3}dy-2dz+d=0$$

$$x+\sqrt{3}y+2z-1=0$$

$$\begin{cases} a=-d \\ b=-\sqrt{3}d \\ c=-2d \end{cases}$$

- уравнение плоскости (ACF_1).

$$x + \sqrt{3}y + 2z - 1 = 0$$

$\vec{n}\left\{1; \sqrt{3}; 2\right\}$ - вектор нормали к плоскости

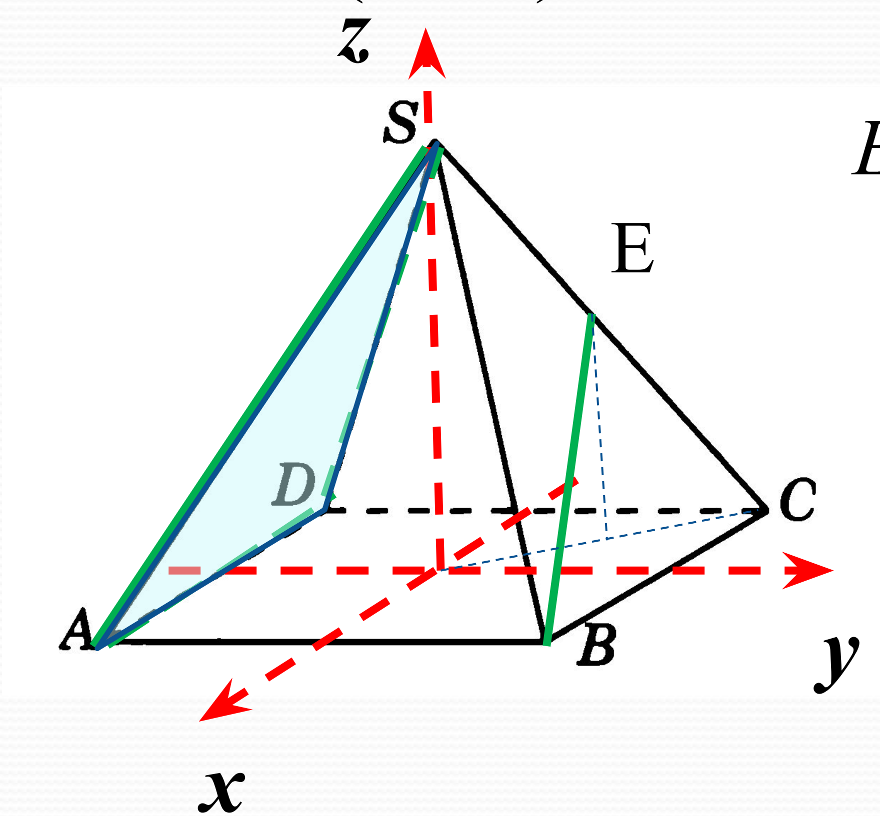
$\vec{p}\left\{1; 0; 1\right\}$ - направляющий вектор прямой

$$\varphi = \angle\left(\vec{n}, \vec{p}\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{\left|1 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 2 \cdot 1\right|}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{4}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$

№ 3. В правильной четырехугольной пирамиде ребро основания равно 4, а высота – 6. Найдите угол между прямой BE, где E- середина SC и плоскостью (ADS).



$B(2;2;0)$

$E(-1;1;3)$

$\vec{p} = \overrightarrow{BE}$

$\vec{p}\{-3;-1;3\}$

Запишем уравнение плоскости (ASD):

$A(2;-2;0)$ $D(-2;-2;0)$

$S(0;0;6)$

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\begin{cases} 2a-2b+d=0 \\ -2a-2b+d=0 \\ 6c+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=\frac{1}{2}d \\ c=-\frac{1}{6}d \end{cases}$$

$$0dx+\frac{1}{2}dy-\frac{1}{6}dz+d=0$$

$$0x+3y-z+6=0$$

- уравнение плоскости (ASD).

$$0x+3y-z+6=0$$

$\vec{n}\{0;3;-1\}$ - вектор нормали к плоскости

$\vec{p}\{-3;-1;3\}$ - направляющий вектор прямой

$$\varphi=\angle\left(\vec{n},\vec{p}\right)$$

$$\sin\varphi=\frac{\left|-3\cdot0+3\cdot(-1)+3\cdot(-1)\right|}{\sqrt{0^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{190}}$$

$$\varphi=\arcsin\frac{6}{\sqrt{190}}$$

Ответ: $\arcsin\frac{6}{\sqrt{190}}$

Угол между плоскостями.

Угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям.

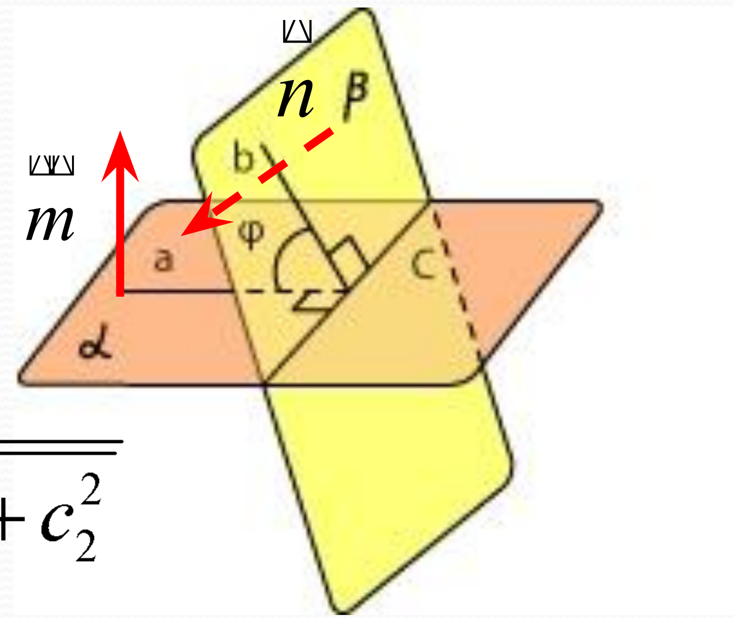
$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ – уравнение плоскости α

$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ – уравнение плоскости β

$$\vec{m}\{a_1; b_1; c_1\} \perp \alpha$$

$$\vec{n}\{a_2; b_2; c_2\} \perp \beta$$

$$\cos\left(\vec{m}; \vec{n}\right) = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



Например:

$$2x+3y+6z-5=0 \;\; \text{уравнение плоскости} \;\; \alpha$$

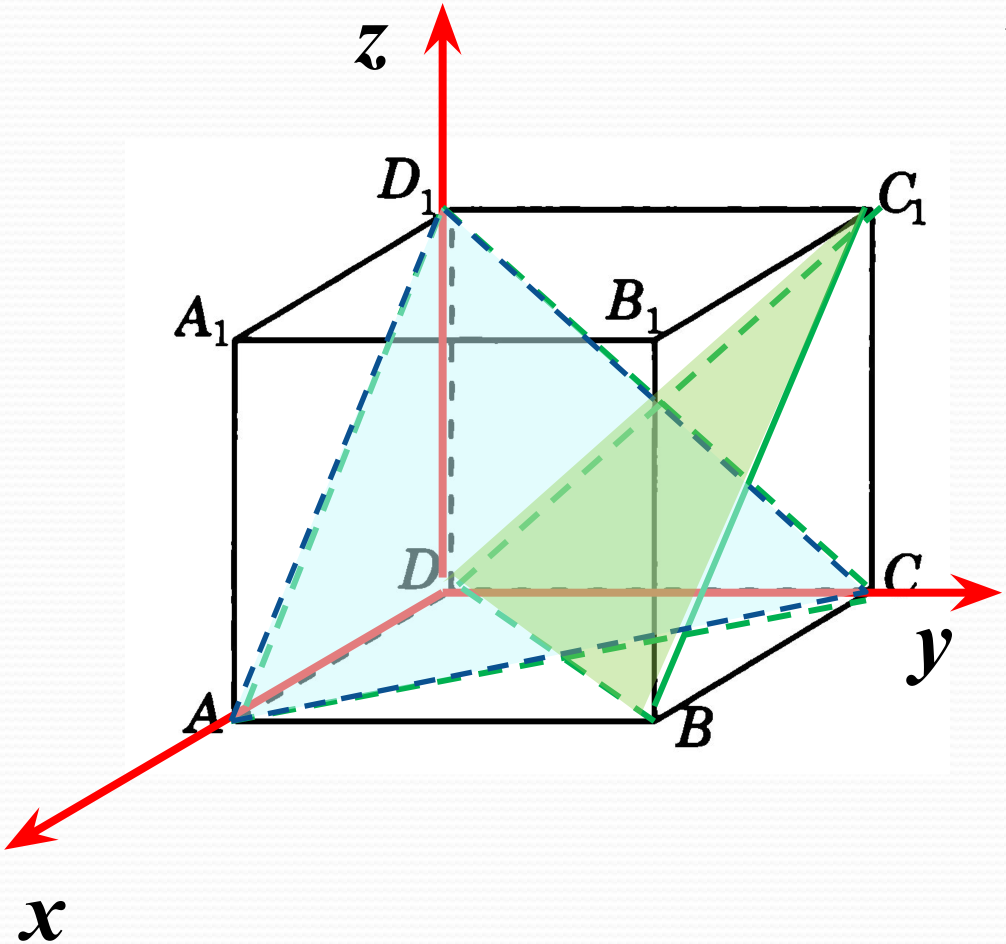
$$4x+4y+2z-7=0 \;\; \text{уравнение плоскости} \;\; \beta$$

$$\vec{m}\{2;3;6\}\perp\alpha$$

$$\vec{n}\{4;4;2\}\perp\beta$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{m};\vec{n}}\right)=\frac{\left|4\cdot 2+3\cdot 4+6\cdot 2\right|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\sqrt{4^2+4^2+2^2}}=\frac{16}{21}$$

№ 1. В единичном кубе найдите угол между плоскостями (ACD_1) и (BDC_1).



$A\ (1;\ 0;\ 0)$ $D_1\ (0;\ 0;\ 1)$

$C\ (0;\ 1;\ 0)$

$D\ (0;\ 0;\ 0)$ $C_1\ (0;\ 1;\ 1)$

$B\ (1;\ 1;\ 0)$

Запишем уравнения плоскостей (ACD_1) и (BDC_1):

$$ax+by+cz+d=0$$

A (1; 0; 0)

C (0; 1; 0)

D_1 (0; 0; 1)

$$\begin{cases} a+d=0 \\ b+d=0 \\ c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-d \\ b=-d \\ c=-d \end{cases}$$

$$-dx-dy-dz+d=0$$

$$x+y+z-1=0$$

$$\vec{m}\{1;1;1\} \perp (ACD_1)$$

D (0; 0; 0)

B (1; 1; 0)

C_1 (0; 1; 1)

$$\begin{cases} d=0 \\ a+b+d=0 \\ b+c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} d=0 \\ a=-b \\ c=-b \end{cases}$$

$$-bx+by-bz=0$$

$$x-y+z=0$$

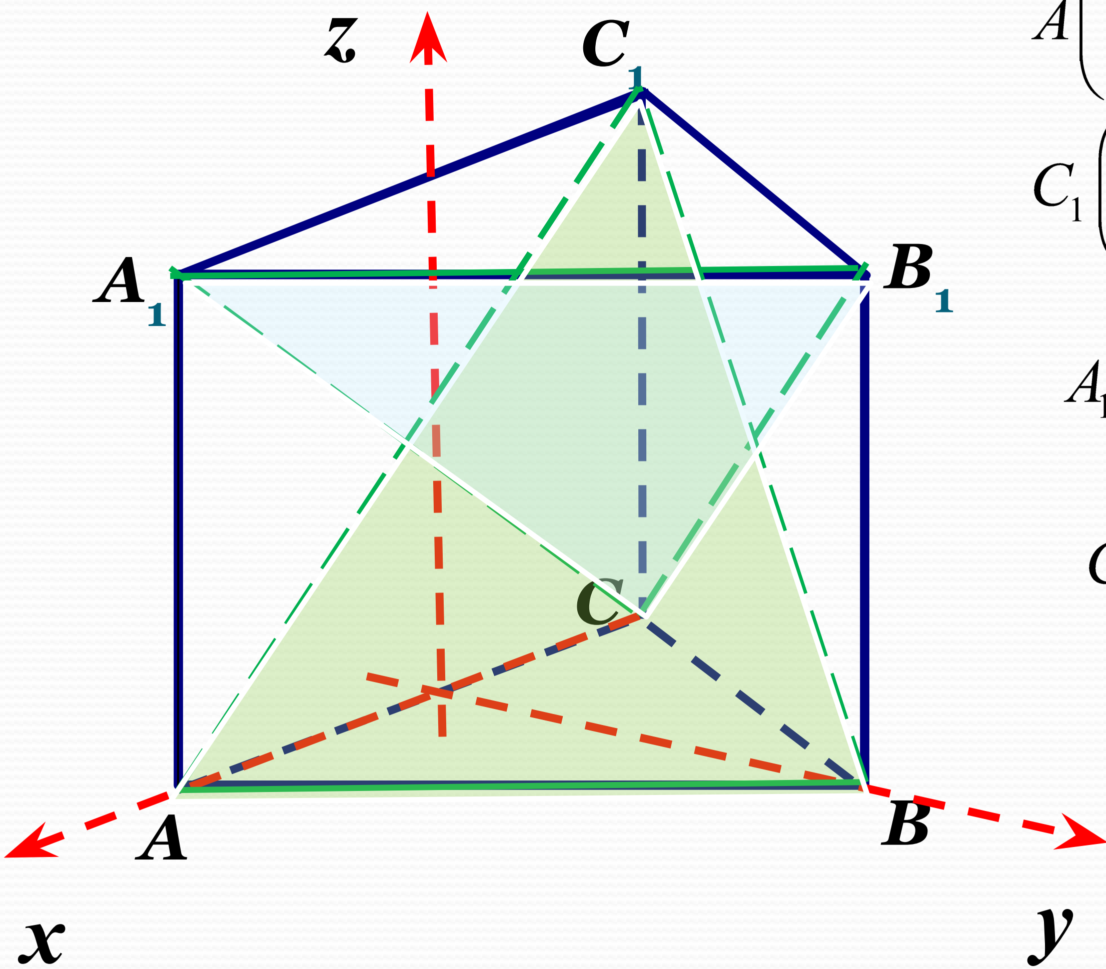
$$\vec{n}\{1;-1;1\} \perp (DBC_1)$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{m};\vec{n}}\right)=\frac{|1\cdot1-1\cdot1+1\cdot1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{3}$$

$$\angle\left(\vec{m};\vec{n}\right)=\arccos\frac{1}{3}$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$

№ 2. В правильной треугольной призме все ребра равны 1. Найдите угол между плоскостями (ABC_1) и (A_1B_1C).



$A\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ $B\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$C_1\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$

$A_1\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ $B_1\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$

$C\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$

Запишем уравнения плоскостей (ABC_1) и (A_1B_1C):

$$ax+by+cz+d=0$$

$$A\left(\frac{1}{2};0;0\right) \quad B\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right) \quad C_1\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a+d=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0 \\ -\frac{1}{2}a+c+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-2d \\ b=-\frac{2}{\sqrt{3}}d \\ c=-2d \end{cases}$$

$$-2dx-\frac{2}{\sqrt{3}}dy-2dz+d=0$$

$$2x+\frac{2}{\sqrt{3}}y+2z-1=0$$

$$\vec{m}\left\{2;\frac{2}{\sqrt{3}};2\right\}\perp\left(ABC_1\right)$$

$$A_1\left(\frac{1}{2};0;1\right) \quad B_1\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};1\right) \quad C\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a+c+d=0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b+c+d=0 \\ -\frac{1}{2}a+d=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2d \\ b=\frac{2}{\sqrt{3}}d \\ c=-2d \end{cases}$$

$$2dx+\frac{2}{\sqrt{3}}dy-2dz+d=0$$

$$2x+\frac{2}{\sqrt{3}}y-2z+1=0$$

$$\vec{n}\left\{2;\frac{2}{\sqrt{3}};-2\right\}\perp\left(A_1B_1C\right)$$

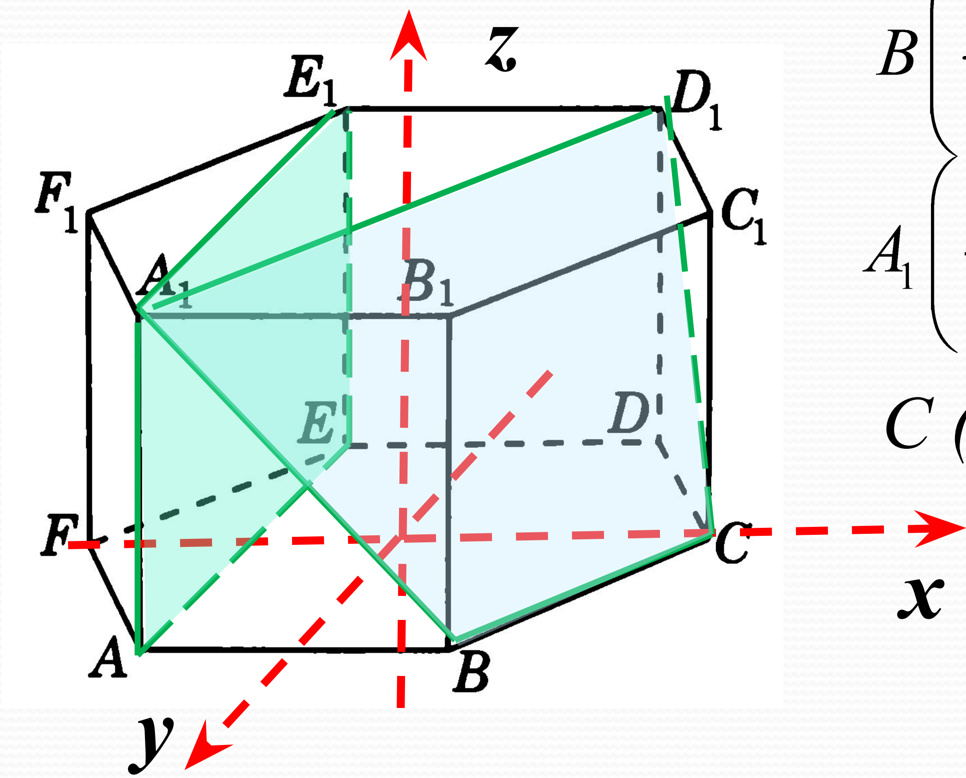
$$\vec{m}\left\{2;\frac{2}{\sqrt{3}};2\right\} \qquad \vec{n}\left\{2;\frac{2}{\sqrt{3}};-2\right\}$$

$$\cos\left(\vec{m};\vec{n}\right)=\frac{\left|2\cdot2+\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}-2\cdot2\right|}{\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+2^2}\sqrt{2^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+(-2)^2}}=\frac{1}{7}$$

$$\angle\left(\vec{m};\vec{n}\right)=\arccos\frac{1}{7}$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{7}$

№ 3. В правильной шестиугольной призме ребро основания равно 1, а боковое ребро – 2. Найдите угол между плоскостями (BA1D1) и (AA1E1).



$B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ $A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$A_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$ $E\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

$C\,(1;\,0;0)$

Запишем уравнения плоскостей (A1BC) и (AA1E):

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$A_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$$

$$C\ (1;\ 0;0)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + 2c + d = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -d \\ b = -\frac{1}{\sqrt{3}}d \\ c = -\frac{1}{2}d \end{cases}$$

$$-dx - \frac{1}{\sqrt{3}}dy - \frac{1}{2}dz + d = 0$$

$$x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{2}z - 1 = 0$$

$$\vec{m}\left\{1;\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{2}\right\} \perp \left(A_1BC\right)$$

$$A\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$ax+by+cz+d=0$$

$$A_1\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$$

$$E\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0 \\ -\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+2c+d=0 \\ -\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=2d \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$2dx+0\cdot y+0\cdot z+d=0$$

$$2x+0\cdot y+0\cdot z+1=0$$

$$\vec{n}\{2;0;0\}\perp\left(A_1AE\right)$$

$$\vec{m}\left\{1;\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{2}\right\} \qquad \vec{n}\{2;0;0\}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{m};\vec{n}}\right)=\frac{\left|1\cdot 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0\right|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{2^2+0^2+0^2}}=\sqrt{\frac{12}{19}}$$

$$\angle\left(\vec{m};\vec{n}\right)=\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$$

Ответ: $\arccos\sqrt{\frac{12}{19}}$

Литература :

Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Многогранники: виды задач и методы их решения. МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011 (типовые задания С2) **18.02.2011**
http://alexlarin.net/ege11.html