

**Квадратный трехчлен.
Квадратичная функция.
Квадратные уравнения.
Разложение квадратного
трехчлена на множители.**

(8 класс)



Разработано учителем
математики МОУ «СОШ» п.
Аджером Корткеросского
района Республики Коми
**Мишариной Альбиной
Геннадьевной**



Содержание

- Квадратный трехчлен
- Квадратичная функция
- Квадратные уравнения
- Разложение квадратного трёхчлена на множители



КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН



Определение

Многочлен ax^2+bx+c , где a, b, c – числа (коэффициенты), причем $a \neq 0$ называется **квадратным трехчленом**

Причем: a – старший коэффициент,
 b – второй коэффициент
 c – свободный член



Назовите коэффициенты:

1) $2x^2 - 6x + 1$

2) $-2x^2 + 8x - 5$

3) $3x^2 + 2x$

4) $x^2 - 4x + 7$

5) $-x^2 - 8$

6) $6x^2 - x - 2$

1) $a = 2; b = -6; c = 1$

2) $a = -2; b = 8; c = -5$

3) $a = 3; b = 2; c = 0$

4) $a = 1; b = -4; c = 7$

5) $a = -1; b = 0; c = -8$

6) $a = 6; b = -1; c = -2$



КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ



Запомним

- Функция $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c – произвольные числа, причем $a \neq 0$ называется **квадратичной**.
- Графиком квадратичной функции является **парабола**



Запомним

- Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены **вверх, если $a > 0$** , и **вниз если $a < 0$**
- Как найти координаты вершины параболы?
 - абсцисса x_0 вершины параболы вычисляется по формуле $x_0 = -b/2a$
 - ордината y_0 вершины параболы вычисляется подстановкой найденной x_0 в заданную функцию
- Осью симметрии параболы является прямая $x = -b/2a$



Найти координаты вершины параболы, её ось симметрии и построить её:

1) $y = 2x^2 - 8x + 1$

2) $y = -2x^2 + 16x - 5$

1) Т.к. $a = 2$; $b = -8$; $c = 1$

то $x_0 = 8 : (2 \cdot 2) = 2$

$$y_0 = 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 1 = -7$$

Значит: (2; -7) координаты
вершины, а ось
симметрии параболы:
 $x = 2$

2) Т.к. $a = -2$; $b = 16$; $c = -5$

то $x_0 = -16 : (2 \cdot (-2)) = 4$

$$y_0 = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 - 5 = 27$$

Значит: (4; 27) координаты
вершины; ось
симметрии: $x = 4$



Самостоятельно: вычислить координаты

вершины параболы

1) $y = x^2 + 4x + 5$

2) $y = 2x^2 + 4x$

3) $y = -3x^2 + 6x + 1$

4) $y = 3x^2 - 12x$

5) $y = x^2 + 6x - 2$

6) $y = -2x^2 + 8x - 5$

7) $y = -4x^2 - 8x$

Проверим:

1) $(-2; 1)$

2) $(-1; -2)$

3) $(1; 4)$

4) $(2; -12)$

5) $(-3; -11)$

6) $(2; 3)$

7) $(-1; 4)$



Рефлексия:

- 1) Сегодня на уроке я запомнил...
- 2) Сегодня на уроке я научился...
- 3) Сегодня на уроке я узнал ...
- 4) Сегодня на уроке я выучил...
- 5) Сегодня на уроке было интересно ...
- 6) Сегодня на уроке мне понравилось ...



Квадратные уравнения



Содержание:

- Определение квадратного уравнения
- Классификация квадратных уравнений
- Способы решения квадратного уравнения



Определение

Квадратным уравнением

называется уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где x - переменная,

a, b, c – любые действительные числа, причем $a \neq 0$. (Почему?)

Причем: a – старший коэффициент

b - второй коэффициент

c = свободный член



Классификация.

Квадратные уравнения.

неполное

$$b = 0; \quad x^2 + c = 0$$

$$c = 0; \quad ax^2 + bx = 0$$

$$b = 0; \quad c = 0; \quad ax^2 = 0$$

полное

$$ax^2 + b x + c = 0, \quad a \neq 0$$

приведённое

$$x^2 + p x + q = 0, \quad a=1$$



Запомним

Решить квадратное

уравнение – это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Причем: квадратное уравнение может иметь либо 2 корня (если $D > 0$),

либо 1 корень (если $D = 0$),

либо вообще не иметь корней (если $D < 0$)



Способы решения квадратного уравнения:

- Разложением на множители
- Выделением полного квадрата
- По формуле корней (универсальный способ)
- По теореме Виета
- По коэффициентам
- Графический
- Введение новой переменной



Разложение левой части на множители

$$8x^2 + 10x + 3 = 0,$$

$$8x^2 + 4x + 6x + 3 = 0,$$

$$4x(2x + 1) + 3(2x + 1) = 0,$$

$$(2x + 1)(4x + 3) = 0,$$

$$2x + 1 = 0; 4x + 3 = 0,$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{1}{2}; x_2 = -\frac{3}{4}.$$



Выделение полного квадрата

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

• Например: $x^2 - 10x + 16 = 0,$

$$x^2 - 2 * 5x + 25 - 25 + 16 = 0,$$

$$(x - 5)^2 - 9 = 0,$$

$$(x - 5)^2 = 9,$$

$$x - 5 = -3; x - 5 = 3,$$

$$x_1 = 2; x_2 = 8$$

$$\text{Ответ : } x_1 = 2; x_2 = 8.$$



Рассмотрим ещё одно решение:

Решим уравнение: $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Решение: $x^2 + 6x - 7 = 0$.

$$x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9 - 9 - 7 = 0$$

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 - 7 = 0$$

$$(x + 3)^2 - 16 = 0.$$

$$(x + 3)^2 = 16.$$

Значит: $x + 3 = 4$ и $x + 3 =$

-4.

$$x = 1$$

$$x = -7.$$

Ответ: 1; -7.



Алгоритм решения квадратного уравнения ПО ФОРМУЛЕ КОРНЕЙ:

- 1) Найти число, называемое **дискриминантом** квадратного уравнения

и равное $D = b^2 - 4ac$.

- 2) **Дискриминант** показывает сколько корней имеет уравнение

– если $D < 0$, то данное квадратное уравнение **не имеет корней**;



- если $D=0$, то данное квадратное уравнение имеет

единственный корень, который равен

$$x = -\frac{b}{2a}$$

- если $D>0$, то данное квадратное уравнение имеет два корня, которые равны

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$



Решить уравнение: $2x^2 - 5x + 2 = 0$

Здесь $a = 2, b = -5, c = 2$.

Имеем $D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$.

Так как $D > 0$, то уравнение имеет два корня.

Найдем их по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

$$x_1 = \frac{5 - 3}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{5 + 3}{2 \cdot 2} = 2,$$

то есть $x_1 = 2$ и $x_2 = 0,5$ - корни заданного уравнения.



Решить самостоятельно:

✓ $x^2 - 2x + 1 = 0.$

✓ $2x^2 - 3x + 5 = 0.$

Проверим

1 уравнение:

получили один корень
 $x = 1$, т.к. $D = 0$

Проверим

2 уравнение:

уравнение

не имеет
действительных
корней, т.к. $D < 0$



Работаем в парах:

1) Выберите квадратные уравнения и определите значения их коэффициентов:

А) $2x^2 - 8 = 0$;

Б) $-x^2 + 4x + 1 = 0$;

В) $3x^3 + 2x - 9 = 0$;

Г) $5x - 3x^2 + 2 = 0$;

Д) $x - 3 = 0$;

Е) $3 - 5x^2 - x = 0$;

Ж) $x^2 - x = 0$.

И) $x^2 + 5 - 2x = 0$

2) По коэффициентам указать приведенные уравнения.

3) Из квадратных уравнений выбрать неполные и решить их.



Проверим:

1) Квадратные уравнения:

А) $2x^2 - 8 = 0$, где $a=2$; $b=0$; $c=-8$

Б) $-x^2 + 4x + 1 = 0$, где $a=-1$; $b=4$; $c=1$

Г) $5x - 3x^2 + 2 = 0$, где $a=-3$; $b=5$; $c=2$

Е) $3 - 5x^2 - x = 0$, где $a=-5$; $b=-1$; $c=3$

Ж) $x^2 - x = 0$, где $a=1$; $b=-1$; $c=0$

И) $x^2 + 5 - 2x = 0$, где $a=1$; $b=-2$; $c=5$



Проверим:

2) Приведенные квадратные уравнения:

$$\text{И) } x^2 + 5 - 2x = 0$$

3) Неполные квадратные уравнения:

$$\text{А) } 2x^2 - 8 = 0 \quad \text{и} \quad \text{Ж) } x^2 - x = 0$$

Решения: $2x^2 - 8 = 0$ и $x^2 - x = 0$

$$2(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$2 \neq 0; x^2 - 4 = 0$$

$$x = 0; x - 1 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 0; x = 1$$

$$x = \pm 2$$



Пример решения квадратного уравнения

Дано уравнение:

$$3x^2 + 9 = 12x - x^2$$

Решение:

$$3x^2 + 9 - 12x + x^2 = 0$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{-12}{8} = \frac{3}{2}$$

Ответ:

$$x = \frac{3}{2}$$



Самостоятельная работа

(по вариантам)

$$(a + 3)(a - 2) = -6;$$

$$(y + 8)(y - 1) = 7y + 1.$$

$$(x - 8)(x + 5) = -40;$$

$$(x - 8)(x + 2) = -6x.$$



Проверь решение:

$$(y + 8)(y - 1) = 7y + 1;$$

$$y^2 + 8y - y - 8 = 7y + 1;$$

$$y^2 = 9;$$

$$y = -3 \text{ или } y = 3;$$

Ответ: -3; 3.

$$(x - 8)(x + 2) = -6x;$$

$$x^2 - 8x + 2x - 16 = -6x;$$

$$x^2 = 16;$$

$$x = -4 \text{ или } x = 4;$$

Ответ: -4; 4.



Проверь решение:

$$(a + 3)(a - 2) = -6;$$

$$a^2 + 3a - 2a - 6 = -6;$$

$$a^2 + a = 0;$$

$$a(a + 1) = 0;$$

$$a = 0 \text{ или } a = -1;$$

Ответ : -1; 0.

$$(x - 8)(x + 5) = -40;$$

$$x^2 - 8x + 5x - 40 = -40;$$

$$x^2 - 3x = 0;$$

$$x(x - 3) = 0;$$

$$x = 0 \text{ или } x = 3;$$

Ответ : 0; 3.



Запомни: по теореме Виета решаются только приведенные квадратные уравнения

Теорема Виета: Если корни x_1 и x_2 приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, а $x_1 \cdot x_2 = q$.

Обратное утверждение: Если числа m и n таковы, что $m + n = -p$, $m \cdot n = q$, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Обобщённая теорема: Числа x_1 и x_2 являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Следствие: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$



НАПРИМЕР

Дано приведённое квадратное уравнение

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Решение: методом подбора проверим числа 2 и 5. Их произведение равно **10** (т.е. свободному члену уравнения), а их сумма равна **7**, (т.е. второму коэффициенту уравнения, но с противоположным знаком)

Значит эти числа и являются корнями данного уравнения.

Ответ: **2 и 5**



Решить :

Решаем вместе:

1) $x^2 - 15x + 14 = 0$

2) $x^2 + 3x - 4 = 0$

3) $x^2 - 10x - 11 = 0$

4) $x^2 + 8x - 9 = 0$

Решить

самостоятельно

в парах:

1) $x^2 + 8x + 7 = 0$

2) $x^2 - 19x + 18 = 0$

3) $x^2 - 9x - 10 = 0$

4) $x^2 + 9x + 20 = 0$



Проверим ответы:

1) $x_1 = -1$ $x_2 = -7$

2) $x_1 = 1$ $x_2 = 18$

3) $x_1 = -1$ $x_2 = 10$

4) $x_1 = -4$ $x_2 = -5$



Решение квадратных уравнений по коэффициентам

1) Если сумма коэффициентов равна 0, т.е. $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$
 $x_2 = c/a$.

2) Если $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$ $x_2 = -c/a$.

3) Если $a = c$, $b = a^2 + 1$, то
 $x_1 = -a = -c$ $x_2 = -1/a = -1/c$.

4) Если $a = c$, $b = -(a^2 + 1)$, то
 $x_1 = a = c$ $x_2 = 1/a = 1/c$



Решить самостоятельно по группам:

1) $3x^2 + 4x + 1 = 0,$

2) $5x^2 - 4x - 9 = 0,$

3) $6x^2 + 37x + 6 = 0,$

4) $7x^2 + 2x - 5 = 0,$

5) $13x^2 - 18x + 5 = 0,$

6) $5x^2 + x - 6 = 0,$

7) $7x^2 - 50x + 7 = 0,$

8) $6x^2 - 37x + 6 = 0,$

9) $7x^2 + 50x + 7 = 0.$



Проверим:

$$\text{№1} \quad x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3};$$

$$\text{№2} \quad x_1 = -1, x_2 = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5};$$

$$\text{№3} \quad x_1 = -6, x_2 = -\frac{1}{6};$$



Проверим:

$$\text{№4 } x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{7};$$

$$\text{№5 } x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{13};$$

$$\text{№6 } x_1 = 1, x_2 = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5};$$



Проверим:

$$\text{№7 } x_1 = -7, x_2 = -\frac{1}{7};$$

$$\text{№8 } x_1 = -6, x_2 = -\frac{1}{6};$$

$$\text{№9 } x_1 = -7, x_2 = -\frac{1}{7}.$$



Решим графически уравнение:

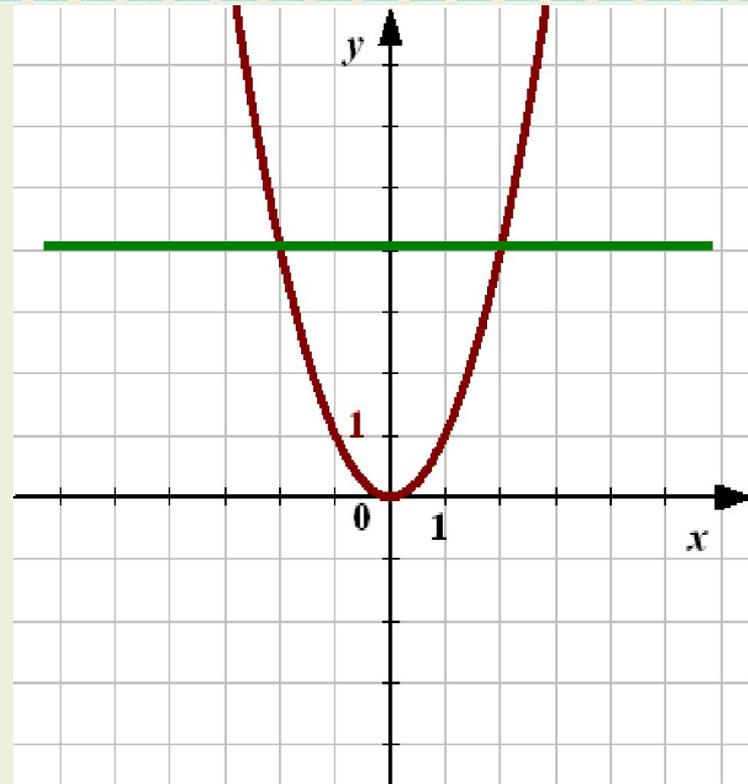
$$x^2 - 4 = 0$$

Решение: $x^2 - 4 = 0$
преобразуем

$$x^2 = 4$$

Пусть $y_1 = x^2$ и $y_2 = 4$

Построим эти графики
в одной
координатной
плоскости



Ответ: $x = -2; x = 2$



Решить графически уравнения по вариантам:

1 вариант

1) $x^2 + 2x - 3 = 0$

2) $-x^2 + 6x - 5 = 0$

3) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

2 вариант

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$

2) $-x^2 - 3x + 4 = 0$

3) $2x^2 - 5x + 2 = 0$



Введение новой переменной

Умение удачно ввести новую переменную – облегчает решение

Например: надо решить уравнение $(2x+3)^2 = 3(2x+3) - 2$.

Решение: пусть: $a = 2x + 3$.

Произведем замену переменной: $a^2 = 3a - 2$.

Тогда получим уравнение $a^2 - 3a + 2 = 0$ и у него $D > 0$.

Решим квадратное уравнение и получим: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Произведем обратную замену и вернемся к переменной

x:

1). если $a_1 = 1$, то $2x + 3 = 1$ и тогда $x_1 = -1$;

2). если $a_2 = 2$, то $2x + 3 = 2$ и тогда $x_2 = -0,5$

Ответ: $-1; -0,5$.



Решить самостоятельно в парах:

а) $(x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24 = 0;$

б) $(2x - 1)^4 - (2x - 1)^2 - 12 = 0$

Проверим ответы:

а)

б)



***Разложение
квадратного
трехчлена
на множители***



Запомнить:

Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет корни x_1 и x_2 , то квадратный трехчлен ax^2+bx+c , раскладывается на множители следующим образом:

$$ax^2+bx+c = a \cdot (x - x_1)(x - x_2).$$



Разложите квадратный трехчлен на множители:

1 вариант

1) $x^2 - 11x + 24$

2) $x^2 + 7x + 12$

3) $-x^2 - 8x + 9$

4) $3x^2 + 5x - 2$

5) $-5x^2 + 6x - 1$

2 вариант

1) $x^2 - 2x - 15$

2) $x^2 + 3x - 10$

3) $-x^2 + 5x - 6$

4) $5x^2 + 2x - 3$

5) $-2x^2 + 9x - 4$



Проверим

1 вариант

1) $(x-8)(x-3)$

2) $(x+3)(x+4)$

3) $-(x-1)(x+9)$

4) $3 \cdot (x-1/6)(x+13/6)$

5) $-5 \cdot (x-1)(x-0,2)$

2 вариант

1) $(x-5)(x+3)$

2) $(x-2)(x+5)$

3) $-(x-2)(x-3)$

4) $5 \cdot (x+1)(x-0,6)$

5) $-2 \cdot (x-1/2)(x-4)$



Рефлексия:

- Сегодня на уроке я запомнил...
- Сегодня на уроке я научился...
- Сегодня на уроке я узнал ...
- Сегодня на уроке я выучил...
- Сегодня на уроке было интересно ...
- Сегодня на уроке мне понравилось ...



СПАСИБО
ЗА УРОК !!!



Источники изображений



<http://www.avazun.ru/photoframes/&sort=&p=10>

<http://s59.radikal.ru/i163/0811/73/ad11fb505124.png>

