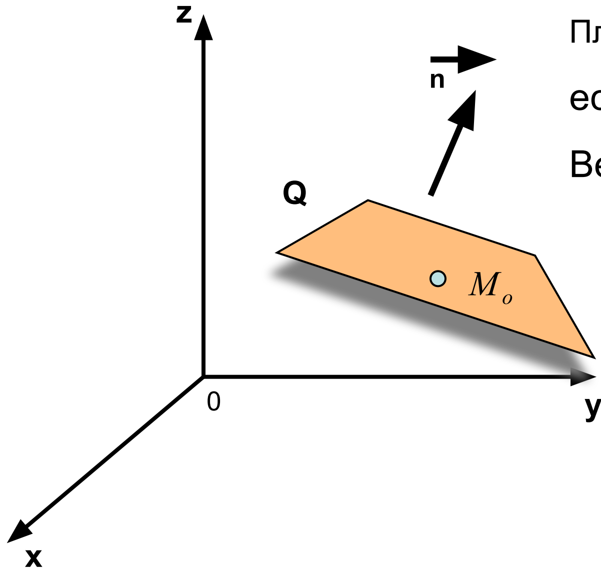
Аналитическая геометрия

Часть 2

Геометрия в пространстве

Аналитическая геометрия в пространстве.

- **Уравнения плоскости.**



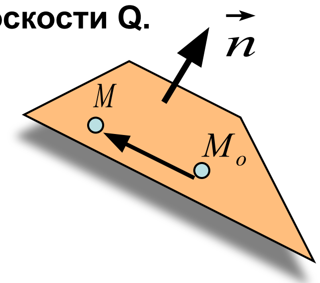
Плоскость Q определена единственным образом,

если задана одна точка $M_o \in Q$ и вектор $\vec{n} \perp$ Q.

Вектор $\vec{n} \perp$ Q называют **нормальным** вектором.

Необходимое и достаточное условие того, что точка М принадлежит плоскости Q.

$$\overrightarrow{M_oM} \perp \vec{n}$$



- **1. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.**
  - Заданы: точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$
  - и нормальный вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$
  - **Уравнение плоскости**:

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$

Пусть точка $M(x, y, z) \in Q$

Тогда

$$\overrightarrow{M_oM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_oM} \bullet \vec{n} = 0$$

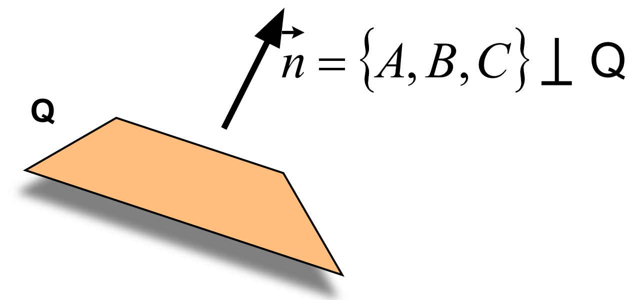
Аналитическая геометрия в пространстве.

- **2. Общее уравнение плоскости.**
  - Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

  - называется **общим уравнением плоскости.**
  - Коэффициенты **A,B,C** в уравнении определяют **координаты нормального вектора:**

$$\vec{n} = \{A, B, C\}$$



Теорема.
Всякое уравнение первой степени с тремя переменными **x,y,z** вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

задает **плоскость** в пространстве и наоборот, **всякая плоскость** в пространстве может быть задана уравнением с тремя переменными **x,y,z** вида (1).

Аналитическая геометрия в пространстве.

- **3. Исследование общего уравнения плоскости.**
  - **1.** Коэффициент **D=0** $\Rightarrow$ *точка* $O(0,0,0) \in Q$ **(рис. 1)**
  - **2.** Коэффициент **A=0** $\Rightarrow \vec{n} = (0, B, C) \perp OX \Rightarrow Q \parallel OX$ **(рис. 2)**
  - **3.** Коэффициент **B=0** $\Rightarrow \vec{n} = (A, 0, C) \perp OY \Rightarrow Q \parallel OY$ **(рис. 3)**
  - **4.** Коэффициент **C=0** $\Rightarrow \vec{n} = (A, B, 0) \perp OZ \Rightarrow Q \parallel OZ$ **(рис. 4)**

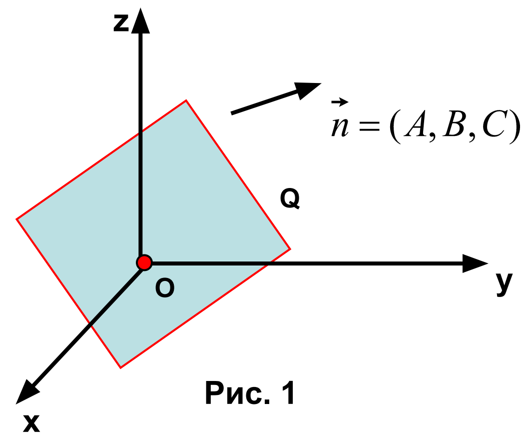


Рис. 1

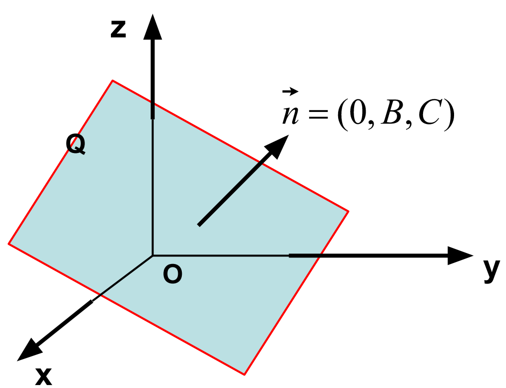


Рис. 2

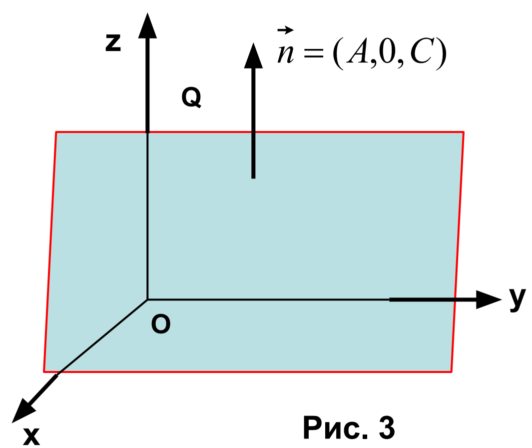


Рис. 3

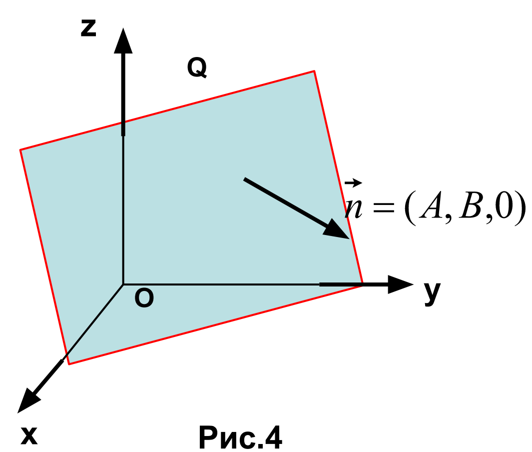


Рис.4

Аналитическая геометрия в пространстве.

– **5.** Коэффициенты **A=B=0** $\Rightarrow \vec{n} = (0,0,C) \parallel OZ \Rightarrow Q \perp OZ$ **(рис. 5)**

– **6.** Коэффициенты **A=C=0** $\Rightarrow \vec{n} = (0,B,0) \parallel OY \Rightarrow Q \perp OY$ **(рис. 6)**

– **7.** Коэффициенты **B=C=0** $\Rightarrow \vec{n} = (A,0,0) \parallel OX \Rightarrow Q \perp OX$ **(рис. 7)**

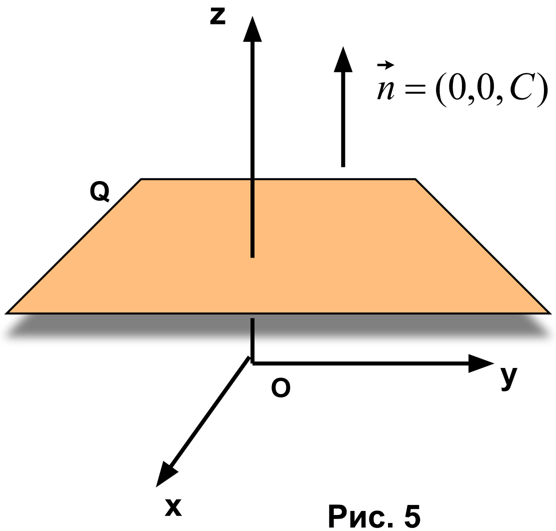


Рис. 5

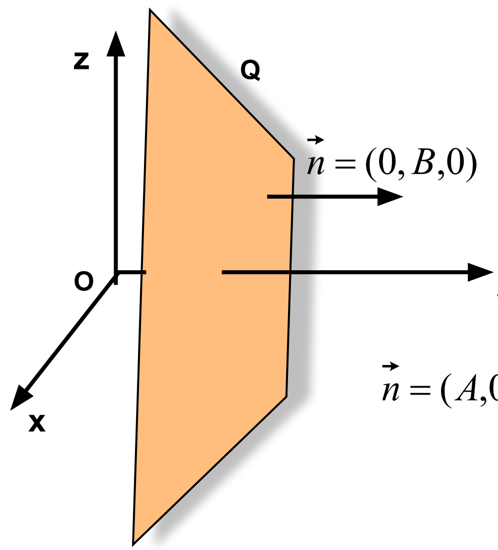


Рис. 6

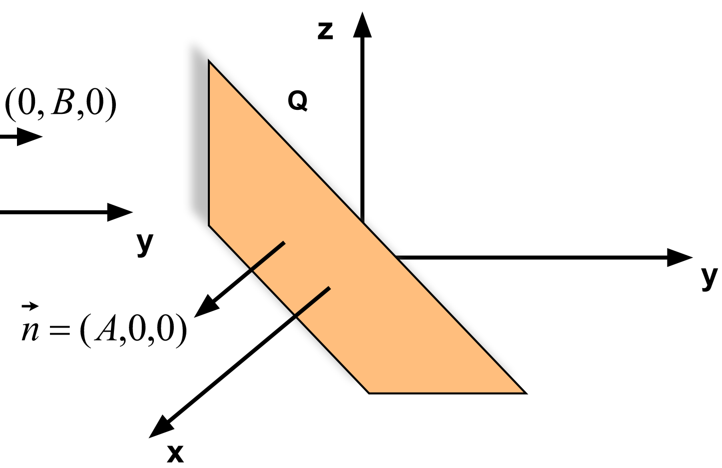
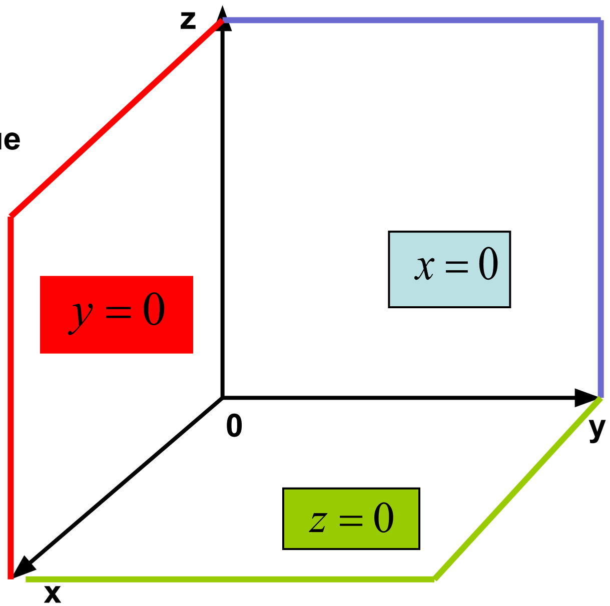


Рис. 7

Аналитическая геометрия в пространстве.

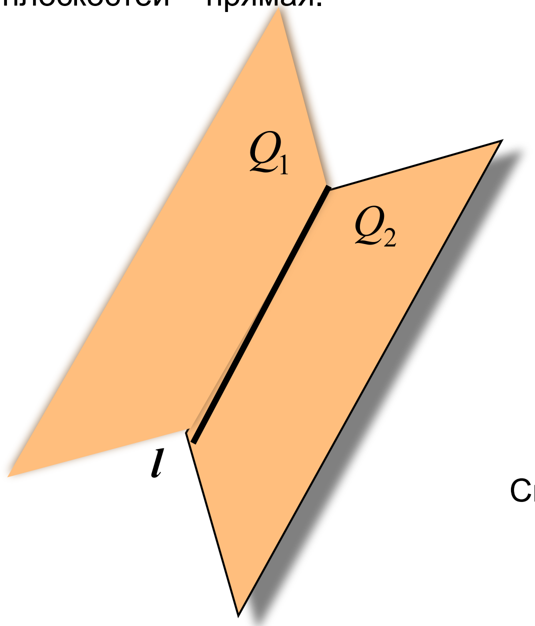
8. Коэффициенты **A=B=D=0** $\Rightarrow z=0$
– **9.** Коэффициенты **A=C=D=0** $\Rightarrow y=0$
– **10.** Коэффициенты **B=C=D=0** $\Rightarrow x=0$

Координатные плоскости



Аналитическая геометрия в пространстве.

- **Уравнения прямой в пространстве.**
- **1. Общее уравнение прямой.**
  - Аксиома: линия пересечения двух плоскостей – прямая.



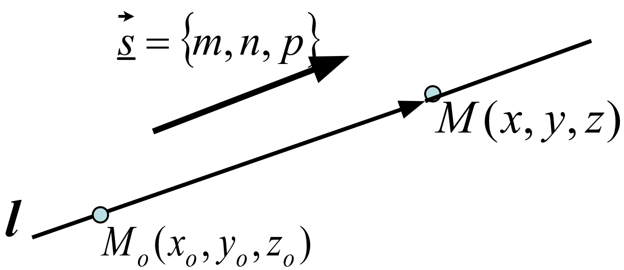
$$l:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (Q_1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (Q_2) \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

Теорема.
Система уравнений (2) определяет **прямую в пространстве** тогда и только тогда, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2

Система уравнений (2) называется **общим уравнением** прямой.

Аналитическая геометрия в пространстве.

- **2. Канонические уравнения прямой.**



$$\boxed{\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_o}{p}} \ (= \lambda) \Longleftarrow$$

Пусть точка $M(x, y, z) \in l.$

Тогда $\overrightarrow{M_oM} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_oM} = \lambda \vec{s}$

- **3. Параметрические уравнения прямой.**

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_o}{m} = \lambda \Rightarrow x = x_o + \lambda m \\ \dfrac{y - y_o}{n} = \lambda \Rightarrow y = y_o + \lambda n \\ \dfrac{z - z_o}{p} = \lambda \Rightarrow z = z_o + \lambda p \end{cases} \Longrightarrow \boxed{l: \begin{cases} x = x_o + \lambda m \\ y = y_o + \lambda n \\ z = z_o + \lambda p \end{cases}}$$

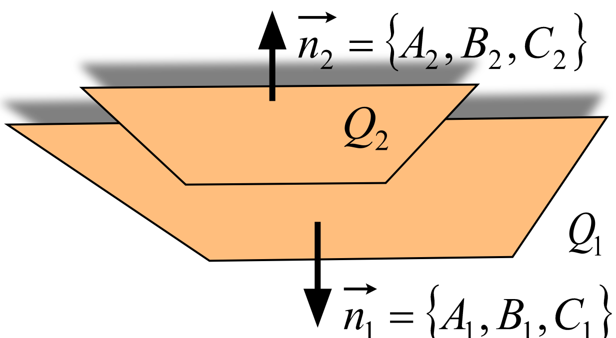
$-\infty < \lambda < \infty$ – *параметр*

Аналитическая геометрия в пространстве.

- **Взаимное расположение плоскостей и прямых в пространстве.**
- **1. Условие параллельности плоскостей.**

$$Q_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

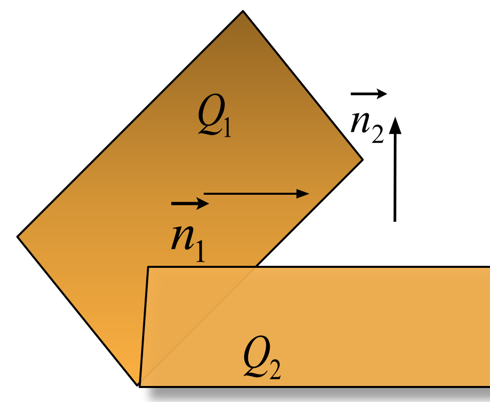
$$Q_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



$$Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

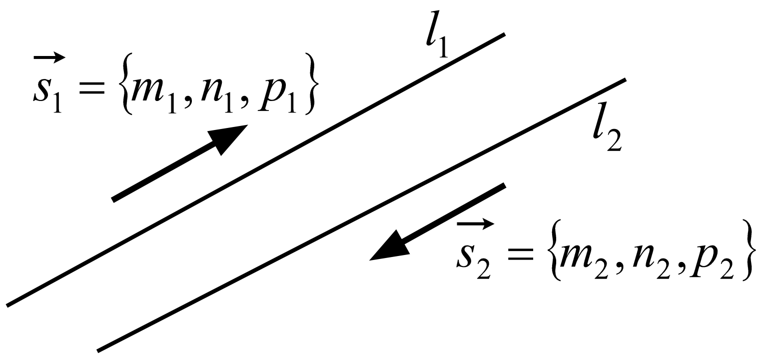
- **2. Условие перпендикулярности плоскостей.**

$$Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$



Аналитическая геометрия в пространстве.

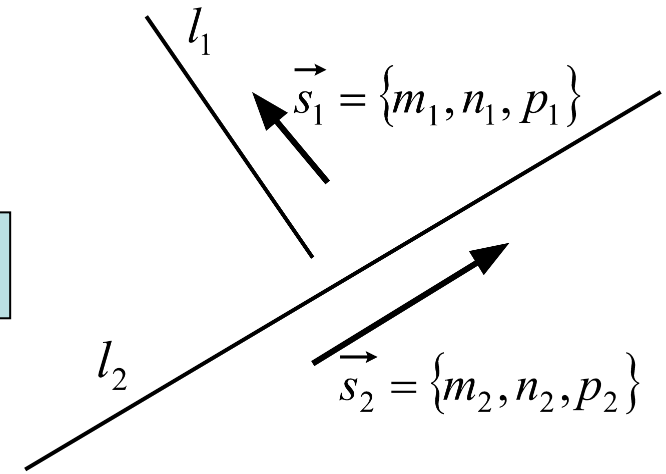
- **3. Условие параллельности прямых.**



$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

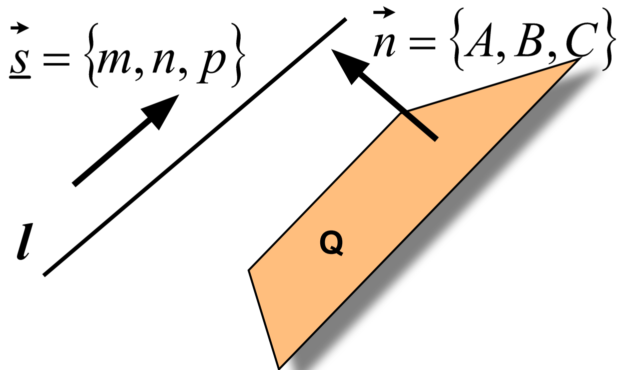
- **4. Условие перпендикулярности прямых.**

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow \boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0}$$



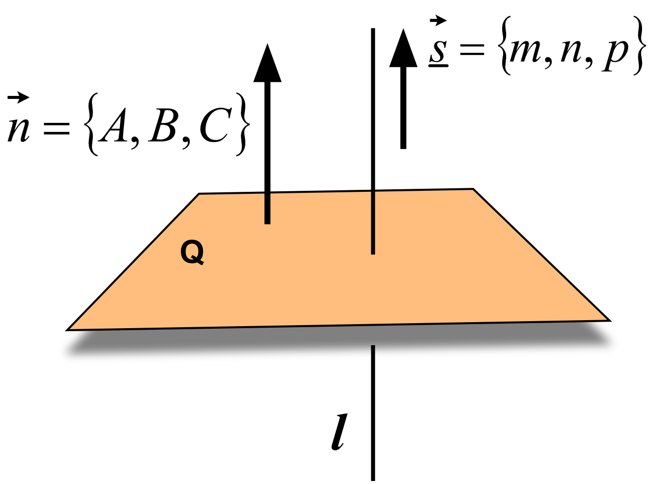
Аналитическая геометрия в пространстве.

- 5. Условие параллельности прямой и плоскости.



$$l \parallel Q \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{s}\,\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \boxed{Am + Bn + Cp = 0}$$

- 6. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.



$$l \perp Q \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}}$$