

Аналитическая геометрия

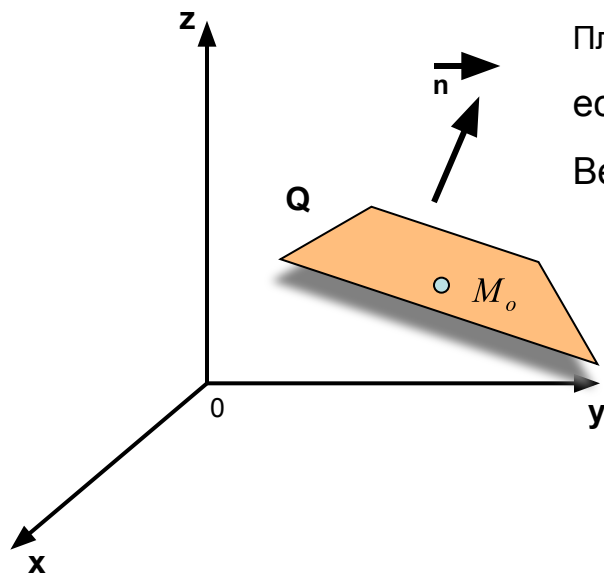


Часть 2

Геометрия в пространстве

Аналитическая геометрия в пространстве.

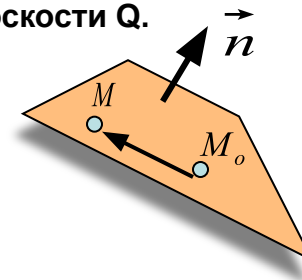
- Уравнения плоскости.



Плоскость Q определена единственным образом, если задана одна точка $M_0 \in Q$ и вектор $\vec{n} \perp Q$. Вектор $\vec{n} \perp Q$ называют **нормальным** вектором.

Необходимое и достаточное условие того, что точка M принадлежит плоскости Q .

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$$



- 1. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.

- Заданы: точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$
- и нормальный вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$
- Уравнение плоскости.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Пусть точка $M(x, y, z) \in Q$
 Тогда

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$



Аналитическая геометрия в пространстве.

- **2. Общее уравнение плоскости.**

- Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- называется **общим уравнением плоскости**.
- Коэффициенты **A, B, C** в уравнении определяют **координаты нормального вектора**:

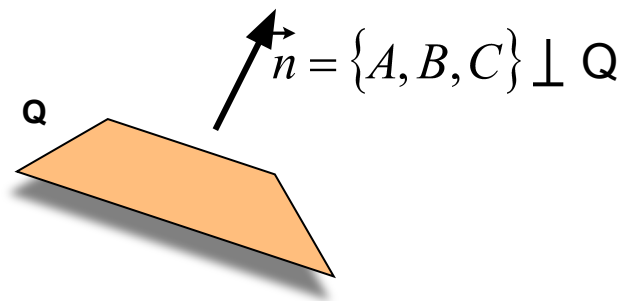
$$\vec{n} = \{A, B, C\}$$

Теорема.

Всякое уравнение первой степени с тремя переменными **x, y, z** вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

задает **плоскость** в пространстве и наоборот, **всякая плоскость** в пространстве может быть задана уравнением с тремя переменными **x, y, z** вида (1).



Аналитическая геометрия в пространстве.

3. Исследование общего уравнения плоскости.

- 1. Коэффициент $D=0$ \Rightarrow точка $O(0,0,0) \in Q$ (рис. 1)
- 2. Коэффициент $A=0$ $\Rightarrow \vec{n} = (0, B, C) \perp OX \Rightarrow Q \parallel OX$ (рис. 2)
- 3. Коэффициент $B=0$ $\Rightarrow \vec{n} = (A, 0, C) \perp OY \Rightarrow Q \parallel OY$ (рис. 3)
- 4. Коэффициент $C=0$ $\Rightarrow \vec{n} = (A, B, 0) \perp OZ \Rightarrow Q \parallel OZ$ (рис. 4)

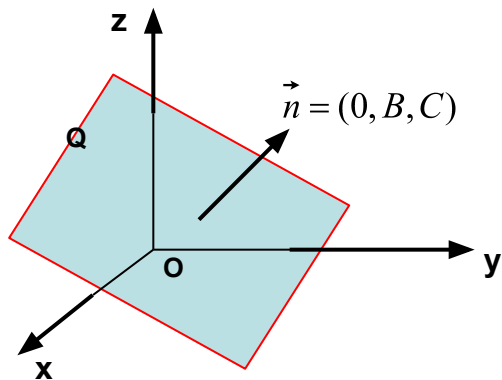


Рис. 2

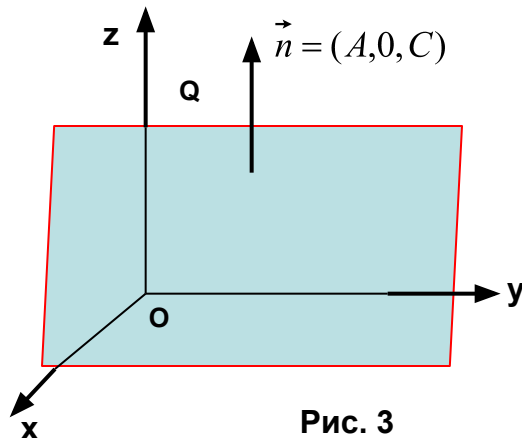


Рис. 3

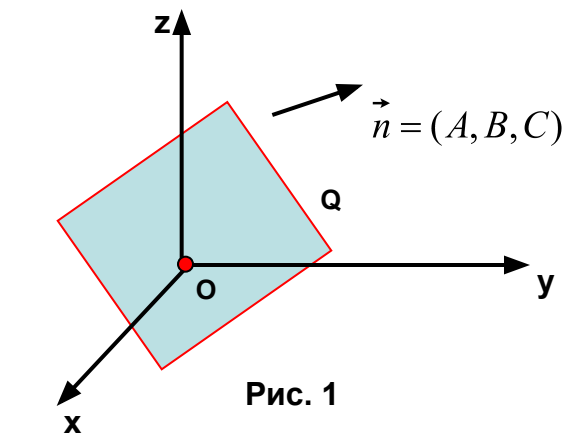


Рис. 1

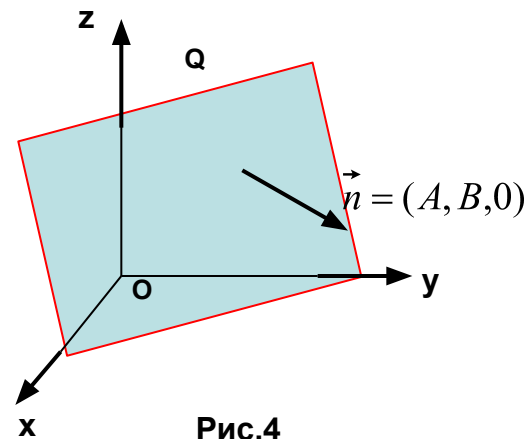
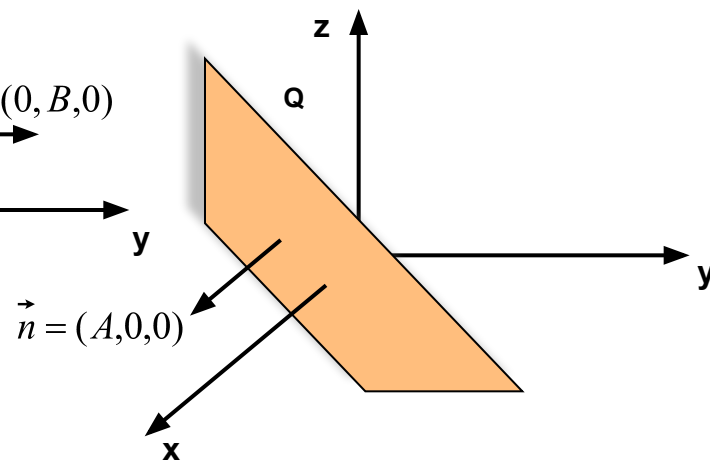
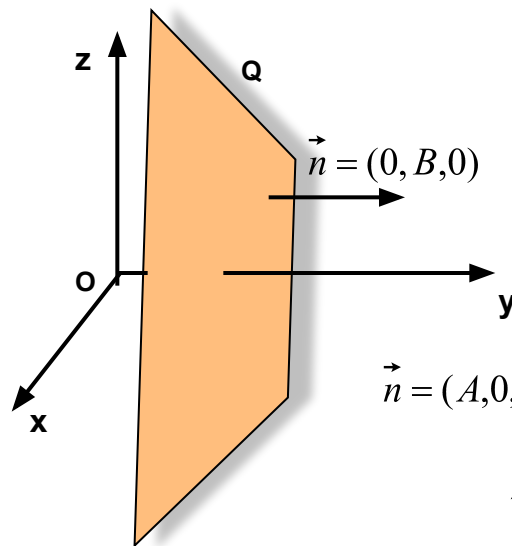
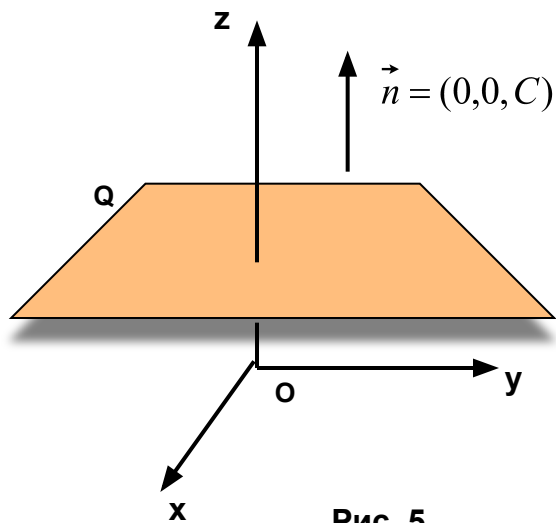


Рис. 4

Аналитическая геометрия в пространстве.

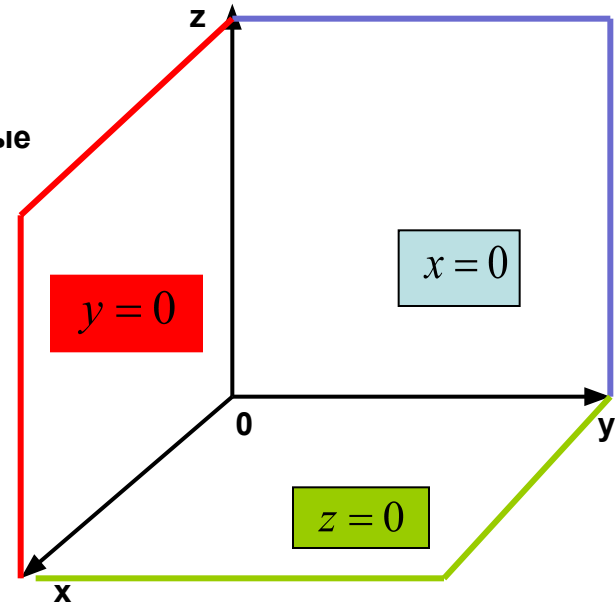
- 5. Коэффициенты $A=B=0 \Rightarrow \vec{n} = (0,0,C) \parallel OZ \Rightarrow Q \perp OZ$ (рис. 5)
- 6. Коэффициенты $A=C=0 \Rightarrow \vec{n} = (0,B,0) \parallel OY \Rightarrow Q \perp OY$ (рис. 6)
- 7. Коэффициенты $B=C=0 \Rightarrow \vec{n} = (A,0,0) \parallel OX \Rightarrow Q \perp OX$ (рис. 7)



Аналитическая геометрия в пространстве.

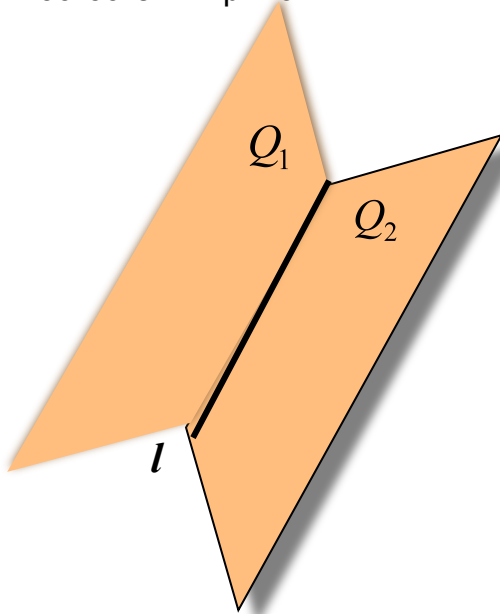
- 8. Коэффициенты $A=B=D=0 \Rightarrow z = 0$
- 9. Коэффициенты $A=C=D=0 \Rightarrow y = 0$
- 10. Коэффициенты $B=C=D=0 \Rightarrow x = 0$

Координатные
плоскости



Аналитическая геометрия в пространстве.

- Уравнения прямой в пространстве.
- 1. Общее уравнение прямой.
 - Аксиома: линия пересечения двух плоскостей – прямая.



$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (Q_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (Q_2) \end{cases} \quad (2)$$

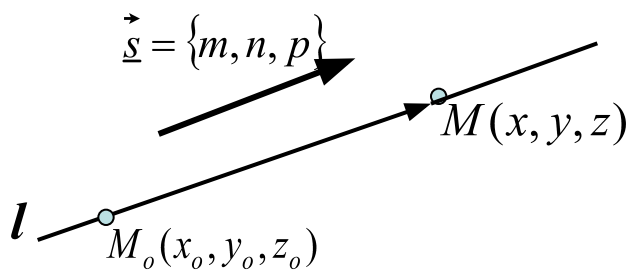
Теорема.

Система уравнений (2) определяет **прямую в пространстве** тогда и только тогда, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2

Система уравнений (2) называется **общим уравнением** прямой.

Аналитическая геометрия в пространстве.

- 2. Канонические уравнения прямой.



$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (= \lambda)$$

Пусть точка $M(x, y, z) \in l$.
Тогда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{s}$

- 3. Параметрические уравнения прямой.

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \lambda \Rightarrow x = x_0 + \lambda m \\ \frac{y - y_0}{n} = \lambda \Rightarrow y = y_0 + \lambda n \\ \frac{z - z_0}{p} = \lambda \Rightarrow z = z_0 + \lambda p \end{cases}$$

$$l: \begin{cases} x = x_0 + \lambda m \\ y = y_0 + \lambda n \\ z = z_0 + \lambda p \end{cases}$$

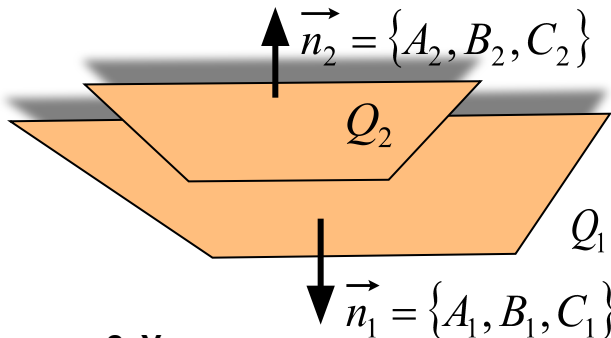
$-\infty \boxtimes \lambda \boxtimes \infty$ – параметр

Аналитическая геометрия в пространстве.

- **Взаимное расположение плоскостей и прямых в пространстве.**

- 1. **Условие параллельности плоскостей.** $Q_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

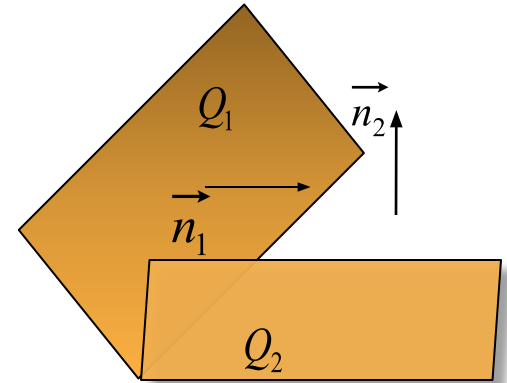
$$Q_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



$$Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

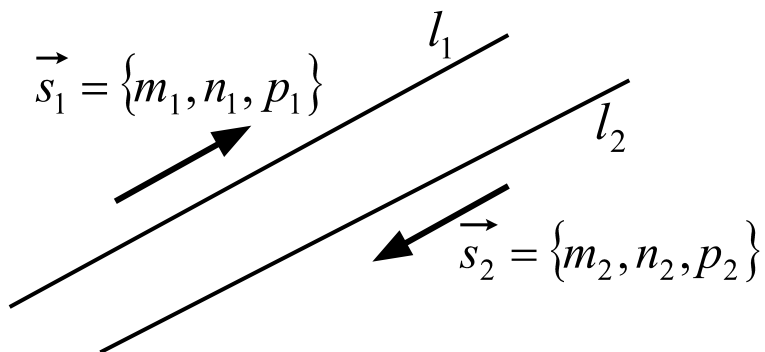
- 2. **Условие перпендикулярности плоскостей.**

$$Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$



Аналитическая геометрия в пространстве.

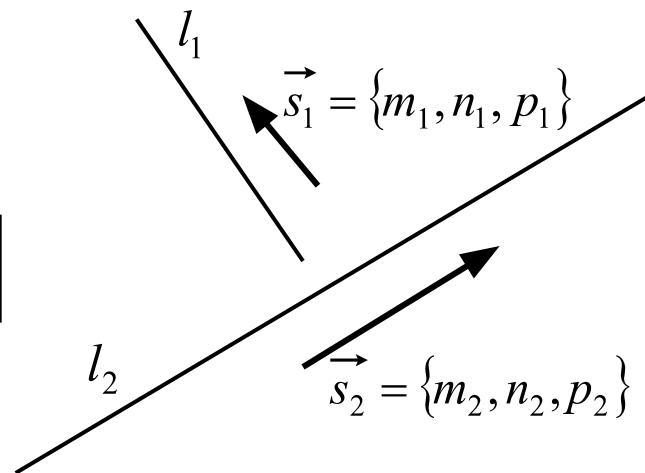
- 3. Условие параллельности прямых.



$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$

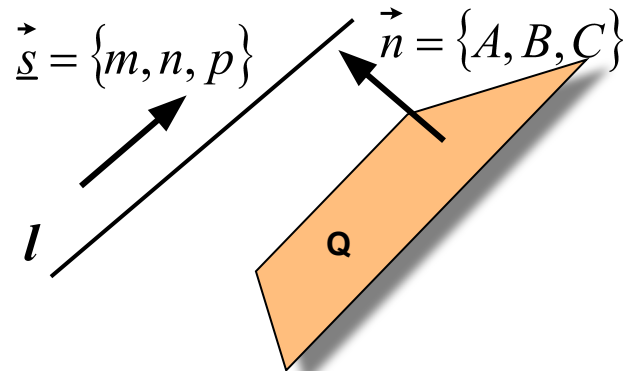
- 4. Условие перпендикулярности прямых.

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow \boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0}$$



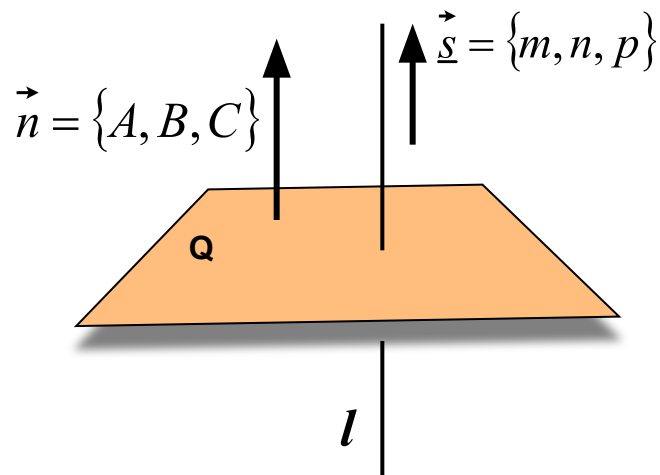
Аналитическая геометрия в пространстве.

- 5. Условие параллельности прямой и плоскости.



$$l \parallel Q \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{s} \vec{n} = 0 \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$$

- 6. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.



$$l \perp Q \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$