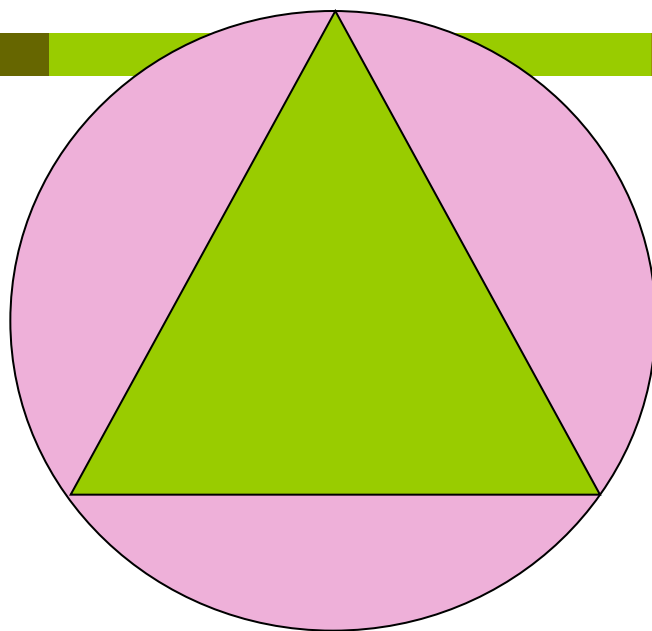


# Описанная окружность

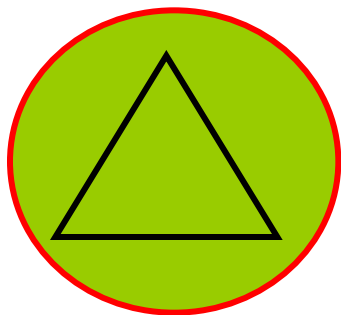


Определение: **окружность называется описанной около треугольника, если все вершины треугольника лежат на этой окружности.**

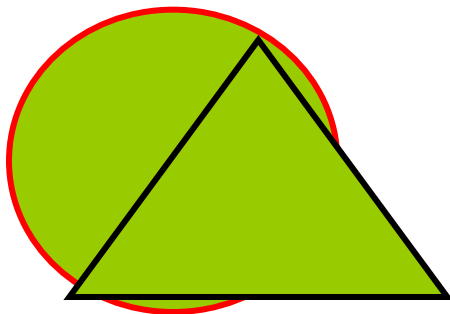
---

На каком рисунке окружность описана около треугольника:

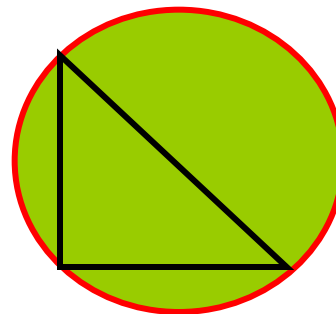
1)



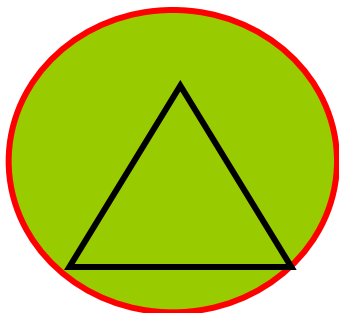
2)



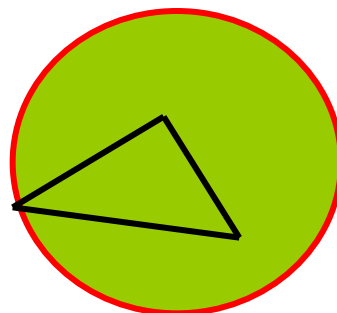
3)



4)



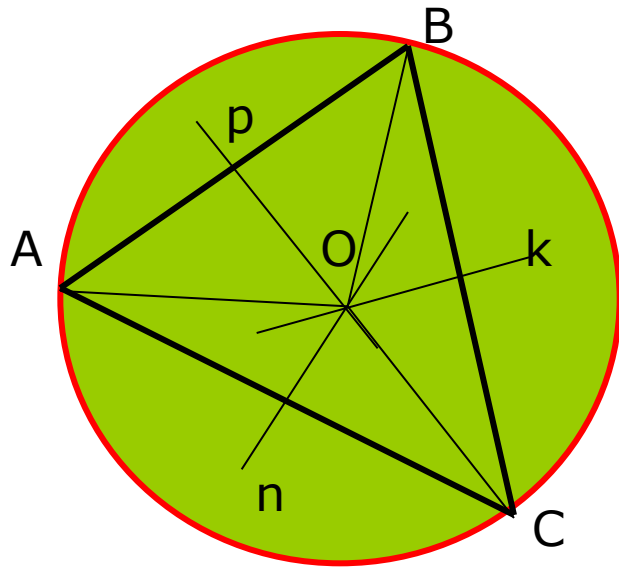
5)



**Если окружность описана около треугольника, то треугольник вписан в окружность.**

Теорема. **Около треугольника можно описать окружность, и притом только одну.**

**Её центр – точка пересечения  
серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.**



Дано:  $\triangle ABC$

Доказать: существует Окр.(O; r),  
описанная около  $\triangle ABC$ .

Доказательство:

Проведём серединные перпендикуляры  
p, k, n к сторонам AB, BC, AC

По свойству серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (замечательная точка треугольника):

они пересекаются в одной точке – O, для которой  $OA = OB = OC$ .

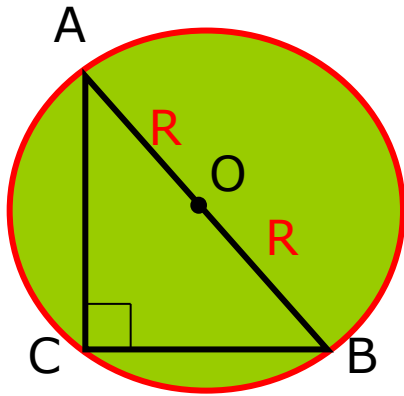
Т. е. все вершины треугольника равноудалены от точки O, значит, они лежат на окружности с центром O.

Значит, окружность описана около треугольника ABC.

## Важное свойство:

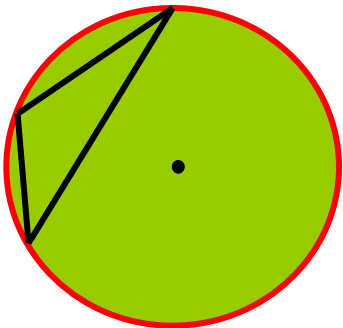
Если окружность описана около прямоугольного треугольника, то её центр – середина гипотенузы.

---



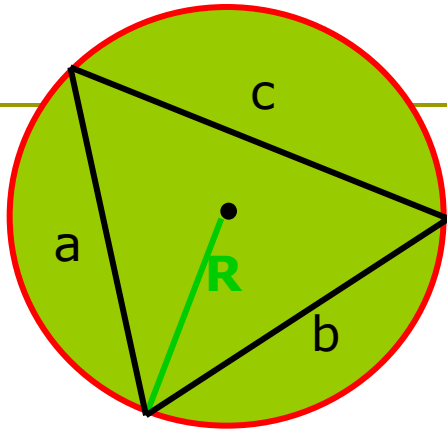
$$R = \frac{1}{2} AB$$

Задача: найти радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 см и 4 см.



Центр окружности, описанной около тупоугольного треугольника, лежит вне треугольника.

# Формулы для радиуса описанной около треугольника окружности



$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$$

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

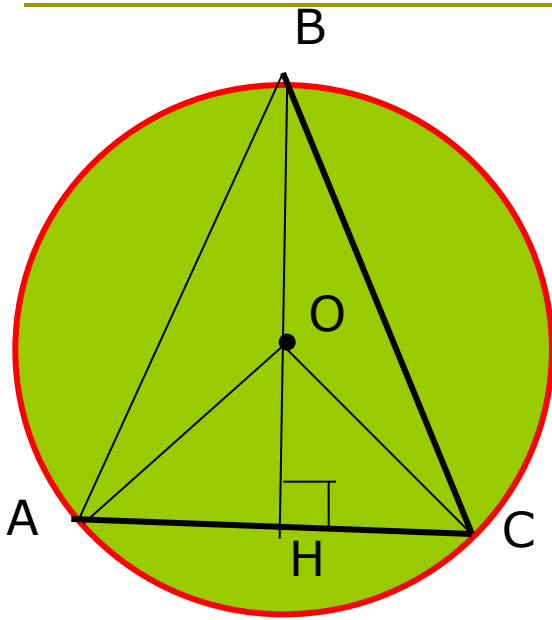
Задача: найти радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, сторона которого равна 4 см.

Решение:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}, \quad R = \frac{a^3}{4S} \qquad S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$$

$$R = \frac{4^3}{4 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ (см)} \qquad \text{Ответ: } \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см}$$

Задача: в окружность, радиус которой 10 см, вписан равнобедренный треугольник. Высота, проведённая к его основанию равна 16 см. Найти боковую сторону и площадь треугольника.



Дано:  $\triangle ABC$  - р/б,  $BH \perp AC$ ,  $BH = 16$  см  
Окр.(O; 10 см) описана около ABC

Найти:  $AB$ ,  $S_{ABC}$

Решение:

Т. к. окружность описана около равнобедренного треугольника ABC, то центр окружности лежит на высоте BH.

$$AO = BO = CO = 10 \text{ см}, OH = BH - BO = 16 - 10 = 6 \text{ (см)}$$

$\triangle AOH$  – прямоугольный,  $AO^2 = AH^2 + OH^2$ ,  $AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64$ ,  $AH = 8$  см

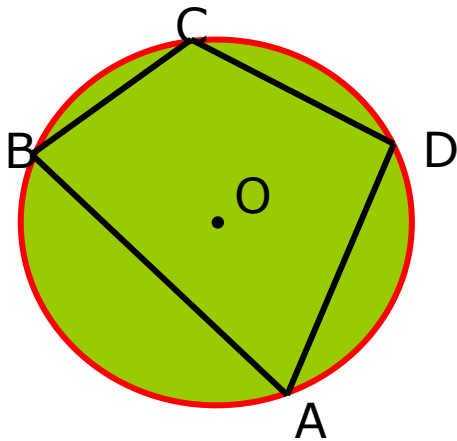
$\triangle ABH$  – прямоугольный,  $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 8^2 + 16^2 = 64 + 256 = 320$ ,  
 $AB = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}$  (см)

$AC = 2AH = 2 \cdot 8 = 16$  (см),  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 = 128$  (см<sup>2</sup>)

Ответ:  $AB = 8\sqrt{5}$  см,  $S = 128$  см<sup>2</sup>

Определение: **окружность называется описанной около четырёхугольника, если все вершины четырёхугольника лежат на окружности.**

Теорема. **Если около четырёхугольника описана окружность, то сумма его противоположных углов равна  $180^\circ$ .**



Дано: Окр.(O;R) описана около ABCD

Доказать:  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$

Доказательство:

Т. к. окружность описана около ABCD, то  $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$  – вписанные, значит,

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \text{ BCD} + \frac{1}{2} \text{ BAD} = \frac{1}{2} (\text{BCD} + \text{BAD}) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

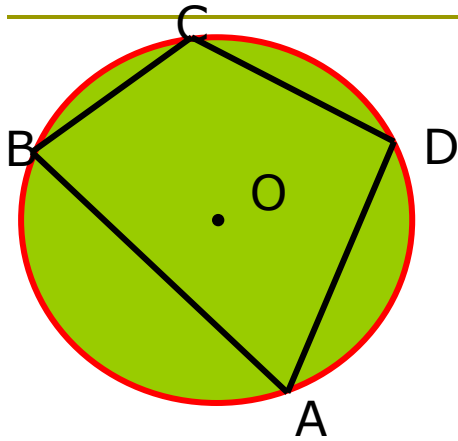
$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \text{ ADC} + \frac{1}{2} \text{ ABC} = \frac{1}{2} (\text{ADC} + \text{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$$

Значит,  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$

Другая формулировка теоремы: **во вписанном в окружность четырёхугольнике сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ .**

Обратная теорема: **если сумма противоположных углов четырёхугольника равна  $180^\circ$ , то около него можно описать окружность.**

---



Дано:  $ABCD$ ,  $\angle A + \angle C = 180^\circ$

Доказать: Окр.  $(O; R)$  описана около  $ABCD$

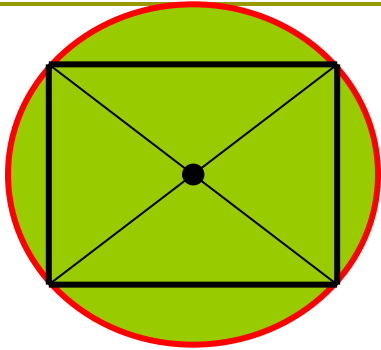
Доказательство: № 729 (учебник)

Вокруг какого четырёхугольника нельзя описать окружность?

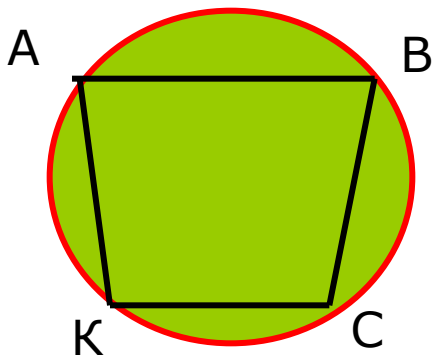


Следствие 1: **около любого прямоугольника можно описать окружность, её центр – точка пересечения диагоналей.**

---



Следствие 2: **около равнобедренной трапеции можно описать окружность.**



# Реши задачи

Найти углы четырёхугольника РКЕН:

