

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«КОЛЛЕДЖ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ»

# Многогранники 3D и 4D: двойственность

Автор:  
Преподаватель  
математики  
СПб ГБПОУ КИТ  
Патреева Я.Т.

# Определение многогранника

Многогранником в  $n$ -мерном пространстве называется ограниченная замкнутая часть этого пространства, имеющая грани всех размерностей от 0 до  $n-1$ .

Пример 1. Трехмерный многогранник имеет грани размерностей 0, 1, 2, которые мы называем вершинами, ребрами и плоскими гранями.

Пример 2. Четырехмерный многогранник имеет грани размерностей 0, 1, 2, 3 – вершины, ребра, грани, плоские грани и трехмерные грани.

# Правильный многогранник

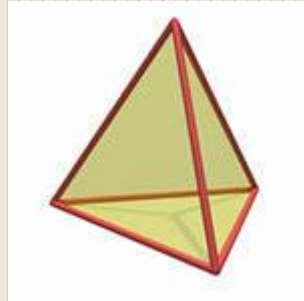
Правильным назовем многогранник, грани всех размерностей которого являются также правильными.

Пример 1. У правильного трехмерного многогранника равны между собой все ребра и плоские грани соответственно.

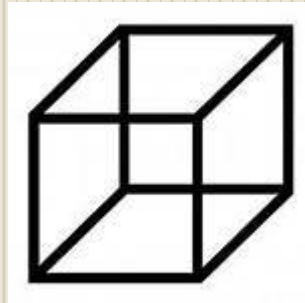
Пример 2. У правильного четырехмерного многогранника равны между собой все ребра, плоские грани и трехмерные грани соответственно.

# Правильные многогранники 3D

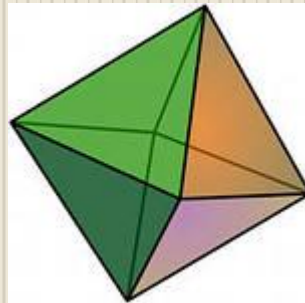
❖ Тетраэдр



❖ Куб



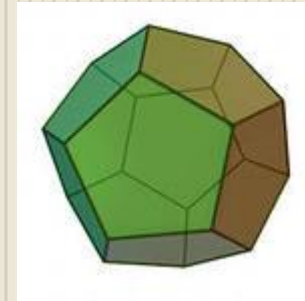
❖ Октаэдр



❖ Икосаэдр

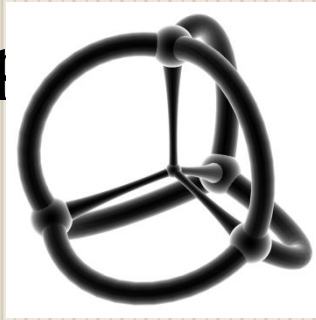


❖ Додекаэдр

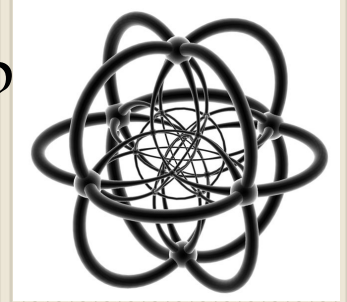


# Правильные многогранники 4D

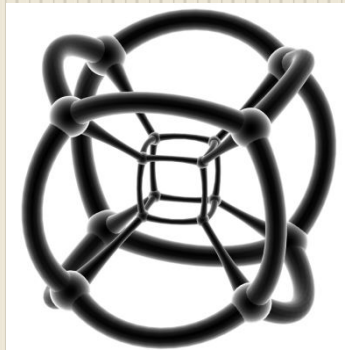
❖ Гипертетраэдр



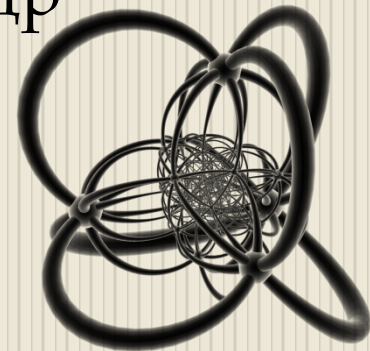
❖ Полиоктаэдр



❖ Гиперкуб



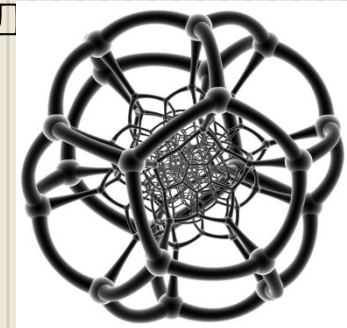
❖ Гиперикосаэдр



❖ Гиперокаэдр



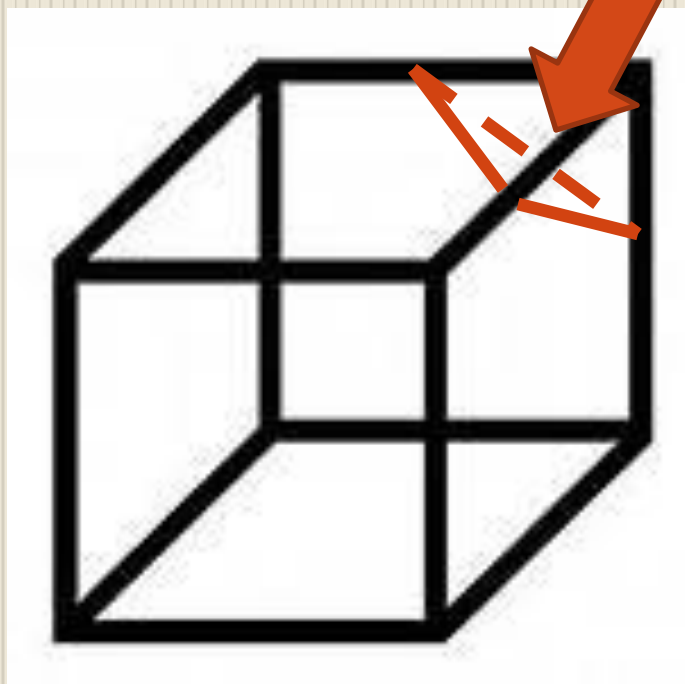
❖ Гипердодекаэдр



# «Звезда» многогранника

Звездой многогранника назовем многогранник размерности на 1 меньше, полученный при «отрезании» вершины.

Пример. «Звезда» куба - треугольник



# Символ Шлефли

Символом Шлефли для правильного многогранника назовем множество  $\{k; m; n; \dots\}$ , где  $k$  – число ребер каждой плоской грани, а остальное множество  $m; n; \dots$  – «звезда» многогранника.

Пример 1. Символ Шлефли для куба  $\{4; 3\}$

Пример 2. Символ Шлефли для полиоктаэдра  $\{3; 4; 3\}$

# Таблица взаимосвязи граней (3D)

	Вершин	Ребер	Граней	Названи е
Тетраэдр	4	6	4	{3;3}
Куб	8	12	6	{4; 3}
Октаэдр	6	12	8	{3; 4}
Икосаэдр	12	30	20	{3; 5}
Додекаэд р	20	30	12	{5; 3}



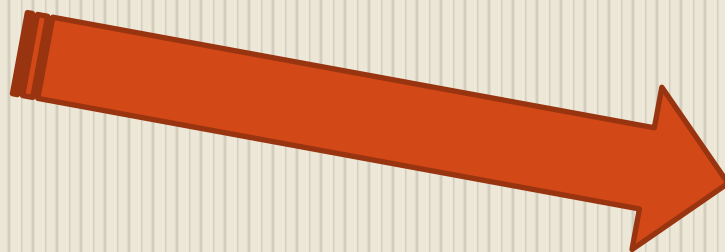
# Таблица взаимосвязи граней (4D)

Название	Вершин	Ребер	Граней	3d-граней	Символ Шлефли
Гипертетраэдр	5	10	10	5	{3;3;3}
Гиперкуб	16	32	24	8	{4;3;3}
Гипероктаэдр	8	24	32	16	{3;3;4}
Полиоктаэдр	24	96	96	24	{3;4;3}
Гиперикосаэдр	120	720	1200	600	{3;3;5}
Гипердодокаэдр	600	1200	720	120	{5;3;3}

# Двойственность

Двойственными назовем многогранники, у которых количество граней всех размерностей расположено в обратном порядке. Иначе говоря, символы Шлефли которых записаны «наоборот»

$\{4; 3; 3\}$



$\{3; 3; 4\}$

# Сделаем выводы о двойственности многогранников:

## 3D

- ✓ Тетраэдр – тетраэдр
- ✓ Куб – Октаэдр
- ✓ Икосаэдр -  
Додекаэдр

## 4D

- ✓ Гипертетраэдр –  
гипертетраэдр
- ✓ Гиперкуб –  
Гипероктаэдр
- ✓ Полиоктаэдр –  
полиоктаэдр
- ✓ Гиперикосаэдр -  
гипердодекаэдр

# Источники: ссылки на изображения

## ❑ Тетраэдр

[http://images.yandex.ru/yandsearch?source=wiz&fp=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1023-fh-448-pd-1&p=1&text=%D1%82%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80&noreask=1&pos=54&rpt=simage&lr=2&img\\_url=http%3A%2F%2Fdiesel.elcat.kg%2Fuploads%2Fmonthly\\_07\\_2011%2Fpost-113583-1310311161.jpg](http://images.yandex.ru/yandsearch?source=wiz&fp=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1023-fh-448-pd-1&p=1&text=%D1%82%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80&noreask=1&pos=54&rpt=simage&lr=2&img_url=http%3A%2F%2Fdiesel.elcat.kg%2Fuploads%2Fmonthly_07_2011%2Fpost-113583-1310311161.jpg)

## ❑ Куб

[http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D0%BA%D1%83%D0%B1&fp=0&pos=4&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img\\_url=http%3A%2F%2Fwww.lapinbook.ru%2Fbook%2Fmistakes%2Fimg%2F540.jpg](http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D0%BA%D1%83%D0%B1&fp=0&pos=4&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img_url=http%3A%2F%2Fwww.lapinbook.ru%2Fbook%2Fmistakes%2Fimg%2F540.jpg)

## ❑ Икосаэдр

[http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D1%81%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80&fp=0&pos=16&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img\\_url=http%3A%2F%2Fgraph.power.nstu.ru%2Fwolchin%2Fumm%2FGraphbook%2Fbook%2F001%2F027%2F74%2F74.gif](http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D1%81%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80&fp=0&pos=16&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img_url=http%3A%2F%2Fgraph.power.nstu.ru%2Fwolchin%2Fumm%2FGraphbook%2Fbook%2F001%2F027%2F74%2F74.gif)

## ❑ Додекаэдр

[http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D0%B4%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80&fp=0&pos=3&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img\\_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2F7%2F73%2FDodecahedron.gif](http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D0%B4%D0%BE%D0%B4%D0%B5%D0%BA%D0%B0%D1%8D%D0%B4%D1%80&fp=0&pos=3&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2F7%2F73%2FDodecahedron.gif)

# Источники: ссылки на изображения

## ❑ Гипертетраэдр

[http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img\\_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2Ff%2F5%2FStereographic\\_polytope\\_5cell.png%2F105px-Stereographic\\_polytope\\_5cell.png](http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2Ff%2F5%2FStereographic_polytope_5cell.png%2F105px-Stereographic_polytope_5cell.png)

## ❑ Гиперкуб

[http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img\\_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2F0%2F05%2FStereographic\\_polytope\\_8cell.png%2F150px-Stereographic\\_polytope\\_8cell.png](http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2F0%2F05%2FStereographic_polytope_8cell.png%2F150px-Stereographic_polytope_8cell.png)

## ❑ Гипероктаэдр

[http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img\\_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2F2%2F2d%2FStereographic\\_polytope\\_16cell.png%2F105px-Stereographic\\_polytope\\_16cell.png](http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2F2%2F2d%2FStereographic_polytope_16cell.png%2F105px-Stereographic_polytope_16cell.png)

# Источники: ссылки на изображения

## ❑ Полиоктаэдр

[http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img\\_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2F1%2F16%2FStereographic\\_polytope\\_24cell.png%2F105px-Stereographic\\_polytope\\_24cell.png](http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2F1%2F16%2FStereographic_polytope_24cell.png%2F105px-Stereographic_polytope_24cell.png)

## ❑ Гиперикосаэдр

[http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img\\_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2F4%2F43%2FStereographic\\_polytope\\_600cell.png%2F105px-Stereographic\\_polytope\\_600cell.png](http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2F4%2F43%2FStereographic_polytope_600cell.png%2F105px-Stereographic_polytope_600cell.png)

## ❑ Гипердодекаэдр

[http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img\\_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2Fd%2Fdb%2FStereographic\\_polytope\\_120cell.png%2F105px-Stereographic\\_polytope\\_120cell.png](http://images.yandex.ru/yandsearch?text=%D1%87%D0%B5%D1%82%D1%8B%D1%80%D0%B5%D1%85%D0%BC%D0%B5%D1%80%D0%BD%D1%8B%D0%B5%20%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8&fp=0&pos=1&uinfo=ww-1264-wh-625-fw-1039-fh-448-pd-1&rpt=simage&img_url=http%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2Fd%2Fdb%2FStereographic_polytope_120cell.png%2F105px-Stereographic_polytope_120cell.png)

# Источники: печатные

- Стрингхем П. Г. Правильные фигуры в  $n$ -мерном пространстве. Под ред. Фаге, Успехи математических наук, вып. 10 – М., 1954.
- М. Берже, Геометрия, издательство «Мир», 1984 год
- М. Бюргер, Сферландия, издательство Амфора, 2001
- Пухальская Я. Т. Курсовая работа по теме «Правильный многогранник в  $n$  – мерном пространстве». 2006 г.

# Источники: ссылки на интернет-ресурсы

- Википедия, правильные многогранники

<http://wiki.kgpi.ru/mediawiki/index.php/%D0%9F%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D1%8B%D0%B5%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%B8>

- Сайт «Математические этюды»

<http://www.etudes.ru/ru/sketches/>