

# **Некоторые вопросы геометрии три-тканей на плоскости**

# Постановка задачи

Цель работы: исследование некоторых вопросов геометрии три-тканей на плоскости.

Задачи:

1. Рассмотрение специфических свойств три-тканей на плоскости;
2. Исследование взаимосвязи геометрических и алгебраических свойств три-тканей на плоскости.

# Основные определения

**Определение 1.** Пусть на множестве  $D$  заданы три семейства кривых

$$\lambda_\alpha, \alpha = \overline{1,3} : \forall M \in D \quad \exists U_M :$$

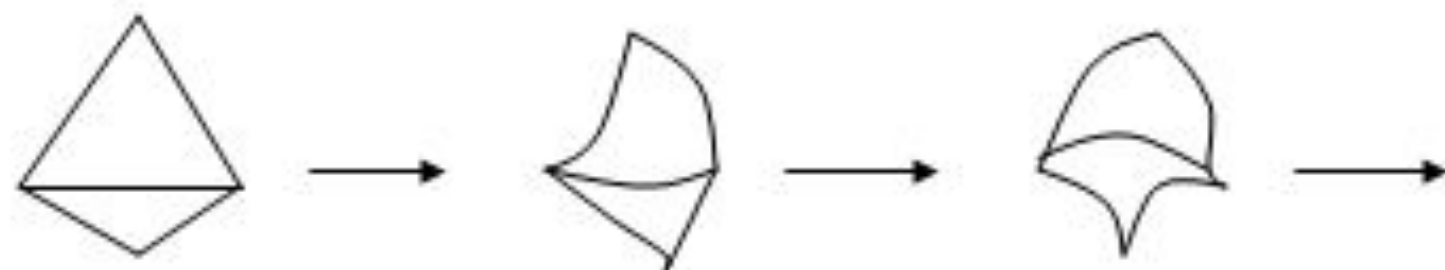
- а) каждое из семейств  $\lambda_\alpha$  является правильным, т. е. ;
- б) никакие две линии из разных семейств не касаются и пересекаются не более чем в одной точке. Тогда говорят, что кривые семейств  $\lambda_\alpha$  образуют на множестве  $D$  три-ткань.

## Определение 2.

Три-ткани  $W \subset D$  и  $\tilde{W} \subset \tilde{D}$  – эквивалентны,

если  $\exists \varphi: D \rightarrow \tilde{D}$

который отображает линии ткани  $W$  в линии ткани  $\tilde{W}$ .



**Определение 3.** Пусть три-ткань  $W$   
задана уравнениями:

$$F_{\alpha}(x, y) = u_{\alpha}, u_{\alpha} \in I_{\alpha}$$

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0$$

Уравнение:  $F(u_1, u_2, u_3) = 0$

называется **уравнением** три-ткани  $W$ ,  
а функция  $F$  - **функцией** **ткани**.

**Задача 1.** Пусть  $\lambda_\alpha$  - три семейства параллельных прямых на плоскости:

$$\lambda_\alpha : A_\alpha x + B_\alpha y + C_\alpha = 0,$$

$$A_\alpha \text{ и } B_\beta : \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\beta \\ A_\beta & B_\beta \end{vmatrix} \neq 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Семейства  $\lambda_\alpha$  образуют в области  $D \equiv R^2$  три-  
ткань, которая называется **параллельной** и  
обозначается  $W_0$  .

Найти функцию параллельной ткани  $W_0$ .

Решение. Так как  $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ , можно

положить  $\tilde{x} = A_1x + B_1y$        $\tilde{y} = A_2x + B_2y$

$$\tilde{W}_0 : \tilde{x} = u_1, \tilde{y} = u_2, \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{y} = u_3$$

Где  $\tilde{A} \neq 0, \tilde{B} \neq 0$

Исключая  $\tilde{x}$  и  $\tilde{y}$ , найдем  $\tilde{W}_0 : F = u_3 - \tilde{A}u_1 - \tilde{B}u_2$

После замены  $\tilde{A}u_1 = \tilde{u}_1, \tilde{B}u_2 = \tilde{u}_2, u_3 = -\tilde{u}_3$

Уравнение ткани:  $\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3 = 0$

**Задача 2.** Найти уравнение прямолинейной три-ткани.

**Решение.** Уравнения семейств  $\lambda_\alpha$  прямых, образующих ткань:

$$\lambda_\alpha : a_\alpha(u_\alpha)x + b_\alpha(u_\alpha)y + c_\alpha(u_\alpha) = 0$$

$u_\alpha$  - параметр прямой в семействе  $\lambda_\alpha$

Исключив  $x$  и  $y$ , получим:

$$\begin{vmatrix} a_1(u_1) & b_1(u_1) & c_1(u_1) \\ a_2(u_2) & b_2(u_2) & c_2(u_2) \\ a_3(u_3) & b_3(u_3) & c_3(u_3) \end{vmatrix} = 0$$



# Квазигруппы

Множество  $Q$ , вместе с  $q: Q \times Q \rightarrow Q$  называется группоидом.

**Определение.** Группоид  $Q$  называется квазигруппой, если

a)  $\forall a, b \in Q \quad \exists! y \in Q: q(a, y) = b$

b)  $\forall b, c \in Q \quad \exists! x \in Q: q(x, b) = c$

# Абстрактные три-ткани

Пусть дано множество  $M$ , элементы - точки, и множества  $X, Y, Z$ , элементы - линии первого, второго и третьего семейства, соответственно.

- **Определение.** Множества  $M, X, Y, Z$  образуют **абстрактную три-ткань** если элементы этих множеств связаны отношением инцидентности, которое :
- **A1.** Каждая точка множества  $M$  инцидентна в точности трем линиям, взятым по одной из семейств  $X, Y, Z$ .
- **A2.** Каковы бы ни были две линии, взятые из разных семейств, существует единственная точка из множества  $M$  инцидентная этим линиям.

# Координатная квазигруппа

Рассмотрим три-ткань  $W_0$ , образованную тремя семействами  $\lambda_\alpha$  параллельных прямых. Определим операцию  $q: \lambda_1 \times \lambda_2 \rightarrow \lambda_3$  следующим образом

$$q(x, y) = z, \text{ где } x \in \lambda_1, y \in \lambda_2, z \in \lambda_3$$

Тогда трехбазисная квазигруппа  $q$  называется **координатной квазигруппой**

# Фигуры замыкания

На абстрактных три-тканях можно рассматривать различные фигуры замыкания – шестиугольные фигуры, фигуры Томсена и другие. Замыканию фигур определенного типа на ткани соответствует некоторое тождество, выполняемое в координатной квазигруппе .

# Типы три-тканей

Три-ткани Томсена: 
$$\left. \begin{aligned} x_2 y_1 &= x_1 y_2 \\ x_3 y_1 &= x_1 y_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_2 y_3 = x_3 y_2$$

Три-ткани Рейдемейстера:

$$\left. \begin{aligned} x_2 y_1 &= x_1 y_2 \\ x_4 y_1 &= x_3 y_2 \\ x_1 y_4 &= x_2 y_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_3 y_4 = x_4 y_3$$

# Заключение

В ходе изучения геометрических три-тканей на плоскости в данной работе был освоен математический аппарат теории три-тканей, исследованы и систематизированы геометрические и алгебраические свойства три-тканей, рассмотрены конкретные задачи геометрической теории три-тканей на плоскости, выявлены взаимосвязи геометрических и алгебраических свойств три-ткани на плоскости.