Некоторые вопросы геометрии три-тканей на плоскости

Постановка задачи

Цель работы: исследование некоторых вопросов геометрии три-тканей на плоскости.

Задачи:

1. Рассмотрение специфических свойств три-тканей на плоскости;
2. Исследование взаимосвязи геометрических и алгебраических свойств три-тканей на плоскости.

Основные определения

Определение 1. Пусть на множестве D заданы три семейства кривых

$$\lambda_\alpha, \alpha = \overline{1,3} : \forall M \in D \quad \exists U_M :$$

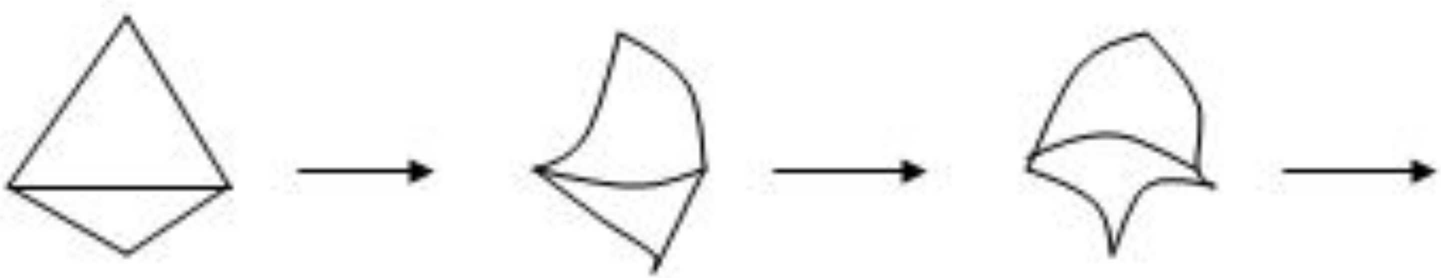
а) каждое из семейств λ_α является правильным, т. е. ;

б) никакие две линии из разных семейств не касаются и пересекаются не более чем в одной точке. Тогда говорят, что кривые семейств λ_α образуют на множестве D **три-ткань.**

Определение 2.

Три-ткани $W \subset D$ и $\widetilde{W} \subset \widetilde{D}$ – эквивалентны, если $\exists \varphi : D \to \widetilde{D}$

который отображает линии ткани W в линии ткани $\widetilde{W}$.



Определение 3. Пусть три-ткань W задана уравнениями:

$$F_{\alpha}(x, y) = u_{\alpha}, u_{\alpha} \in I_{\alpha}$$
$$F(u_1, u_2, u_3) = 0$$

Уравнение: $F(u_1, u_2, u_3) = 0$

называется **уравнением** три-ткани W, а функция F - **функцией ткани** .

Задача 1. Пусть λ_α - три семейства параллельных прямых на плоскости:

$$\lambda_\alpha : A_\alpha x + B_\alpha y + C_\alpha = 0,$$

$$A_\alpha \ и \ B_\beta : \quad \begin{vmatrix} A_\alpha & B_\beta \\ A_\beta & B_\beta \end{vmatrix} \neq 0 \quad при \quad \alpha \neq \beta, \alpha, \beta = 1,2,3$$

Семейства λ_α образуют в области $D \equiv R^2$ три-ткань, которая называется **параллельной** и обозначается W_0 .

Найти функцию параллельной ткани W_0.

Решение.Так как $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, можно положить $\widetilde{x} = A_1x + B_1y \qquad \widetilde{y} = A_2x + B_2y$

$$\widetilde{W}_0 : \widetilde{x} = u_1, \widetilde{y} = u_2, \widetilde{A}\widetilde{x} + \widetilde{B}\widetilde{y} = u_3$$

Где $\widetilde{A} \neq 0, \widetilde{B} \neq 0$

Исключая $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$, найдем $\widetilde{W}_0 : F = u_3 - \widetilde{A}u_1 - \widetilde{B}u_2$

После замены $\widetilde{A}u_1 = \widetilde{u}_1, \widetilde{B}u_2 = \widetilde{u}_2, u_3 = -\widetilde{u}_3$

Уравнение ткани: $\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2 + \widetilde{u}_3 = 0$

Задача 2. Найти уравнение прямолинейной три-ткани.

Решение. Уравнения семейств λ_α прямых, образующих ткань:

$$\lambda_\alpha : a_\alpha(u_\alpha)x + b_\alpha(u_\alpha)y + c_\alpha(u_\alpha) = 0$$

u_α - параметр прямой в семействе λ_α

Исключив *x* и *y*, получим:

$$\begin{vmatrix} a_1(u_1) & b_1(u_1) & c_1(u_1) \\ a_2(u_2) & b_2(u_2) & c_2(u_2) \\ a_3(u_3) & b_3(u_3) & c_3(u_3) \end{vmatrix} = 0$$

Квазигруппы

Множество Q ,вместе с $q : Q \times Q \to Q$ называется группоидом.

Определение. Группоид Q называется квазигруппой, если

a) $\forall\, a,b \in Q \quad \exists!\, y \in Q: \quad q(a,y) = c$

b) $\forall\, b,c \in Q \quad \exists!\, x \in Q: \quad q(x,b) = c$

Абстрактные три-ткани

Пусть дано множество *M*, элементы - точки, и множества *X*, *Y* , *Z* , элементы - линии первого, второго и третьего семейства, соответственно.

- **Определение.** Множества *M, X,Y, Z* образуют **абстрактную три-ткань** если элементы этих множеств связаны отношением инцидентности, которое :
- **А1.** Каждая точка множества *M* инцидентна в точности трем линиям, взятым по одной из семейств *X,Y ,Z*.
- **А2.** Каковы бы ни были две линии, взятые из разных семейств, существует единственная точка из множества *M* инцидентная этим линиям.

Координатная квазигруппа

Рассмотрим три-ткань W_0 , образованную тремя семействами λ_α параллельных прямых. Определим операцию $q:\lambda_1\times\lambda_2\rightarrow\lambda_3$

следующим образом

$$q(x,y)=z,\ где\ x\in\lambda_1,\ y\in\lambda_2,\ z\in\lambda_3$$

Тогда трехбазисная квазигруппа q называется **координатной квазигруппой**

Фигуры замыкания

На абстрактных три-тканях можно рассматривать различные фигуры замыкания – шестиугольные фигуры, фигуры Томсена и другие. Замыканию фигур определенного типа на ткани соответствует некоторое тождество, выполняемое в координатной квазигруппе .

Типы три-тканей

Три-ткани Томсена:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 y_1 = x_1 y_2 \\ x_3 y_1 = x_1 y_3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 y_3 = x_3 y_2$$

Три-ткани Рейдемейстера:

$$\left.\begin{array}{l} x_2 y_1 = x_1 y_2 \\ x_4 y_1 = x_3 y_2 \\ x_1 y_4 = x_2 y_3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_3 y_4 = x_4 y_3$$

Заключение

В ходе изучения геометрических три-тканей на плоскости в данной работе был освоен математический аппарат теории три-тканей, исследованы и систематизированы геометрические и алгебраические свойства три-тканей, рассмотрены конкретные задачи геометрической теории три-тканей на плоскости, выявлены взаимосвязи геометрических и алгебраических свойств три-ткани на плоскости.