

Метод обратных итераций

Собственные значения и вектора

$$(Ax - \lambda x)x = 0, \quad x \neq 0,$$

где A - квадратная матрица n -го порядка;
 λ - собственное значение матрицы;
 x - собственный вектор.

Метод обратных итераций

A

B

A И $A - bE$

X_K

$$(A - bE)x_k = (\lambda_k - b)x_k = \frac{1}{\beta_k} x_k \cdot |$$

$$(A - bE)^{-1} = B.$$

$$Bx^n = x^{n+1}$$

Схема метода обратных итераций

- Фиксируем b, x^0
- Решаем систему линейных уравнений

$$(A - bE)x^{n+1} = x^n$$

- $$\beta^n \approx \frac{(x^{n+1}, x^n)}{(x^n, x^n)}$$

Объем расчетов в методе обратной итерации

- $\frac{2}{3}n^3$
- n^4
- $n \leq 10$

Обратные итерации с ПОСТОЯННЫМИ СДВИГАМИ

- $(A - \lambda E)x_{n+1} = x_n$, где $n = 0, 1, \dots$, x_0 — начальное приближение, $\alpha \in R$
- $\exists (A - \lambda E)^{-1}$
- $x_{n+1} = (A - \alpha E)^{-1}x_n$
- $x_n = e_1$
- $1/|\lambda_1 - \lambda| = \max_{1 \leq k \leq m} 1/|\lambda_k - \lambda|$

Обратные итерации с переменными сдвигами

- $(A - \lambda^{(k-1)} E) y^{(k)} = x^{(k-1)}$;
- $x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\|y^{(k)}\|}$;
- $\lambda_j^{(k)} = \lambda_j^{(k-1)} + \frac{x_i^{(k-1)}}{y_i^{(k)}}$, $k=1, 2, \dots$, а число $\lambda_j^{(0)} \approx \lambda_j$ и нормированный вектор $x^{(0)}$ задаются.

Эффективность методов обратных итераций с постоянными и переменными сдвигами

Обратные итерации с постоянным и особенно с переменным сдвигом — очень эффективный метод расчета.

Обратные итерации с отношениями Рэлея

- $x^{(0)} : \|x^{(0)}\| = 1$
- Для $k=1, 2, \dots$: $\rho_{k-1} = \frac{(Ax^{(k-1)} x^{(k-1)})}{(x^{(k-1)} x^{(k-1)})}$
- Найти $y^{(k)}$ из:
$$(A - \rho_{k-1}E) y^{(k)} = x^{(k-1)}$$
- Нормировать $y^{(k)}$: $x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\|y^{(k)}\|}$
- Проверить $\rho_k, x^{(k)}$ на сходимость.