Метод обратных итераций

Собственные значения и вектора

$$(Ax-\lambda x)x=0,\ \ x\neq 0,$$

где *A* - квадратная матрица ***n***-го порядка;
λ - собственное значение матрицы;
x - собственный вектор.

Метод обратных итераций

A

B

A и $A - BE$

X_K

$$(\mathrm{A} - b\mathrm{E})\mathrm{x}_k = (\lambda_k - b)\mathrm{x}_k = \frac{1}{\beta_k}\mathrm{x}_k.$$

$$(\mathrm{A} - b\mathrm{E})^{-1} = \mathrm{B}.$$

$$\mathbf{B}\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^{n+1}$$

Схема метода обратных итераций

- Фиксируем b, x^0
- Решаем систему линейных уравнений

$$(\mathbf{A} - b\mathbf{E})\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n$$

- $$\beta^n \approx \frac{(\mathbf{x}^{n+1}, \mathbf{x}^n)}{(\mathbf{x}^n, \mathbf{x}^n)}.$$

Объем расчетов в методе обратной итерации

- ${}^{2}/_{3}\mathbf{n}^{3}$
- $\mathbf{n}^{4}$
- $\mathbf{n}\leq 10$

Обратные итерации с постоянными сдвигами

- $(A - \lambda E)x_{n+1} = x_n$, где $n = 0, 1, \ldots, x_0$ — начальное приближение, $\alpha \in R$
- $\exists\ (A - \lambda E)^{-1}$
- $x_{n+1} = (A - \alpha E)^{-1} x_n$
- $x_n = e_1$
- $1/|\lambda_1 - \lambda| = \max_{1 \leq k \leq m} 1/|\lambda_k - \lambda|$

Обратные итерации с переменными сдвигами

- $(A-\lambda^{(k-1)}E)y^{(k)}=x^{(k-1)}$;
- $x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{\|y^k\|}$, ;
- $\lambda_j^{(k)}=\lambda_j^{(k-1)} + \frac{x_i^{(k-1)}}{y_i^{(k)}}$, , $k=1,2,\ldots$,а число $\lambda_j^{(0)} \approx \lambda_j$ и нормированный вектор $x^{(0)}$ задаются.

Эффективность методов обратных итераций с постоянными и переменными сдвигами

Обратные итерации с постоянным и особенно с переменным сдвигом — очень эффективный метод расчета.

Обратные итерации с отношениями Рэлея

- $x^{(0)}$: $\|x^{(0)}\| = 1$
- Для $k=1,2,\ldots$: $\rho_{k-1} = \dfrac{(Ax^{(k-1)}x^{(k-1)})}{(x^{(k-1)}x^{(k-1)})}$
- Найти $y^{(k)}$ из:
  $(A - \rho_{k-1}E)\, y^{(k)} = x^{(k-1)}$
- Нормировать $y^{(k)}$: $x^{(k)} = \dfrac{y^{(k)}}{\|y^{k}\|}$
- Проверить ρ_k, $x^{(k)}$ на сходимость.