

---

# Конечномерные векторные поля и их приложения к исследованию автономных систем

# Цель работы:

**Целью** нашей работы является изучение понятия вращения конечномерных векторных полей и возможностей их приложений для исследования автономных систем дифференциальных уравнений.

## **Задачи:**

1. Рассмотрение различных подходов к введению понятия вращения конечномерного векторного поля.
2. Исследование формул вращений для плоского и  $n$ -мерного случая.
3. Рассмотрение свойств конечномерных векторных полей.
4. Составление обзора приложений вращения конечномерных векторных полей.
5. Приложения конечномерных векторных полей для изучения существования решений у автономных систем ОДУ.

# Исторические сведения

---

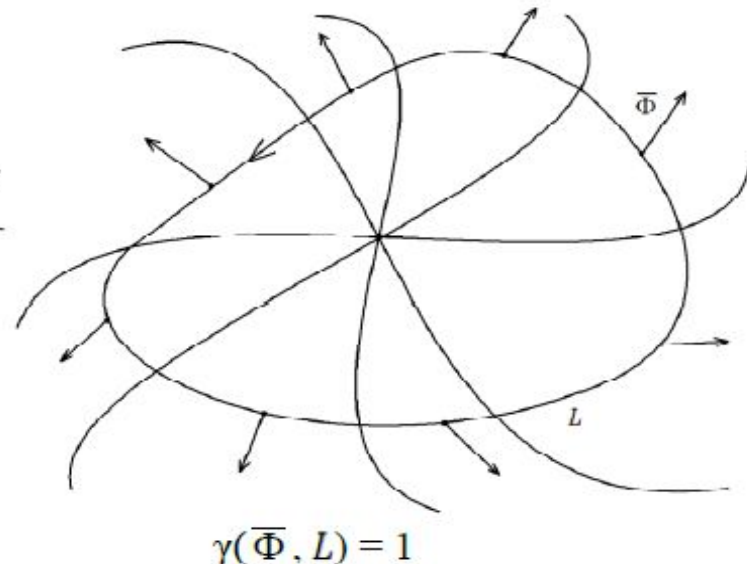
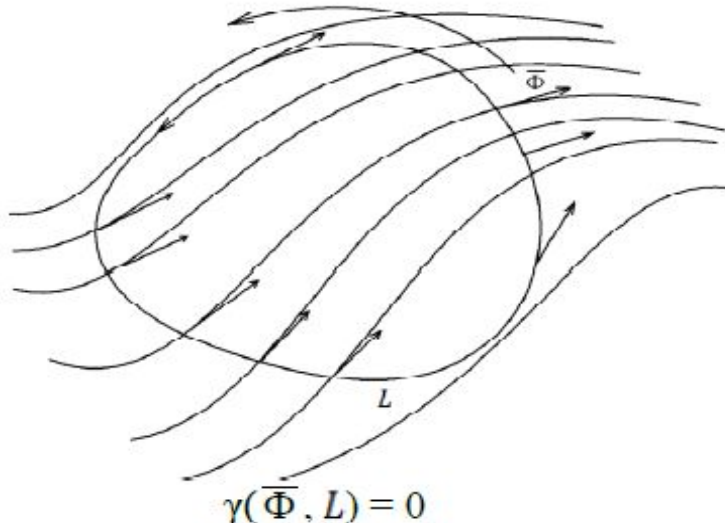
Основной вклад в появление и развитие понятия «вращения векторного поля» внесли:

- Анри Пуанкаре (1854-1912) ;
- Лейтзен Эгберт Брауэр (1881-1966) ;
- Жан Лере (1906-1998) и Юлий Шаудер (1898-1943) ;
- Соломон Лефшец (1884-1972) ;
- Хайнц Хопф (1894-1971) ;
- Марк Александрович Красносельский (1920-1997).

# Вращение двумерных векторных полей

**Определение:** Пусть дана кусочно-гладкая ориентированная (то есть задано направление, в котором она проходится) плоская кривая  $L$  и дано непрерывное векторное поле  $\bar{\Phi}(M)$ , не имеющее особых точек (то есть точек, где векторное поле обращается в нулевой вектор или не существует) на кривой  $L$ . Тогда вращением  $\gamma(\bar{\Phi}(M), L)$  векторного поля  $\bar{\Phi}(M)$  вдоль кривой  $L$  называется деленный на  $2\pi$  угол, на который поворачивается вектор  $\bar{\Phi}(M)$  при прохождении кривой  $L$  в указанном направлении (рисунок 1). При этом угол поворота против часовой стрелки будем считать положительным, а по часовой стрелке – отрицательным.

Примеры:



# Вращение $n$ -мерных векторных полей

**Определение:** Вращением  $n$ - мерного векторного поля  $\bar{\Phi}$  на границе  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  называется степень отображения  $\Psi(x) = \frac{\bar{\Phi}(x)}{\|\bar{\Phi}(x)\|}$  границы  $\partial\Omega$  на единичную сферу  $\|\bar{x}\| = 1$ .

Таким образом, вращение показывает сколько раз отображение  $\bar{\Psi}(\bar{x})$  покрывает единичную сферу, если  $\bar{x}$  пробежит границу  $\partial\Omega$ . Если ориентация при отображении  $\bar{\Psi}$  сохраняется, то число покрытий берется со знаком «+», а если нет, то - «-».



# Формулы для вычисления вращения

## 1. Формула Пуанкаре

$$\gamma(\bar{\Phi}(\bar{x}), L) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{(\Phi_x d\Phi_y - \Phi_y d\Phi_x)}{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}.$$

## 2. Формула Пуанкаре для аналитических функций

$$\text{ind}(z_0, \Phi(z)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{\Phi'(z) dz}{\Phi(z)}.$$

## 3. Случай отображений с главной линейной частью

$$\bar{\Phi}(\bar{x}) = A\bar{x} + o(\|\bar{x}\|), \det A \neq 0.$$

$$\text{ind}(O, \bar{\Phi}(\bar{x})) = \text{sign}(\det A).$$

## 4. Формула вращения n-мерного векторного поля

$$\gamma(\bar{\Phi}(\bar{x}), \partial\Omega) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n \left| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{j-1}} & \Phi_1 & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{j+1}} & \dots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_{j-1}} & \Phi_n & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_{j+1}} & \dots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n} \end{array} \right| \frac{\cos(\bar{n}, x_j)}{\|\Phi\|^n} ds$$

# Свойства вращения $n$ -мерных векторных полей

1. Вращение всегда является целым числом.
2. Пусть  $\bar{\Phi}(x)$  невырожденно на  $\partial\Omega, \partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_n$ , причем области

$\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) попарно не пересекаются и  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$ . Тогда

$$\gamma(\bar{\Phi}, \partial\Omega) = \sum_{i=1}^n \gamma(\bar{\Phi}, \partial\Omega_i).$$

3. Пусть  $\bar{\Phi}(x)$  определено на  $\bar{\Omega}$ . Если  $\gamma(\bar{\Phi}, \partial\Omega) \neq 0$ , то уравнение  $\bar{\Phi}(\bar{x}) = \bar{0}$  разрешимо в  $\Omega$ .

4. 
$$\sum_{i=1}^n \text{ind}(M_i, \bar{\Phi}) = \gamma(\bar{\Phi}, \partial\Omega).$$

# Обзор областей применения понятия вращения конечномерных векторных полей

---

1. Разрешимость уравнений (теорема Боля – Брауэра, разрешимость систем алгебраических уравнений, расположение корней многочлена, теорема о неявной функции).
2. ТФКП (основная теорема алгебры, принцип аргумента, алгебраическое число нулей).
3. ОДУ (циклы и бифуркации автономных систем, устойчивость, краевые задачи).



# Доказательство существования особых точек автономных систем

**Теорема 1:** дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = y + \alpha(x, y) \\ y' = -x + \beta(x, y) \end{cases},$$

где  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y)$  – непрерывные функции на окружности  $L$  с центром в начале координат и радиусом  $r$ , причем на ней  $\alpha^2(x, y) + \beta^2(x, y) < r^2$ .

Тогда у данной системы существует хотя бы одна точка покоя.

**Теорема 2:** дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + \alpha(x, y) \\ y' = 2xy + \beta(x, y) \end{cases},$$

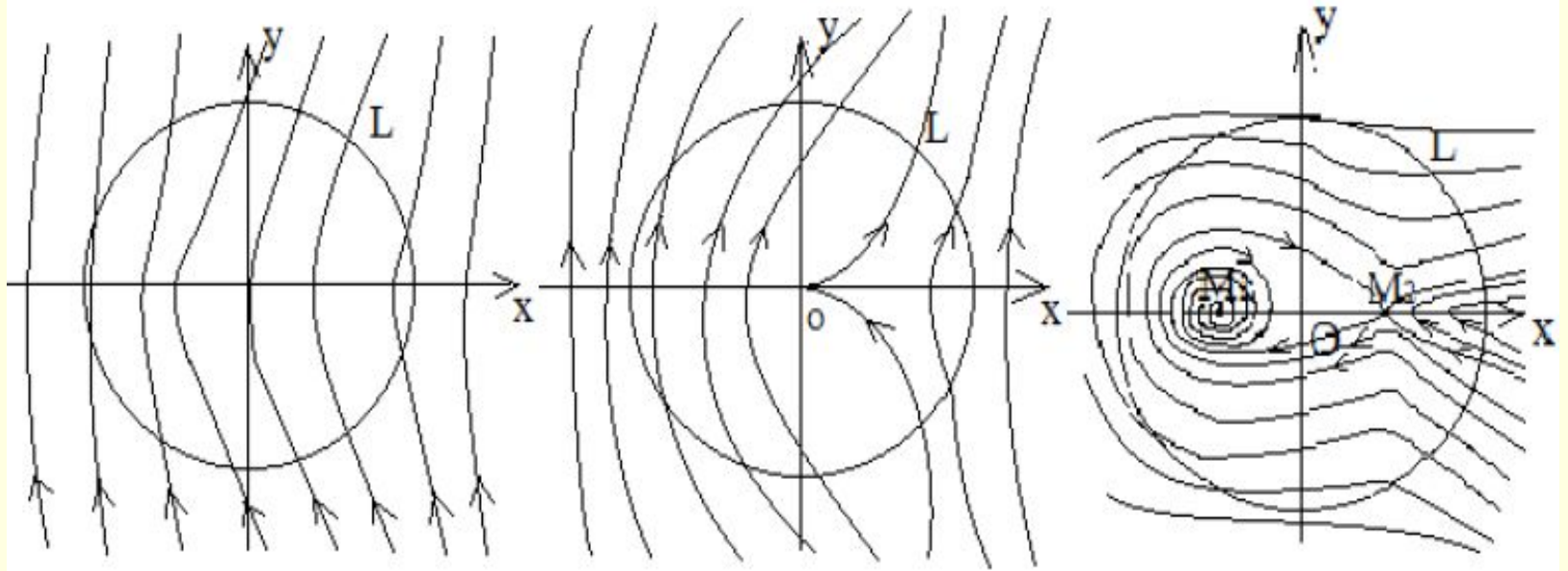
где  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x, y)$  – непрерывные функции на окружности  $L$  с центром в начале координат и радиусом, причём на ней выполняется

$\alpha^2(x, y) + \beta^2(x, y) < r^4$ . Кроме того, пусть начало координат является асимптотически устойчивой точкой данной системы.

Тогда у данной системы существует хотя бы одна точка покоя.

# Бифуркации

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - \lambda(y+1) \end{cases}$$



# Заключение

---

В данной работе мы рассмотрели определения понятия вращения двумерного и  $n$ -мерного векторных полей, привели примеры векторных полей.

Исследовали формулы для нахождения вращения векторных полей и индекса особой точки.

Рассмотрели свойства вращений для плоского и  $n$ -мерного случая.

Мною был подготовлен обзор приложений теории вращения конечномерных векторных полей в различных областях математики.

Получен ряд результатов для автономных систем дифференциальных уравнений: получены условия, обуславливающие существование точек покоя и циклов таких систем.

Таким образом, поставленная цель работы выполнена.