Конечномерные векторные поля и их приложения к исследованию автономных систем

Цель работы:

Целью нашей работы является изучение понятия вращения конечномерных векторных полей и возможностей их приложений для исследования автономных систем дифференциальных уравнений.

Задачи:

1. Рассмотрение различных подходов к введению понятия вращения конечномерного векторного поля.
2. Исследование формул вращений для плоского и n-мерного случая.
3. Рассмотрение свойств конечномерных векторных полей.
4. Составление обзора приложений вращения конечномерных векторных полей.
5. Приложения конечномерных векторных полей для изучения существования решений у автономных систем ОДУ.

Исторические сведения

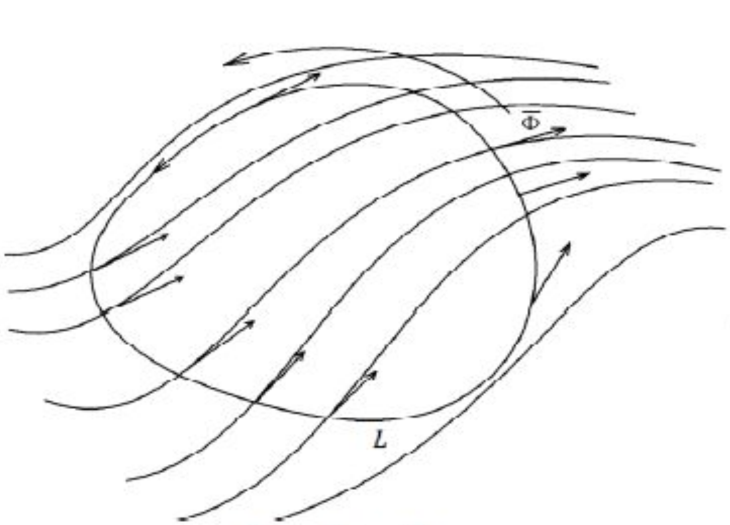
Основной вклад в появление и развитие понятия «вращения векторного поля» внесли:

- Анри Пуанкаре (1854-1912) ;
- Лёйтзен Эгберт Брауэр (1881-1966) ;
- Жан Лере (1906-1998) и Юлий Шаудер (1898-1943) ;
- Соломон Лефшец (1884-1972) ;
- Хайнц Хопф (1894-1971) ;
- Марк Александрович Красносельский (1920-1997).

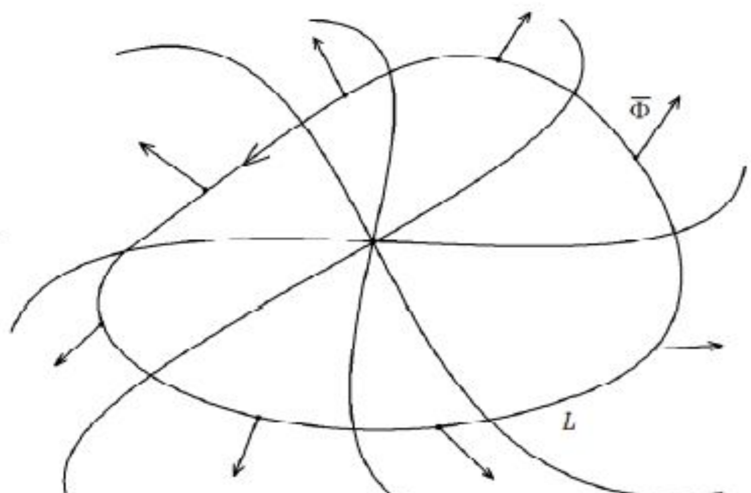
Вращение двумерных векторных полей

Определение: Пусть дана кусочно-гладкая ориснтированная (то ссть задано направление, в котором она проходится) плоская кривая L и дано непрерывное векторное поле $\overline{\Phi}(M)$, не имеюшее особых точек (то есть точек, где векторное поле обращается в нулевой вектор или не существует) на кривой L. Тогда вращением $\gamma(\overline{\Phi}(M), L)$ векторного поля $\overline{\Phi}(M)$ вдоль кривой L называется деленный на 2π угол, на который поворачивается вектор $\overline{\Phi}(M)$ при прохождении кривой L в указанном направлении (рисунок 1). При этом угол поворота против часовой стрелки будем считать положительным, а по часовой стрелке – отрицательным.

Примсры:



$\gamma(\overline{\Phi}, L) = 0$



$\gamma(\overline{\Phi}, L) = 1$

Вращение n-мерных векторных полей

Определение: Вращением n- мерного векторного поля $\overline{\Phi}$ на границе $\partial\Omega$ области Ω называется степень отображения $\Psi(x) = \dfrac{\overline{\Phi}(x)}{\left\|\overline{\Phi}(x)\right\|}$ границы $\partial\Omega$ на единичную сферу $\|\bar{x}\| = 1.$

Таким образом, вращение показывает сколько раз отображение $\overline{\Psi}(\bar{x})$ покроет единичную сферу, если $\bar{x}$ пробежит границу $\partial\Omega$. Если ориентация при отображении $\overline{\Psi}$ сохраняется, то число покрытий берется со знаком «+», а если нет, то - « - ».

Формулы для вычисления вращения

1. Формула Пуанкаре

$$\gamma(\overline{\Phi}(\overline{x}),\mathrm{L}) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{(\Phi_x d\Phi_y - \Phi_y d\Phi_x)}{\Phi_x^{\,2} + \Phi_y^{\,2}}.$$

2. Формула Пуанкаре для аналитических функций

$$ind\,(z_0,\Phi(z)) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\Phi'(z)dz}{\Phi(z)}.$$

3. Случай отображений с главной линейной частью

$$\overline{\Phi}(\overline{x}) = A\overline{x} + o(\|x\|),\ \det A \neq 0.$$

$$ind(O,\overline{\Phi}(\overline{x})) = sign(\det A).$$

4. Формула вращения n-мерного векторного поля

$$\gamma(\overline{\Phi}(\overline{x}),\partial\Omega) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{j-1}} & \Phi_1 & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_{j+1}} & \dots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_{j-1}} & \Phi_n & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_{j+1}} & \dots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}\frac{\cos(\overline{n},x_j)}{\|\Phi\|^n}ds$$

Свойства вращения n-мерных векторных полей

1. Вращение всегда является целым числом.
2. Пусть $\overline{\Phi}(x)$ невырожденно на $\partial\Omega, \partial\Omega_1, \ldots, \partial\Omega_n$, причем области Ω_i $(i=1,\ldots,n)$ попарно не пересекаются и $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$. Тогда
$$\gamma(\overline{\Phi}, \partial\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \gamma(\overline{\Phi}, \partial\Omega_i).$$
3. Пусть $\overline{\Phi}(x)$ определено на $\overline{\Omega}$. Если $\gamma(\Phi, \partial\Omega) \neq 0$, то уравнение $\overline{\Phi}(\overline{x}) = \overline{0}$ разрешимо в Ω.
4. $\sum_{i=1}^{n} ind(M_i, \overline{\Phi}) = \gamma(\overline{\Phi}, \partial\Omega)$.

Обзор областей применения понятия вращения конечномерных векторных полей

1. Разрешимость уравнений (теорема Боля – Брауэра, разрешимость систем алгебраических уравнений, расположение корней многочлена, теорема о неявной функции).

2. ТФКП (основная теорема алгебры, принцип аргумента, алгебраическое число нулей).

3. ОДУ (циклы и бифуркации автономных систем, устойчивость, краевые задачи).

Доказательство существования особых точек автономных систем

Теорема 1: дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = y + \alpha(x,y) \\ y' = -x + \beta(x,y) \end{cases},$$

где $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$ – непрерывные функции на окружности L с центром в начале координат и радиусом r, причем на ней $\alpha^2(x,y) + \beta^2(x,y) < r^2$.

Тогда у данной системы существует хотя бы одна точка покоя.

Теорема 2: дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + \alpha(x,y) \\ y' = 2xy + \beta(x,y) \end{cases},$$

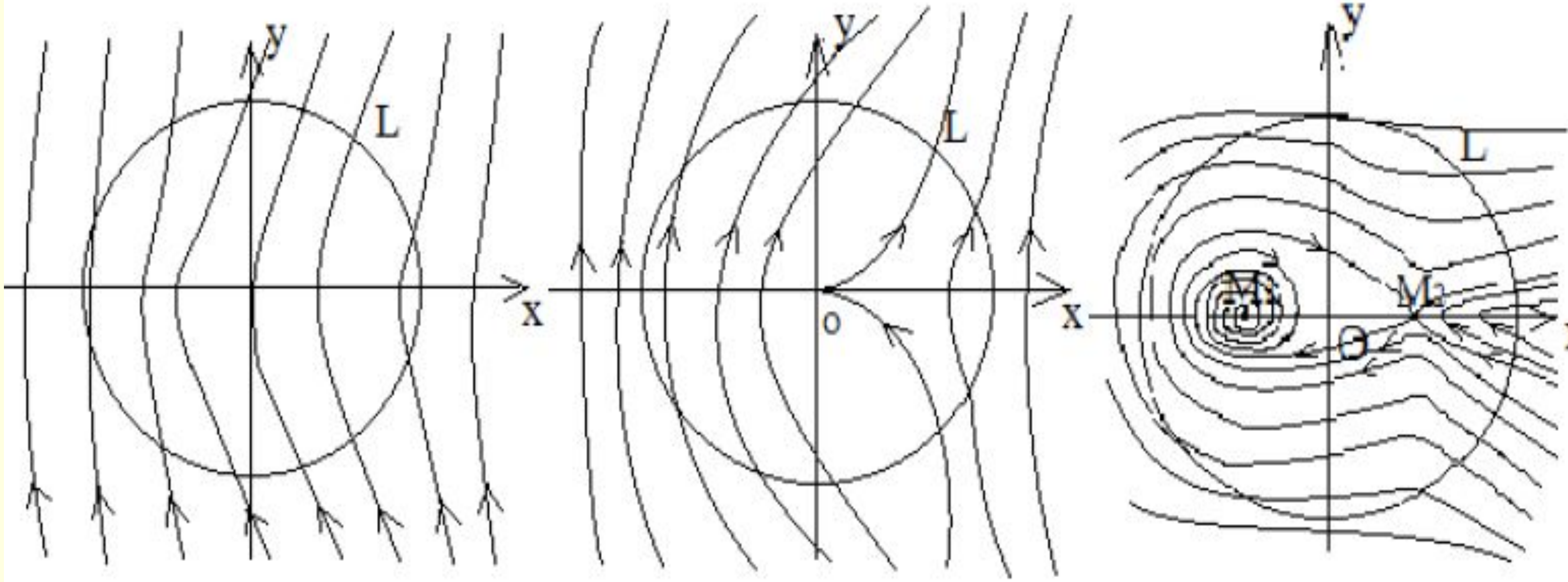
где $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ – непрерывные функции на окружности L с центром в начале координат и радиусом, причём на ней выполняется

$\alpha^2(x,y) + \beta^2(x,y) < r^4$. Кроме того, пусть начало координат является асимптотически устойчивой точкой данной системы.

Тогда у данной системы существует хотя бы одна точка покоя.

Бифуркации

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - \lambda(y+1) \end{cases}$$



Заключение

В данной работе мы рассмотрели определения понятия вращения двумерного и n-мерного векторных полей, привели примеры векторных полей.

Исследовали формулы для нахождения вращения векторных полей и индекса особой точки.

Рассмотрели свойства вращений для плоского и n-мерного случая.

Мною был подготовлен обзор приложений теории вращения конечномерных векторных полей в различных областях математики.

Получен ряд результатов для автономных систем дифференциальных уравнений: получены условия, обуславливающие существование точек покоя и циклов таких систем.

Таким образом, поставленная цель работы выполнена.