Презентация по математике

На тему: Правила Крамера

$$x_k = \frac{d_k}{d},$$

$$k = 1,2,3$$

В литературе известны разные способы решения Крамеровой системы линейных алгебраических уравнений. Один из них – матричный способ – состоит в следующем. Пусть дана Крамерова система, т.е. квадратная система линейных уравнений с неизвестными

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Определитель которой отличен от нуля:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2)$$

Систему (1) можно представить в виде одного матричного уравнения

$$AX = B \qquad (3)$$

где A - матрица коэффициентов при неизвестных системы (1),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{11} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - столбец (Матрица-столбец) неизвестных

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$ - столбец свободных членов системы (1)

Так как $\det A = d \neq 0$, то матрица A невырожденная и для нее существует обратная матрица A^{-1}. Умножив равенство (3) на A^{-1} (слева), получим (единственное) решение системы в следующей матричной форме (в предположении, что она совместима и $x_1, \ldots, x_n$ - ее решение)

$$X = A^{-1}B$$

Где обратная матрица имеет A^{-1} вид :

$$A^{-1} = d^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} A_{21 \ldots} A_{n1} \\ A_{12} A_{22 \ldots} A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} A_{2n \ldots} A_{nn} \end{pmatrix},$$

Другой известный способ можно назвать методом алгебраических дополнений. Его использование предполагает владение понятием алгебраического дополнения A_{ij} как и в матричном способе, теоремой о разложении определителя по столбцу (строке), теоремами о замещении и об аннулировании. Предлагаемый нами новый метод опирается на теорему Коши-Бине об определителе произведения матриц. Суть этого метода можно понять легко, если сначала рассмотрим случай $n = 3$. Очевидно, что при $n = 3$ выполняются следующие матричные равенства (если задана система (1)):

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1a_{12}a_{13} \\ b_2a_{22}a_{23} \\ b_3a_{32}a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1a_{13} \\ a_{21}b_2a_{23} \\ a_{31}b_3a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}b_1 \\ a_{21}a_{22}b_2 \\ a_{31}a_{31}b_3 \end{pmatrix}.$$

Переходя к определителям в этих равенствах и обозначив определители правых частей соответственно через d_1, d_2, d_3, получим формулы Крамера:

$$d \cdot x_1 = d_1,\ d \cdot x_2 = d_2,\ d \cdot x_3 = d_3,\ (d \neq 0)$$

$$x_k = \frac{d_k}{d},\quad k = 1,2,3$$ ***(Правило Крамера)***

Переход к общему случаю Крамеровых систем (1) порядка n ничего по существу не меняет. Просто следует заметить, что матрица X_k с определителем x_k получается из единичной матрицы заменой k-го столбца столбцом неизвестных:

$$X_k = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 \ldots 0\ x_1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 1\ 0 \ldots 0\ x_2\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 0\ 1 \ldots 0\ x_3\ 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ x_k\ 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0 \ldots 0\ x_n\ 0 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь из n равенств

$$AX_k = D_k,\ k = \overline{1,n}$$

Где D_k - матрица, получающаяся заменой k - го столбца матрицы A столбцом свободных членов системы (1), причем к формулам Крамера, взяв определители от обеих частей в каждом равенстве:

$$d \cdot x_k = d_k$$ откуда ввиду $d \neq 0$ имеем

$$X_k = \frac{d_k}{d},\ \ k = \overline{1,n}$$

Другой, еще более короткий способ отыскания решения системы (1) состоит в следующем (по-прежнему $d \neq 0$): пусть система (1) совместна и числа $x_1, ..., x_n$ (после переобозначений) образуют ее решение. Тогда при $1 \leq k \leq n$ имеем, используя два линейных свойства определителя:

$$x_k = \frac{x_k \cdot d}{d} = \frac{d_k}{d}, \qquad k = 1,2,...n.$$

Можно начать и с определителя d_k, в котором вместо свободных членов в k-м столбце подставлены их выражения согласно (1); используя соответствующие свойства определителя, получим:

$$d_k = d \cdot x_k \quad d \neq 0$$

откуда и получаются формулы Крамера.