

Презентация по математике

На тему: Правила Крамера

$$x_k = \frac{d_k}{d},$$

$$k = 1, 2, 3$$

В литературе известны разные способы решения Крамеровской системы линейных алгебраических уравнений. Один из них – матричный способ – состоит в следующем. Пусть дана Крамерова система, т.е. квадратная система линейных уравнений с неизвестными

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\} \quad (1)$$

Определитель которой отличен от нуля:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

Систему (1) можно представить в виде одного матричного уравнения

$$AX = B \quad (3)$$

где A - матрица коэффициентов при неизвестных системы (1),

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ - столбец (Матрица-столбец) неизвестных}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ - столбец свободных членов системы (1)}$$

Так как $\det A = d \neq 0$, то матрица A невырожденная и для нее существует обратная матрица A^{-1} . Умножив равенство (3) на A^{-1} (слева), получим (единственное) решение системы в следующей матричной форме (в предположении, что она совместима и X_1, \dots, X_n - ее решение)

$$X = A^{-1}B$$

Где обратная матрица имеет A^{-1} вид :

$$A^{-1} = d^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

Другой известный способ можно назвать методом алгебраических дополнений. Его использование предполагает владение понятием алгебраического дополнения A_{ij} как и в матричном способе, теоремой о разложении определителя по столбцу (строке), теоремами о замещении и об аннулировании. Предлагаемый нами новый метод опирается на теорему Коши-Бине об определителе произведения матриц. Суть этого метода можно понять легко, если сначала рассмотрим случай $n = 3$. Очевидно, что при $n = 3$ выполняются следующие матричные равенства (если задана система (1)):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{31} b_3 \end{pmatrix}.$$

Переходя к определителям в этих равенствах и обозначив определители правых частей соответственно через d_1, d_2, d_3 , получим формулы Крамера:

$$d \cdot x_1 = d_1, d \cdot x_2 = d_2, d \cdot x_3 = d_3, (d \neq 0)$$

$$x_k = \frac{d_k}{d}, \quad k = 1, 2, 3 \text{ (Правило Крамера)}$$

Переход к общему случаю Крамеровых систем (1) порядка n ничего по существу не меняет. Просто следует заметить, что матрица X_k с определителем X_k получается из единичной матрицы заменой k -го столбца столбцом неизвестных:

$$X_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 & x_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 & x_2 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 & x_3 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & x_k & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & x_n & 0 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь из n равенств

$$AX_k = D_k, k = \overline{1, n}$$

Где D_k - матрица, получающаяся заменой k -го столбца матрицы A столбцом свободных членов системы (1), причем к формулам Крамера, взяв определители от обеих частей в каждом равенстве:

$$d \cdot x_k = d_k \text{ откуда ввиду } d \neq 0 \text{ имеем}$$

$$x_k = \frac{d_k}{d}, k = \overline{1, n}$$

Другой, еще более короткий способ отыскания решения системы (1) состоит в следующем (по-прежнему $d \neq 0$): пусть система (1) совместна и числа x_1, \dots, x_n (после переобозначений) образуют ее решение. Тогда при $1 \leq k \leq n$ имеем, используя два линейных свойства определителя:

$$X_k = \frac{x_k \cdot d}{d} = \frac{d_k}{d}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Можно начать и с определителя d_k в котором вместо свободных членов в k -м столбце подставлены их выражения согласно (1); используя соответствующие свойства определителя, получим:

$$d_k = d \cdot x_k \quad d \neq 0 \quad \text{откуда и получаются формулы Крамера.}$$