



*Математическая
логика
Формы мышления*

Связь логики и вычислительной техники

Логика является теоретической основой современных ЭВМ и сложных управляющих систем. Используя методы и средства логической науки, ученые разрабатывают эффективные языки программирования.

Особое значение логическая наука стала приобретать в вопросах, касающихся проблемы *искусственного интеллекта*. Именно здесь разработчикам пришлось создать новую область логических исследований – *логический анализ*.

Связь логики и вычислительной техники

Внутри машины все числа (а так же информация другого рода: буквы, знаки и др.) представлена в виде двоичных кодов. При выполнении программы арифметическо-логическое устройство (АЛУ) производит различные операции над двоичными числами, выдавая результаты также в виде двоичных чисел. Поэтому АЛУ можно рассматривать как сложный функциональный преобразователь, на вход которого поступают исходные двоичные числа, а на выходе выдаётся новое двоичное число, являющееся той или иной функцией от входных чисел.

Логика.

Запишите определение логики:

- **Опр: Логика – (*logos* (др. гр.) – слово, мысль, понятие, закон, рассуждение) – наука о законах и формах мышления.**

Основоположник – Аристотель (384-322гг до н.э). Рассмотрел мышление со стороны строения, структуры, т.е. с формальной стороны. Так возникла формальная логика.

Логика.

Формальная логика – наука, пытавшаяся найти ответ на вопрос, как мы рассуждаем, изучающая логические операции и правила мышления.

Основоположник математической логики – нем. математик, философ Вильгельм Лейбниц (XVII в.). Первый пытался построить логические исчисления: арифметические и буквенно-алгебраические; высказал мысль о возможности применения двоичной СС в вычислительной математике.

Дальнейшее развитие его идеи получили лишь в XIX в. В трудах математика Джорджа Буля, отца писательницы Э. Войнич. Он вывел для логических построений особую алгебру – алгебру логики.

- **Опр:** Раздел математики, занимающийся исследованием логических функций, называется **алгеброй логики**.

Вильгельм Готфрид Лейбниц

- **Вильгельм Готфрид Лейбниц** родился в 1646 году в семье философа, профессора университета в городе Лейпциге. Став взрослым и получив университетское образование, Лейбниц поступил на дипломатическую службу. Поездки в Париж и Лондон дали ему возможность ознакомиться с идеями великих математиков Франции и Англии. В 1676 году Лейбниц завязал переписку с Ньютоном. К сожалению, она продолжалась только год и не привела к объединению усилий.

- Научное соперничество и взаимная неприязнь Ньютона и Лейбница породили вопрос, который много лет волновал историков и политиков: кто же все-таки был первооткрывателем? Вероятно, Ньютон придумал основные понятия дифференциального и интегрального исчисления чуть раньше - зато Лейбниц первым опубликовал свои результаты, и к тому же применил более удобную, чем у Ньютона, систему обозначений. Эти обозначения математики используют уже более трёхсот лет.



Аристотель

АРИСТОТЕЛЬ (ок. 384–322 до н.э.), древнегреческий философ и педагог, родился в Стагире в 384 или 383 до н.э., умер в Халкиде в 322 до н.э. Почти двадцать лет Аристотель учился в Академии Платона и, по-видимому, какое-то время там преподавал.



Аристотель регулярно читал своим ученикам и помощникам лекции по самым разнообразным предметам.

Труды Аристотеля можно разделить по следующим группам:

Во-первых, это труды по логике, обычно собирательно именуемые Органон. Сюда входят Категории; Об истолковании; Первая аналитика и Вторая аналитика; Топика.

Во-вторых, Аристотелю принадлежат естественнонаучные труды. В-третьих, мы располагаем сводом текстов под названием Метафизика, представляющим собой цикл лекций. В-четвертых, имеются труды по этике и политике.

Философия Аристотеля. Аристотель нигде не говорит, что логика является частью собственно философии. Он воспринимает ее скорее в качестве методологического инструмента всех наук и философии, а не самостоятельного философского учения. Понятно, что логика должна предшествовать философии.



Джордж Буль

Родился в семье рабочего. Первые уроки математики получил у отца. Хотя мальчик посещал местную школу, его можно считать самоучкой. В 12 лет знал латынь, затем овладел греческим, французским, немецким и итальянским языками. В 16 лет уже преподавал в деревенской школе, а в 20 открыл собственную школу в Линкольне.



В 1854 году опубликовал работу «Исследование законов мышления, базирующихся на математической логике и теории вероятностей». Работы 1847 и 1854 годов положили начало алгебре логики, или булевой алгебре. Буль первым показал, что существует аналогия между алгебраическими и логическими действиями, так как и те, и другие предполагают лишь два варианта ответов – истина или ложь, нуль или единица. Он придумал систему обозначений и правил, пользуясь которыми можно было закодировать любые высказывания, а затем манипулировать ими как обычными числами. Булева алгебра располагала тремя основными операциями – И, ИЛИ, НЕ, которые позволяли производить сложение, вычитание, умножение, деление и сравнение символов и чисел. Таким образом, Булю удалось подробно описать двоичную систему счисления. В своей работе «Законы мышления» (1854 г.) Буль окончательно сформулировал основы математической логики. Он также попытался сформулировать общий метод вероятностей, с помощью которого из заданной системы вероятных событий можно было бы определить вероятность последующего события, логически связанного с ними.



Логика.

- **Главная задача логики - выявить, какие способы рассуждения правильные, а какие нет; описать и исследовать те способы рассуждений, которые являются правильными.**

Пример неправильного рассуждения ...

Основные понятия логики.

Логика рассматривает три различные формы мышления, в которых осуществляется мышление: понятие, суждение, умозаключение.

Запишите определение:

Понятие – мысль, в которой обобщаются и выделяются предметы некоторого класса по определенным, общим и в совокупности специфическим для них признакам.

Основные понятия логики.

Каждая мысль выражается словами в предложении, которые представляют собой различные суждения (высказывания):

Запишите определение:

Суждением (высказыванием) называется всякое утверждение (или всякое предложение), о котором можно судить, истинно оно или ложно. Истинное высказывание обозначается - 1, ложное - 0

«6 - четное число» - это высказывание, т.к. оно истинное.

«Рим - столица Франции» - это тоже высказывание т.к. оно ложное.

Основные понятия логики.

Запишите определение:

- **Умозаключение** – форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (предпосылок, условий) выводится новое суждение (заключение, вывод).

Вывод умозаключений

- **Путь вывода умозаключений лежит через ...**
- **Рассуждение – это цепочка взаимосвязанных суждений, фактов и общих положений по определенным правилам вывода.**

Основные понятия логики.

- **Примеры:**
 1. Параллелограмм – это 4-х угольник, у которого противоположные стороны параллельны.
 2. В параллелограмме противоположные углы равны.
 3. Если в 4-х угольнике две стороны параллельны и равны, то этот 4-х угольник – параллелограмм.

Назовите к каким формам мышления относится каждое предложение. В умозаключении назовите условие и заключение. Приведите свои примеры понятия, суждения, умозаключения.

Основные понятия логики.

Но не всякое предложение является высказыванием. Например предложения «ученик десятого класса» и «информатика - интересный предмет» не являются высказываниями.

Первое предложение ничего не утверждает об ученике.

Второе использует слишком неопределенное понятие «интересный предмет».

Основные понятия логики.

Высказываниями не являются:

1. Предложения, содержащие переменные,

так как нам не известно, какое значение принимает переменная и, соответственно, неизвестно будет истинным это предложение или ложным.

2. Восклицательные и вопросительные предложения,

это не повествовательные предложения.

3. Определения.

мы не можем судить о том истинно такое предложение или ложно, ведь определение – это мы что-то так назвали и расшифровали, что это такое. Кто-то может сказать, что это не так и придумать своё определение.

Основные понятия логики.

- Предложения типа «в городе А более миллиона жителей», «у него голубые глаза» не являются высказываниями, так как для выяснения их истинности или ложности нужны дополнительные сведения, о каком конкретно городе или человеке идет речь.
- Такие предложения называются *высказывательными формами*.
- Высказывательная форма - это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

Основные понятия логики.

Рассмотрим **примеры**:

1. $50 \cdot 4$ (не является высказыванием – нельзя сказать 1 или 0)
2. $50 = 42 + 8$ (высказывание, 1)
3. Я сижу за компьютером (высказывание, 1)
4. В атаку! (не является высказыванием - восклицательное)
5. $5x - 6 = 9$ (не является высказыванием – есть переменная)
6. $9 > 12$ (высказывание, 0)
7. $x < 43$ (не является высказыванием – есть переменная)
8. Здравствуйте (не является высказыванием – нельзя сказать 1 или 0)
9. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат на одной плоскости и не пересекаются (не является высказыванием, так как определение)

Задание 1.

Какие из предложений являются суждениями и каково их значение истинности?

а) «Сижу и смотрю»

б) «Верно ли, что $\pi = 3,1415926\dots?$ »

в) «математическое доказательство»

г) « $z+5=45$ »

д) « $20+30+40+10=100$ »

Задание 2:

Приведите примеры:

- а) истинного и ложного высказываний;**
- б) предложения, не являющегося высказыванием;**
- с) высказывательной формы.**
(запишите в тетрадь)

Задание 3.

- Из представленных суждений получите третье в виде умозаключения:
А = «Сумма цифр трехзначного числа равна 7»
В = «Цифры десятков и единиц одинаковы»

Виды суждений

Частные –
выражают
конкретные
(частные) факты.
Например:
«Луна – спутник
Земли»
« $7 - 2 > 3$ »

Общие –
характеризуют свойства
группы объектов или
явлений.
Например:
«В любом прямоугольном
треугольнике есть прямой
угол»
« $X^2 \geq 0$ »

Виды суждений

Простое суждение

– никакая его часть
не является
суждением
«Париж – столица
России» (простое,
ложное)

Сложные суждения –

Образованы из нескольких
суждений с помощью
определенных способов
соединения суждений.
«Если в 4-х угольнике все
стороны равны, то этот 4-х
угольник является ромбом»

Примеры

Рассмотрим примеры простых и сложных высказываний:

1. На улице хорошая погода (простое)

2. Когда я пойду домой, по дороге куплю хлеб (сложное, состоит из двух простых: «я пойду домой» и «я по дороге куплю хлеб»)

3. Если из двух вычесть пять, то получится восемь (простое: «из двух вычесть пять» и «получится восемь» – сами по себе не являются высказываниями)

4. Если $2+3=5$ - истина, то $5=2+3$ – тоже истина (сложное: « $2+3=5$ - истина» и « $5=2+3$ – тоже истина»).

Задание 4.

- **Укажите, какие из суждений являются частными, а какие общими, укажите значение истинности для каждого суждения:**
 - а) $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$
 - б) «Любой ромб является параллелограммом»
 - в) « $a^3 = a^2$, если $a = 1$ »
 - г) $3^2 + 2^2 = 5^2$
 - д) «Меркурий – спутник Марса»
 - е) «Джордано Бруно – ученик Галилео Галилея»

Задание 5.

- Из сложных суждений выделите простые и обозначьте их буквами:
 - а) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.
 - б) Есть мера вещей и существуют известные границы (афоризм Горация)
 - в) Студент запланировал выполнить следующие дела: подготовиться к зачету, побывать на тренировке, почитать книгу.
 - г) Если завтра будет туман, мы не сможем вылететь на соревнования

Домашнее задание.

- **§ 3.1**
- **Конспект урока.**
- **Примеры:**
 - а) определения, суждения, умозаключения;**
 - б) предложения, не являющегося суждением;**
 - в) частного и общего суждения;**
 - г) простого и сложного суждения.**



Алгебра суждений

Е.А. Тулаева МОУ СОШ №18 г.
Пенза

Повторение

- **Что такое логика, ее главная задача.**
- **Что такое понятие, суждение, умозаключение, рассуждение?**
- **Какие значения могут принимать суждения?**
- **Какие суждения называют частными и общими?**
- **Что такое простое и сложное высказывание?**

Приведите примеры.

Рассмотрим следующие примеры сложных высказываний и связь между простыми высказываниями:

- 1. Если 12 делится на 6 , то делится и на 3 (простые высказывания: « 12 делится на 6 » и « 12 делится на 3 »; связь «если, то»).**
- 2. На улице льёт дождь или светит солнце (простые высказывания: «на улице льёт дождь» и «на улице светит солнце»; связь «или»)**
- 3. Дома отключили свет и воду (простые высказывания: «дома отключили свет» и «дома отключили воду»; связь «и»)**
- 4. Два числа равны тогда и только тогда, когда их разность не равна нулю (простые высказывания: «два числа равны» и «разность двух чисел не равна**

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания «не», «и», «или», «если ..., то», «тогда и только тогда» и другие позволяют из уже заданных высказываний строить сложные высказывания.

Такие слова и словосочетания называются логическими связками.

Иначе они называются ...

Основные логические операции

- I. Инверсия.
- II. Конъюнкция.
- III. Дизъюнкция.
- IV. Строгая дизъюнкция.
- V. Импликация
- VI. Эквивалентность.

ИНВЕРСИЯ

Логическое отрицание

1) НЕ

2) НЕВЕРНО, ЧТО

Таблица истинности

A	\bar{A}
0	1
1	0

Обозначение: \bar{A} , not
A.

Пример:

A - Дождя не будет

\bar{A} - Неверно, что
дождя не будет

Задание 2:

Приведите пример высказывания и его отрицания.

Определите истинность каждого.

КОНЪЮНКЦИЯ

Логическое умножение

И

Таблица истинности:

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Обозначения: &, and,
Λ, •.

Пример:

A - Дождя не будет.

B - Небо голубое.

**A&B - Дождя не
будет и небо
голубое.**

Задание 3:

- а) Приведите примеры двух высказываний и получите составное высказывание используя логическую связку «И».**
- б) Определите истинность или ложность каждого из трех высказываний**

ДИЗЪЮНКЦИЯ

Логическое сложение

ИЛИ

Обозначения: OR, \vee , +

Таблица истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пример:

A - Дождя не будет.

B - Небо голубое.

$A \vee B$ - Дождя не будет или небо голубое.

Задание 4:

- а) Приведите примеры двух высказываний и получите составное высказывание используя связку «ИЛИ».***
- б) Определите истинность или ложность каждого из трех высказываний.***

Порядок выполнения логических операций:

1. НЕ.
2. И
3. ИЛИ
4. Если есть скобки, то сначала выполняются действия в скобках

Пример. Составьте таблицу ИСТИННОСТИ.

- $X = (A \& \bar{B}) \vee (\bar{A} \& B)$

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$A \& \bar{B}$	$\bar{A} \& B$	X
0	0	1				
0	1	1				
1	0	0				
1	1	0				

Пример. Составьте таблицу ИСТИННОСТИ.

● $X = (A \& B \vee C) \vee (A \& \overline{C})$

A	B	C						
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
1	0	0						
1	1	0						
1	0	1						
0	1	1						
1	1	1						

Самостоятельно.

- **Составьте свое выражение, состоящее из 2 или 3 высказываний, с использованием всех рассмотренных логических операций.**

Итог:

- **Вы познакомились с основными понятиями алгебры логики.**
- **Рассмотрели элементарные логические операции.**
- **Разобрали для каждой логической операции таблицу истинности.**

Домашнее задание

- § 3.2
- № 3.1.



Алгебра суждений

Продолжение (2 урок)

СТРОГАЯ ДИЗЪЮНКЦИЯ

ЛИБО, ЛИБО

Обозначения: XOR

Таблица истинности:

A	B	$A_{xor}B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример:

A - Дождя не будет.

B - Небо голубое.

A xor B - Либо
дождя не будет,
либо небо
голубое.

Задание 5:

- а) Приведите примеры двух высказываний и получите составное высказывание используя связку «ЛИБО, ЛИБО».***
- б) Определите истинность или ложность каждого из трех высказываний***

ИМПЛИКАЦИЯ

Условная связь

ЕСЛИ, ТО

Обозначения: \rightarrow

Таблица истинности:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример:

A - Дождя не будет.

B - Небо голубое.

$A \rightarrow B$ - Если дождя не будет, то небо голубое.

Задание 6:

- а) Приведите примеры двух высказываний и получите составное высказывание используя связку «ЕСЛИ, ТО...».*
- б) Определите истинность или ложность каждого из трех высказываний*

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

- 1) Если и только если
- 2) Тогда и только тогда, когда

Таблица истинности:

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Обозначения: \leftrightarrow

Пример:

A - Дождя не будет.

B - Небо голубое.

$A \leftrightarrow B$ - Дождя не будет тогда и только тогда, когда небо голубое.

Задание 7:

- а) Приведите примеры двух высказываний и получите составное высказывание используя связку.***
- б) Определите истинность или ложность каждого из трех высказываний***