

**Научно-исследовательская работа
по теме «Класс элементарных функций и их графики»**

Иовлева Максима Николаевича, учащегося 9 класса РМОУ Радужская ООШ.

Руководитель Крючкова Татьяна Борисовна учитель, математики ■

Оглавление:

- **Оглавление**
- 1. Введение.
- 2. Из истории развития функции
- 3. Способы задания функции
- 4. Класс элементарных функций.
- 4.1. Основные элементарные функции.
- 4.2. Построение графиков
- 5. Преобразование исходного графика функции $y=f(x)$.
- 6. Заключение 7.
- Список литературы

Введение.

Математика, давно став языком науки и техники, в настоящее время все шире проникает в повседневную жизнь и обиходный язык, все более внедряется в традиционно далекие от нее области.

- Как образно заметил великий Галилео Галилей (1564 – 1642 гг.), книга природы написана на математическом языке, и ее буквы – математические знаки и геометрические фигуры, без них невозможно понять ее слова, без них тщетно блуждание в бесконечном лабиринте.
- И именно функция является тем средством математического языка, которое позволяет описывать процессы движения, изменения, присущие природе.
- **Изучая квадратичную функцию в 9 классе, мы выполняли преобразования графика этой функции. В результате этих преобразований построение графика выполнялось легко и просто. И я задумался: «А нельзя ли выполнять аналогичные преобразования с графиками других функций, например линейной функции, обратной пропорциональности, степенной функции?».**
- Поэтому я выбрал тему своей работы

«Класс элементарных функций и их графики»,

поставив перед собой цель:

понять и изучить способы образования элементарных функций и преобразования их графиков.

Из истории развития функции.

Впервые функция вошла в математику под именем «переменная величина» в знаменитом труде французского математика и философа Р. Декарта «Геометрия», и её появление послужило, по словам Ф. Энгельса, поворотным пунктом в математике, благодаря чему в неё вошли движение, диалектика. Без переменных величин И.Ньютон не смог бы выразить законы динамики, описывающие процессы механического движение тел – небесных и вполне земных, а современные ученые не могли бы рассчитывать траектории движения космических кораблей и решать бесконечное множество технических проблем нашей эпохи.

Из истории развития функции.

- С развитием науки понятие функции уточнялось и обобщалось. Сейчас оно стало настолько общим, что совпадает с понятием соответствия.
- Таким образом, функцией в общем понимании называется любой закон (правило), по которому каждому объекту из некоторого класса, области определения функции, поставлен в соответствие некоторый объект из другого (или того же) класса – области возможных значений функции.
- Но мы не рассматриваем понятие функции в столь общем понимании, а считаем, что как независимая, так и зависимая переменные – это величины. Таким образом **функцией называется зависимость, связывающая с каждым значением одной переменной величины (аргумента) из некоторой области ее изменения определенное значение другой величины (функции). Если аргумент обозначить через x , значение функции - через y , а саму зависимость – функцию – символом f , то связь между значениями функции и аргументом так: $y=f(x)$.**

Способы задания функций.

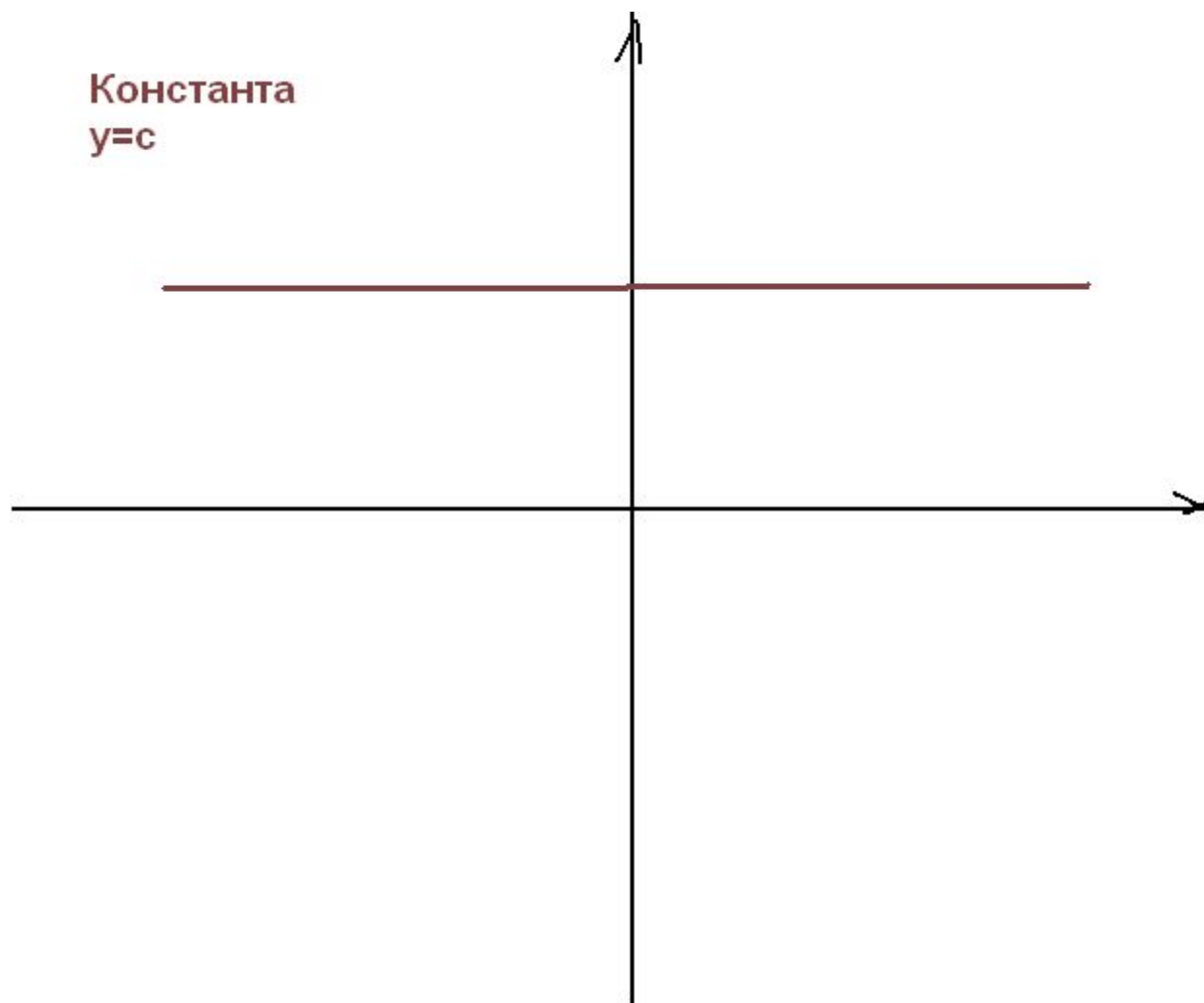
- Существуют три основных способа выражения зависимостей между величинами: табличный, графический и аналитический («формульный»).
- **Табличный** способ важен потому, что является основным при обнаружении реальных зависимостей и может оказаться к тому же единственным средством их задания (формулу не всегда удастся подобрать, а порой в ней и нет необходимости). К табличному заданию функции часто переходят при выполнении практических расчетов, с ней связанных: например, применение таблиц квадратных корней удобно при проведении расчетов, в которых участвуют такие корни.
- С математической точки зрения, табличное задание непрерывных зависимостей всегда неполно и дает лишь информацию о значениях функции в отдельных точках.

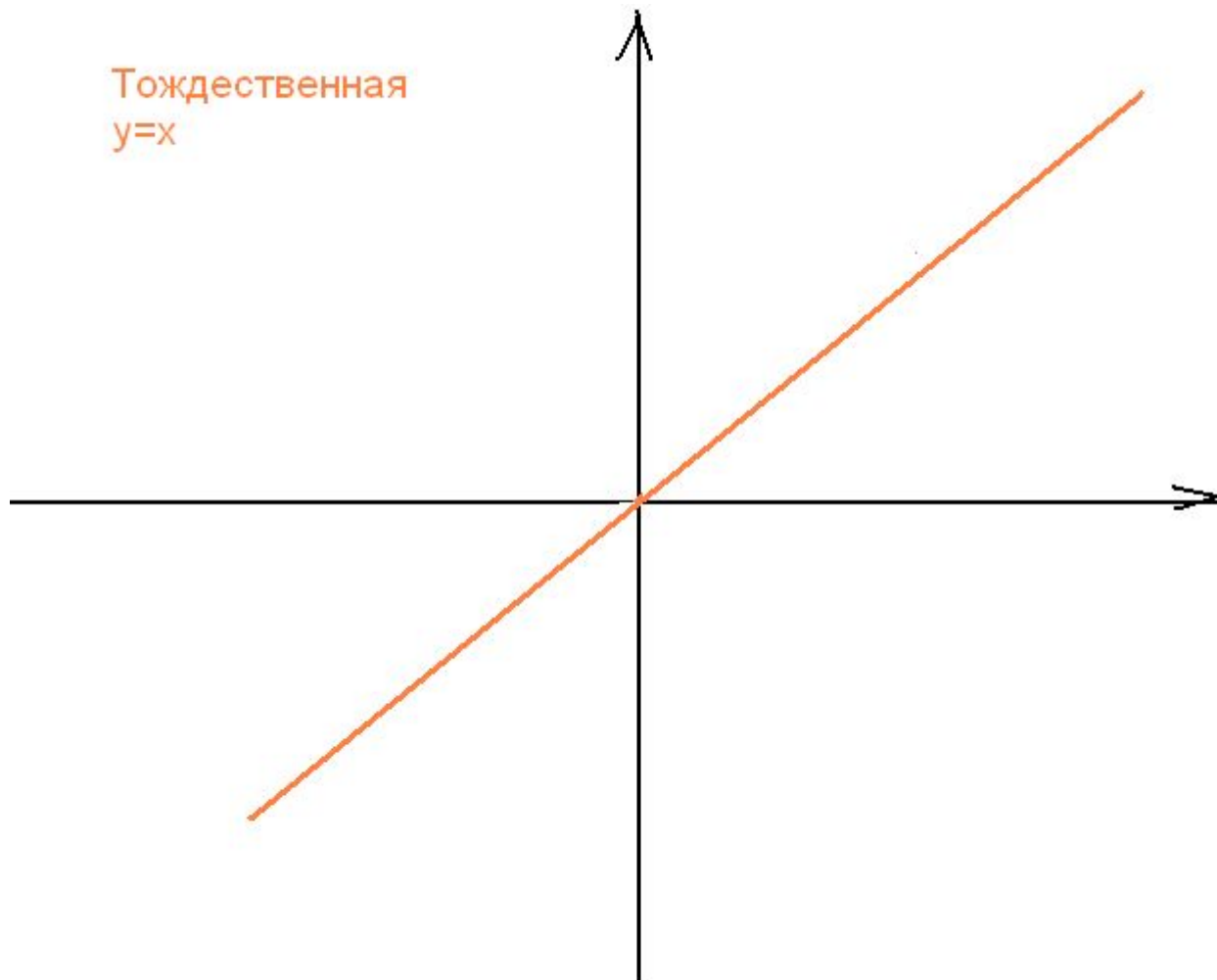
Способы задания функций

- **Графический способ представления зависимостей также является одним из средств их фиксации при изучении реальных явлений. Это позволяет делать различные «самопишущие» приборы, такие, как сейсмограф, электрокардиограф, осциллограф и т.п., изображающие информацию об изменении измеряемых величин в виде графиков. Но если есть график, то значит, определена и соответствующая ему функция. В таких случаях говорят о графическом задании функции.**
- **Однако графический способ задания функции неудобен для расчетов; к тому же, подобно табличному, он является приближенным и неполным.**
- **Аналитическое (формульное) задание функции отличается своей компактностью, легко запоминается и содержит в себе полную информацию о зависимости. Функцию можно задать с помощью формулы, например: $y=2x+5$, $S=at^2/2$, $S=vt$. Эти формулы можно вывести с помощью геометрических или физических рассуждений. Порой формулы получаются в результате обработки эксперимента, такие формулы называются эмпирическими.**

Класс элементарных функции

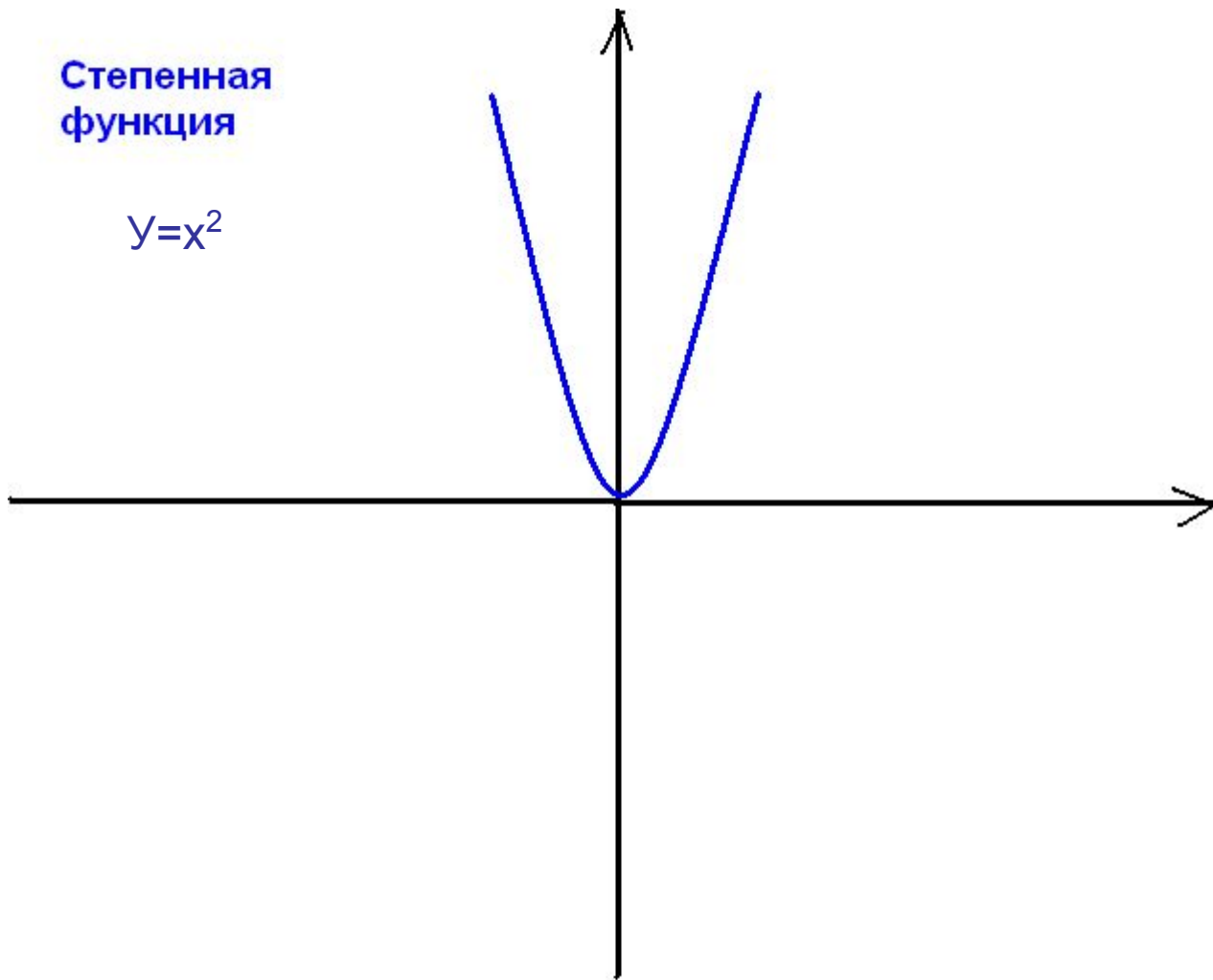
- К элементарным функциям относятся практически все функции, встречающиеся в школьном учебнике.
- Прежде всего, имеется достаточно представительный набор широко известных и хорошо изученных функций, которые называются **основными элементарными функциями**.
- Это функции: $y=C$, называемая **константой**,
- $y=x^a$ - **степенная** (при $a = 1$ получается функция $y=x$, называемая **тождественной**). Графики этих функций прилагаются. (приложение 1-7)
- Имея в распоряжении основные элементарные функции, можно ввести ряд операций, позволяющих комбинировать их между собой как детали для получения более сложных и разнообразных конструкций.
- **Допустимые арифметические действия над функциями.**
- $[+]$ – сложение,
- $[-]$ – вычитание,
- $[*]$ – умножение,
- $[:]$ – деление.
- Все те функции, которые можно получить из основных элементов с помощью арифметических операций называются **элементарными функциями** **составляют класс элементарных функций**.





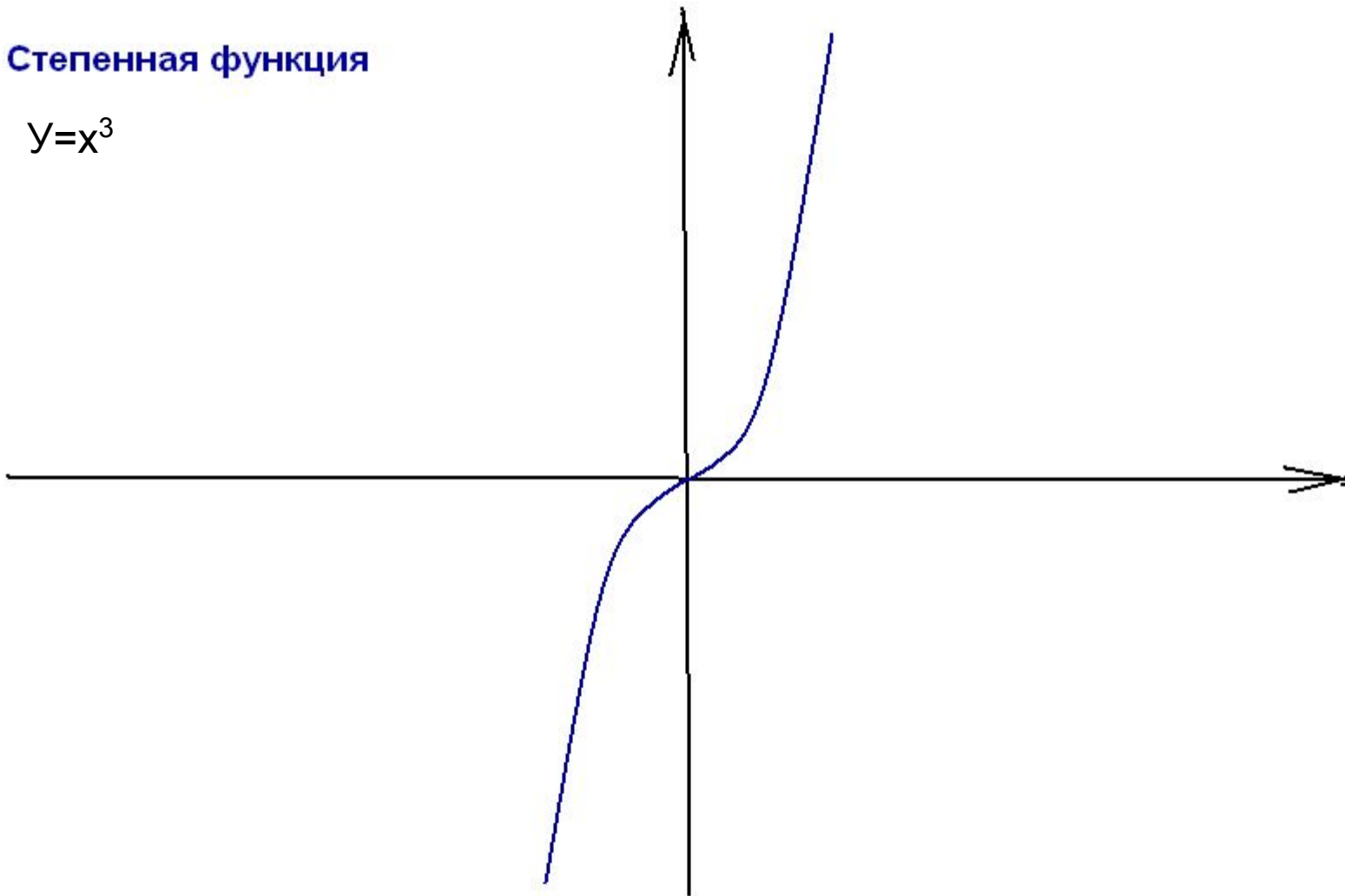
Степенная
функция

$$y=x^2$$



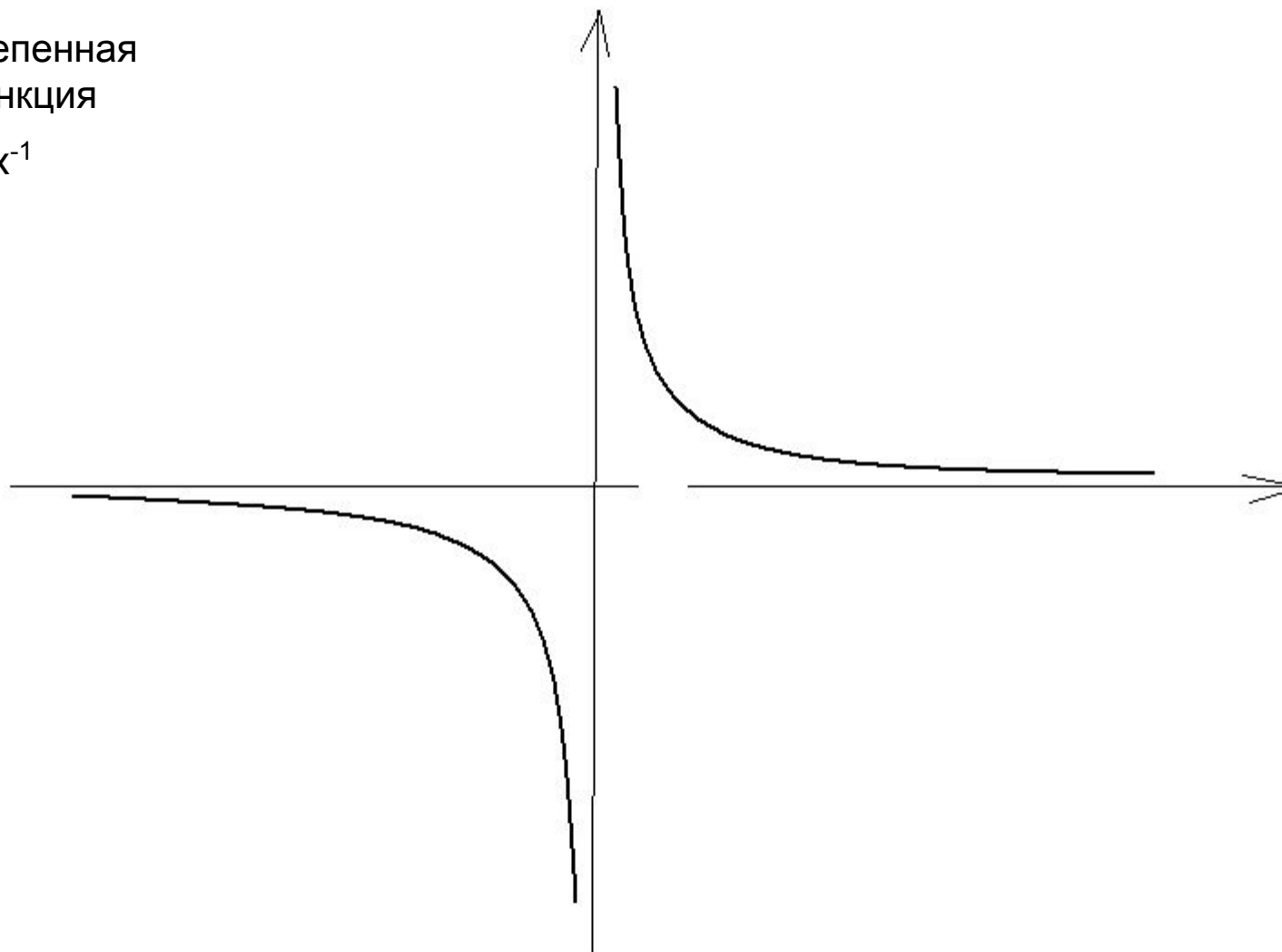
Степенная функция

$$y=x^3$$



Приложение4

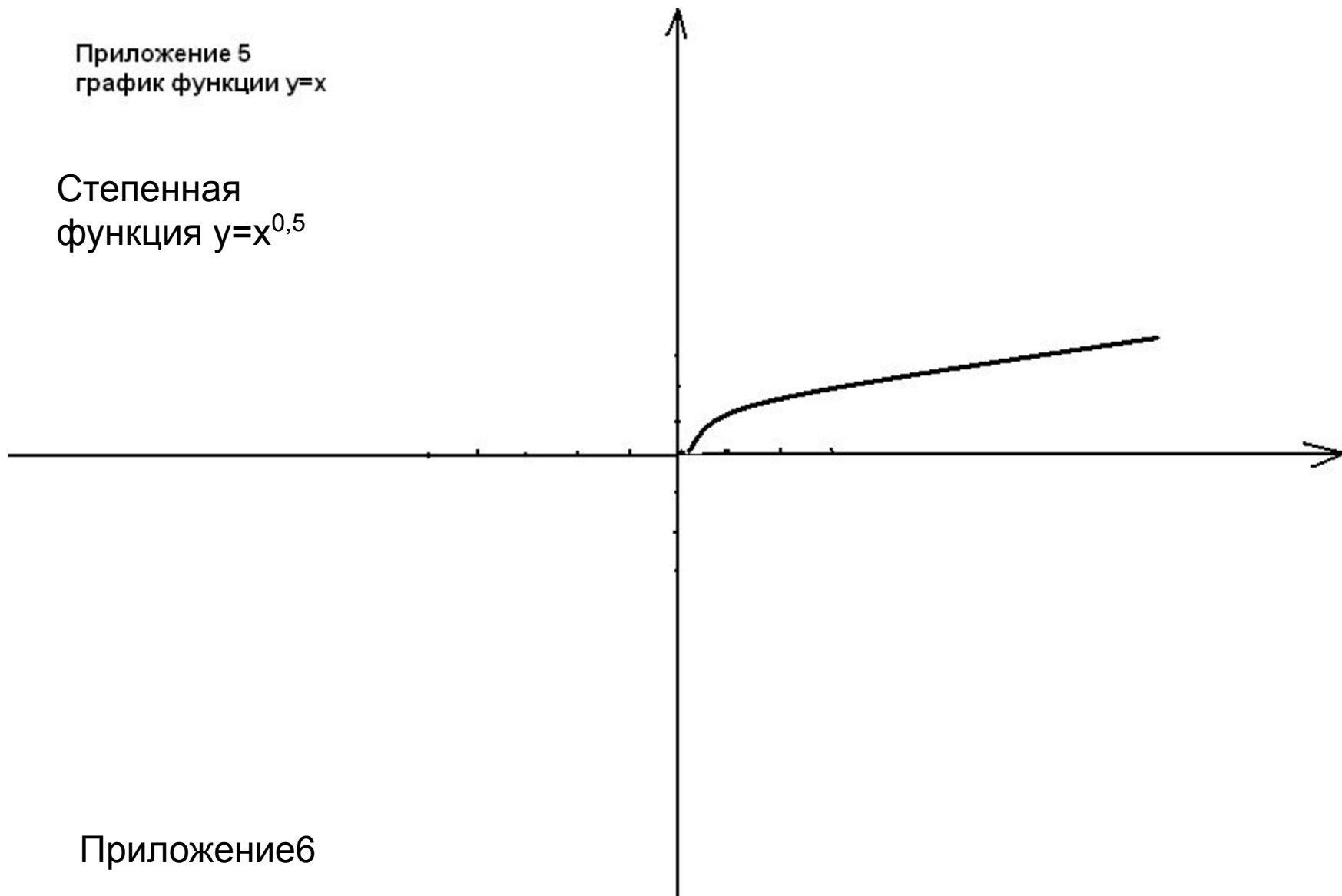
$y=k/x$
Степенная
функция
 $y=x^{-1}$



Приложение 5

Приложение 5
график функции $y=x$

Степенная
функция $y=x^{0,5}$



Приложение 6

Образование класса элементарных функций

- Имея определенный набор базисных функций $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ и допустимых операций F_1, F_2, \dots, F_s над ними (их разрешается применять любое число раз), мы можем получать другие функции, подобно тому, как из деталей конструктора с помощью определенных правил их соединения можно получить разные модели. Класс всех получаемых таким образом функций обозначается так:
- $\langle f_1, f_2, \dots, f_k; F_1, F_2, \dots, F_s \rangle$.

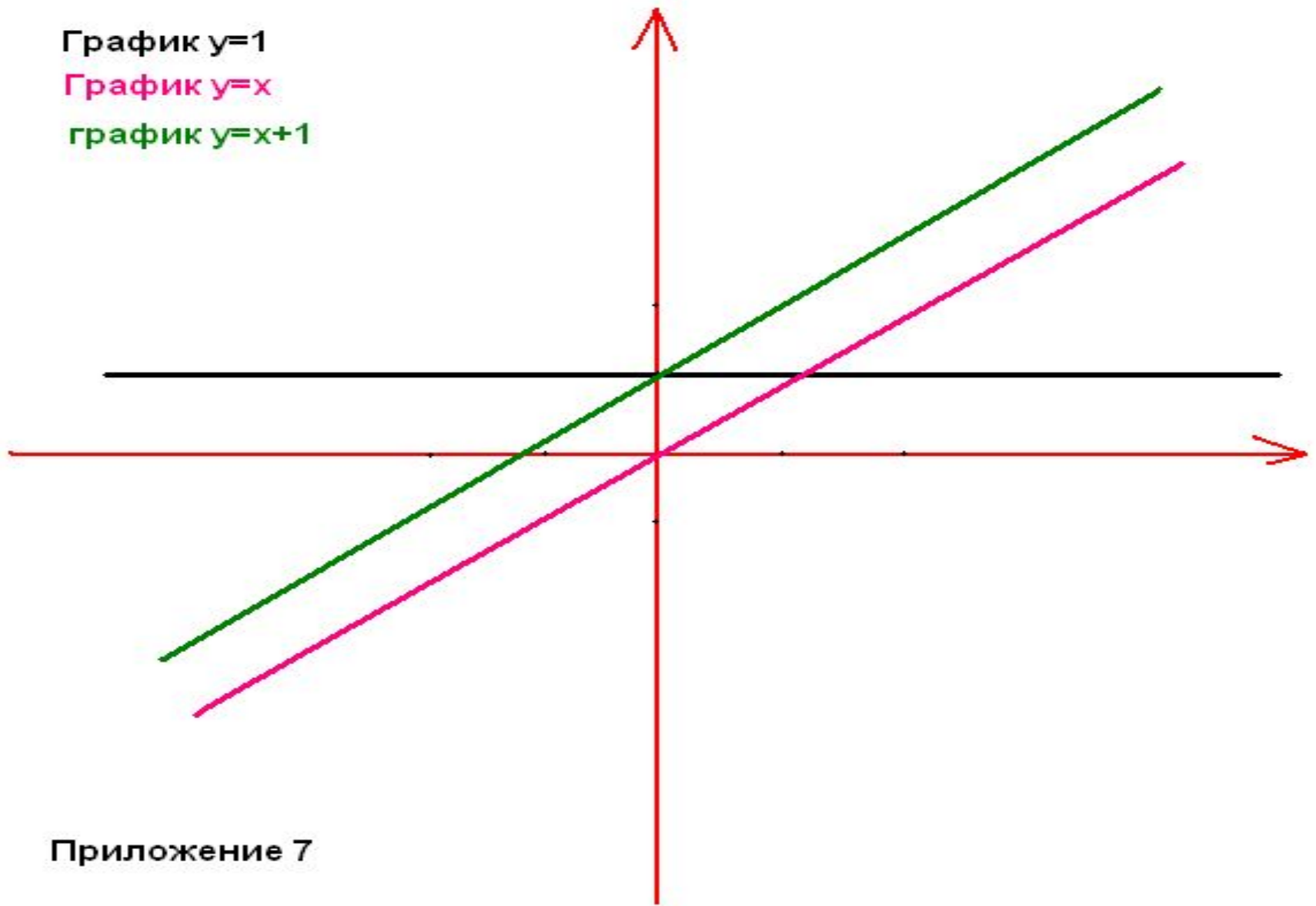
В частности, если принять за базисные все основные элементарные функции и допустить лишь арифметические операции, то получим класс элементарных функций. Беря в качестве базисных часть основных элементарных функций и допуская, возможно, лишь часть указанных операций, получим некоторые подклассы класса элементарных функций, некоторые семейства функций, порождаемые данным базисом и данными операциями. Вот несколько примеров таких семейств функций, где под (a) понимается операция умножения на любую константу:

- $\langle x; (*) \rangle$ - семейство целых положительных степеней $y=x^n$, где $n \in \mathbb{N}$;
- $\langle x, 1; (a), (+) \rangle$ - семейство линейных функций $y= ax+b$;
- $\langle x, (a), (+), (*) \rangle$ - семейство многочленов $y= ax^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$, где $n \in \mathbb{N}$.

Построение графиков

Чтобы построить график функции $y = x + 1$, надо к графику функции $y = x$ прибавить график функции $y = 1$. В результате график функции $y = x$ сдвинется по оси Oy на 1 единицу вверх (приложение 7).

График $y=1$
График $y=x$
график $y=x+1$

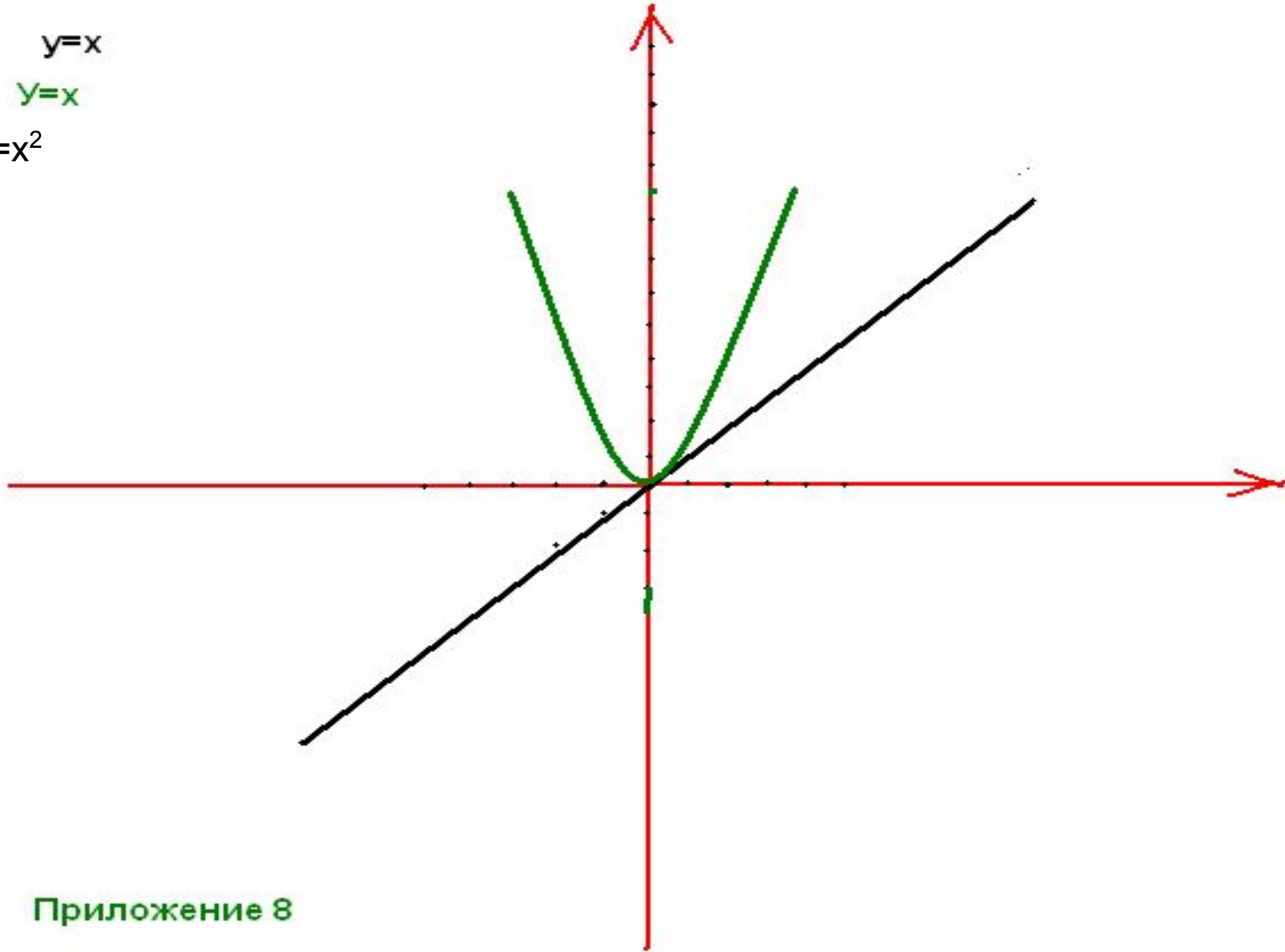


Приложение 7

Построение графиков графика.

Для построения графика функции $y=x^2$ достаточно выполнить действие умножение с графиками двух тождественных функций $y=x$ (приложение 8).

$y=x$
 $y=x$
 $y=x^2$



Приложение 8

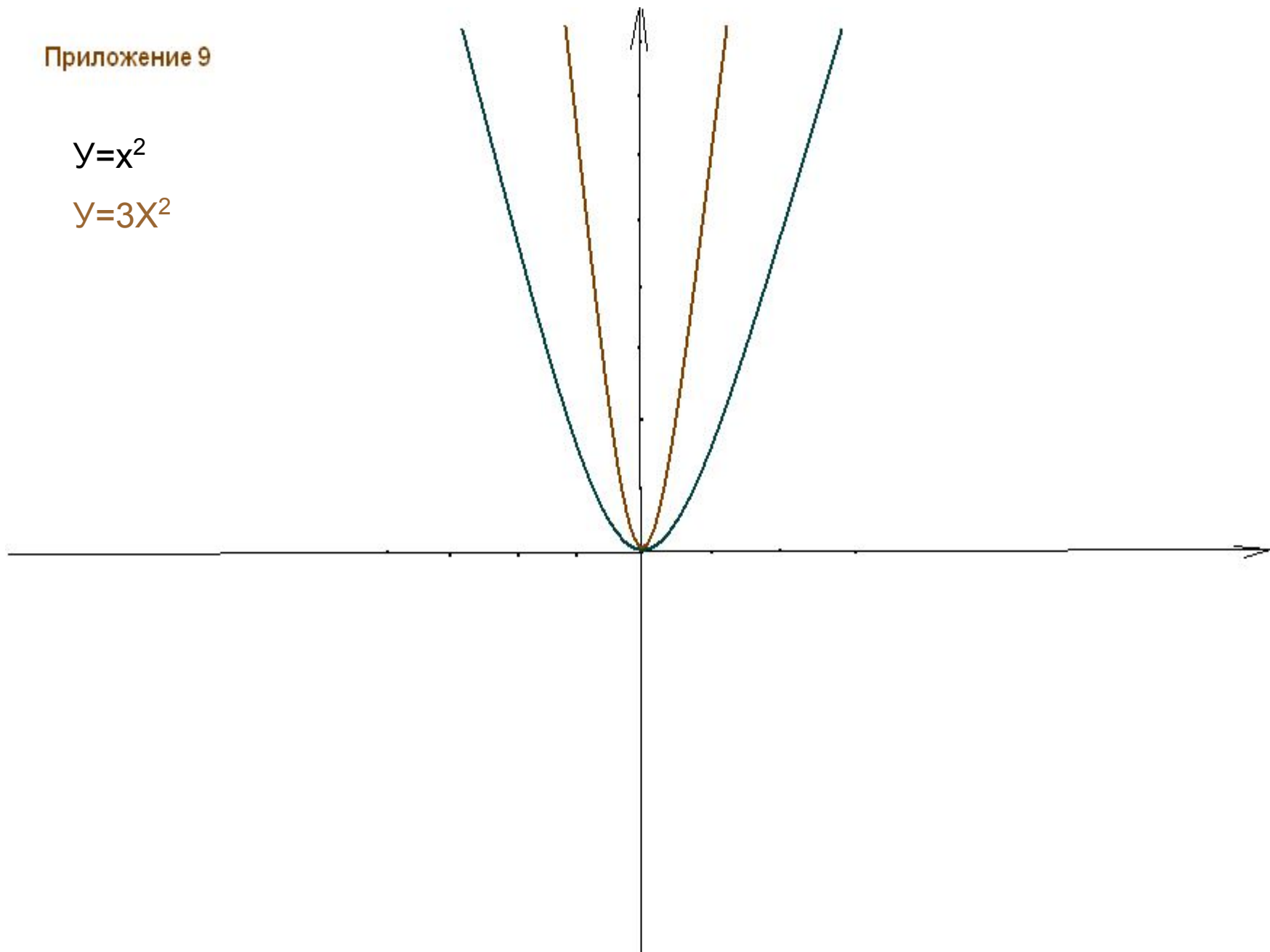
Построение графиков

- Для построения графика функции
- $y = 3x^2$ надо график функции $y = x^2$ умножить на 3. В результате график функции $y = x^2$ растянется в 3 раза вдоль оси ординат, а если $y = 0,3x^2$, то произойдет сжатие графика в 0,3 раза вдоль оси Oy . (приложение 8, 9).

Приложение 9

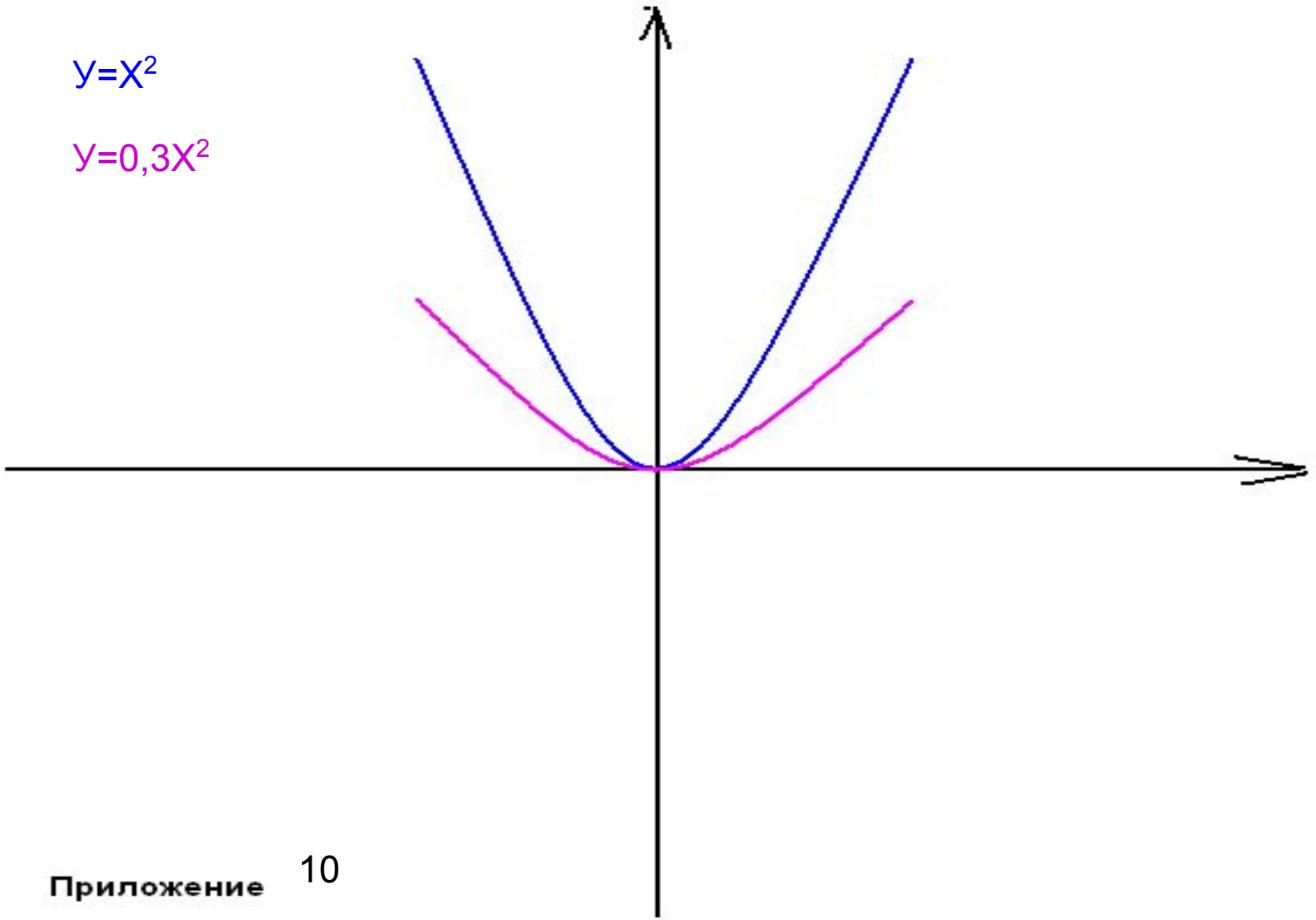
$$y=x^2$$

$$y=3x^2$$



$$y=x^2$$

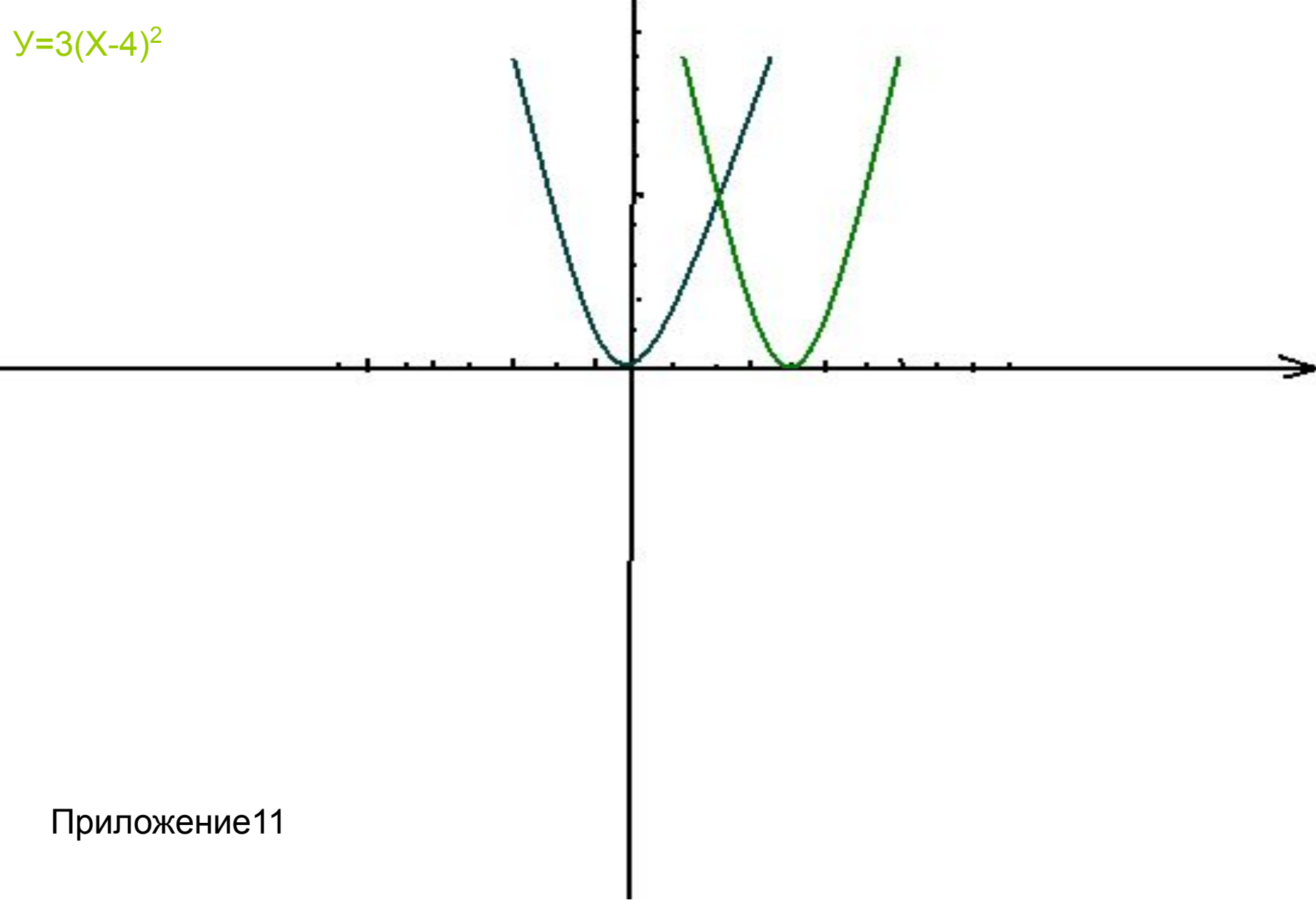
$$y=0,3x^2$$



Построение графиков

- График функции $y=3(x-4)^2$ можно получить, выполнив следующие действия:
- - сложить графики тождественной функции $y=x$ и константы $y=-4$, получим график функции $y=x-4$;
- - перемножить графики функций $y=x-4$ и $y=x-4$, получим график функции $y=(x-4)^2$;
- - умножить $y=(x-4)^2$ на 3, получим график функции $y=3(x-4)^2$.
- Или просто график функции $y=3x^2$ сдвинуть по оси Ox на 4 единичных отрезка (Приложение10).

$$y=3(x-4)^2$$



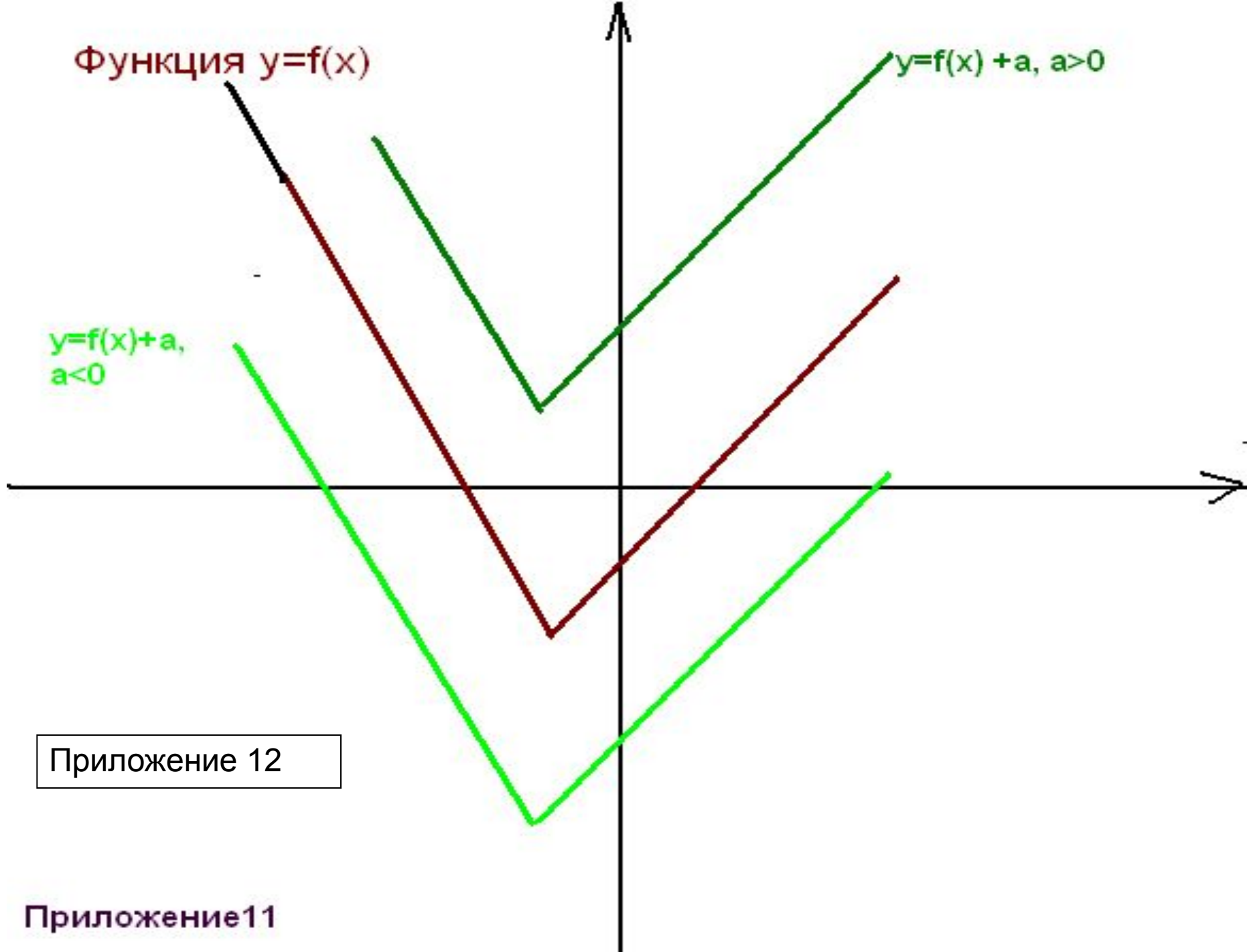
Приложение11

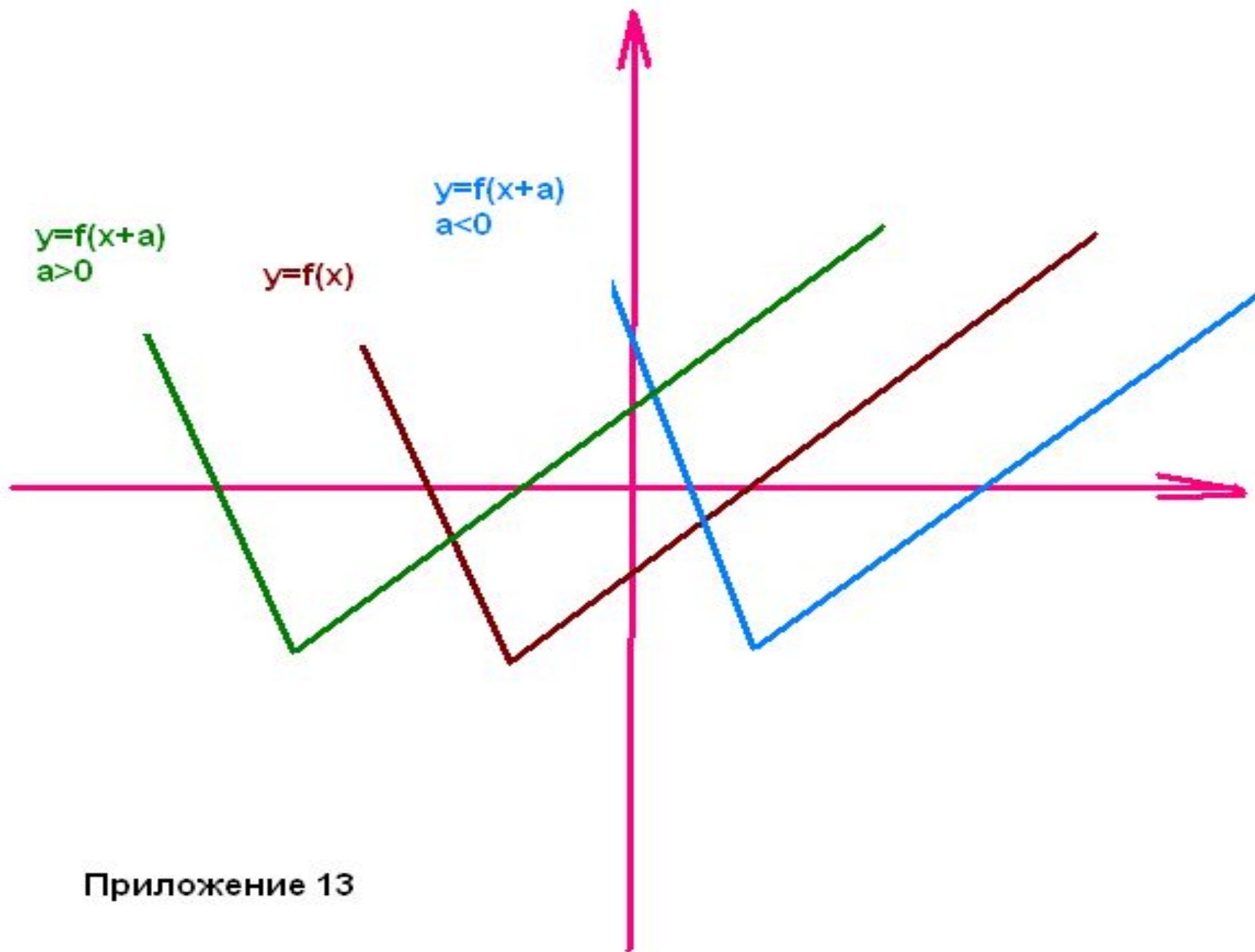
Преобразования исходного графика функции $y = f(x)$.

- Из вышесказанного можно сделать следующий вывод, что выполняя различные действия с графиками элементарных функций, мы выполняем преобразования этих графиков, а именно: параллельный перенос, симметрию относительно прямой Ox и прямой Oy .

Преобразования исходного графика функции $y = f(x)$.

- *Параллельный перенос.*
- а) $y = f(x) + a$ – сдвиг по оси Oy на a единиц вверх, если $a > 0$, или вниз, если $a < 0$;
- б) $y = f(x + a)$ – сдвиг по оси Ox на a единиц влево, если $a > 0$, или вправо, если $a < 0$.
(Приложение 11 и 12)

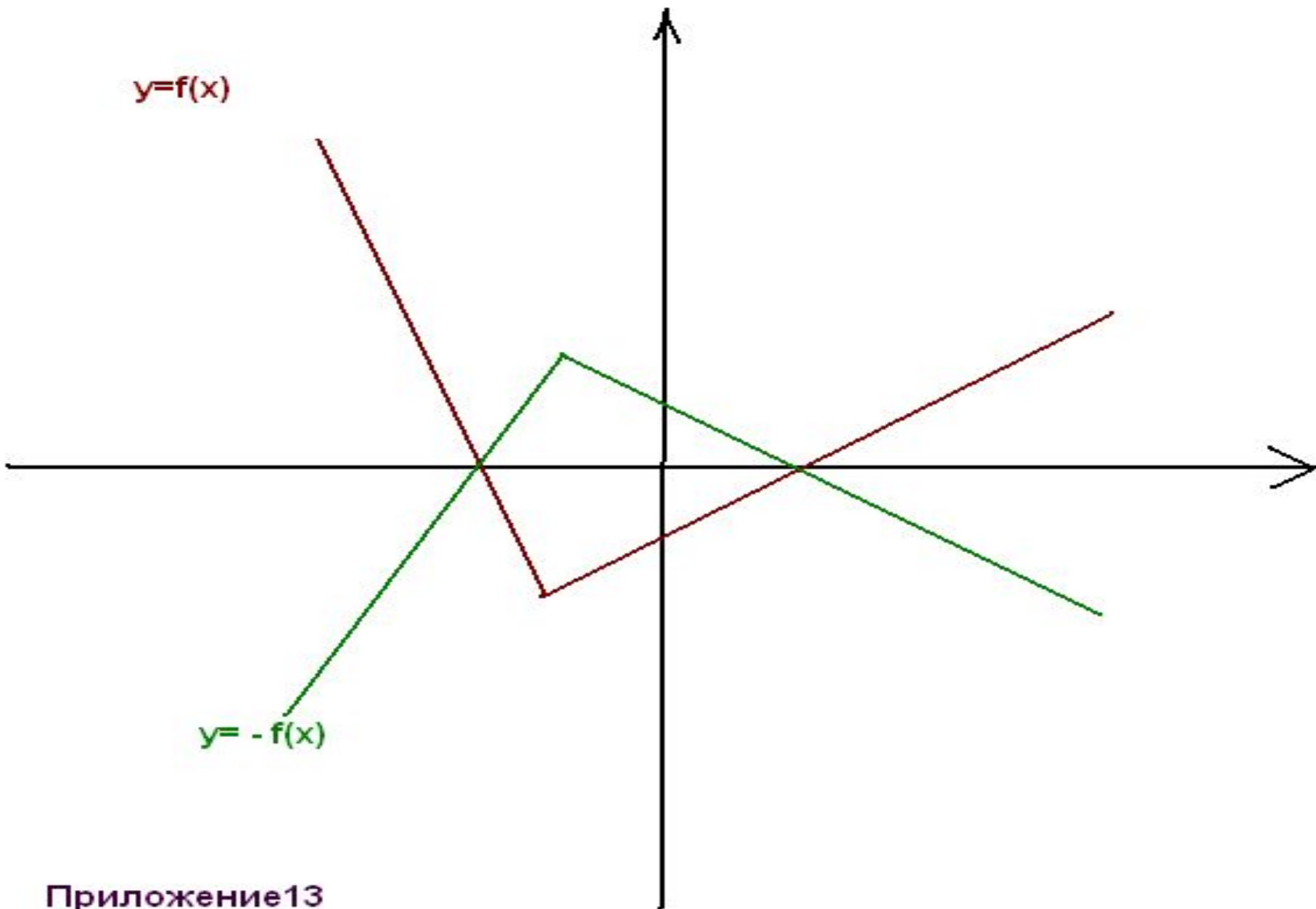




Приложение 13

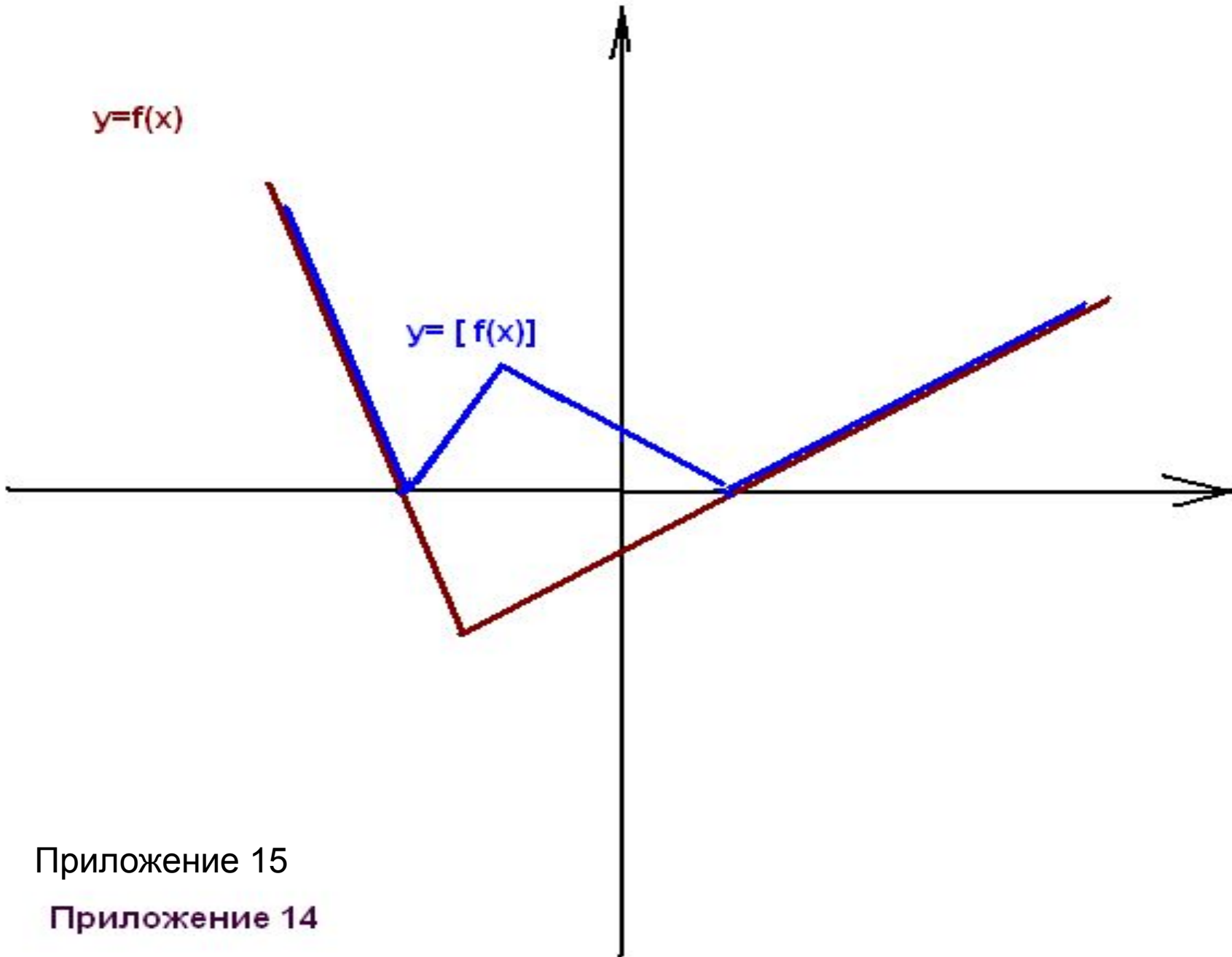
Преобразования исходного графика функции $y = f(x)$.

- ***Симметрия относительно оси Ox .***
- а) $y = -f(x)$ – симметричное отражение графика относительно оси Ox ;
- б) $y = |f(x)|$ - замена частей графика, лежащих ниже Ox , отражением относительно этой оси части, лежащей ниже оси Ox , с сохранением остальных частей графика . (Приложение 13 и 14)



Приложение 13

Приложение 14

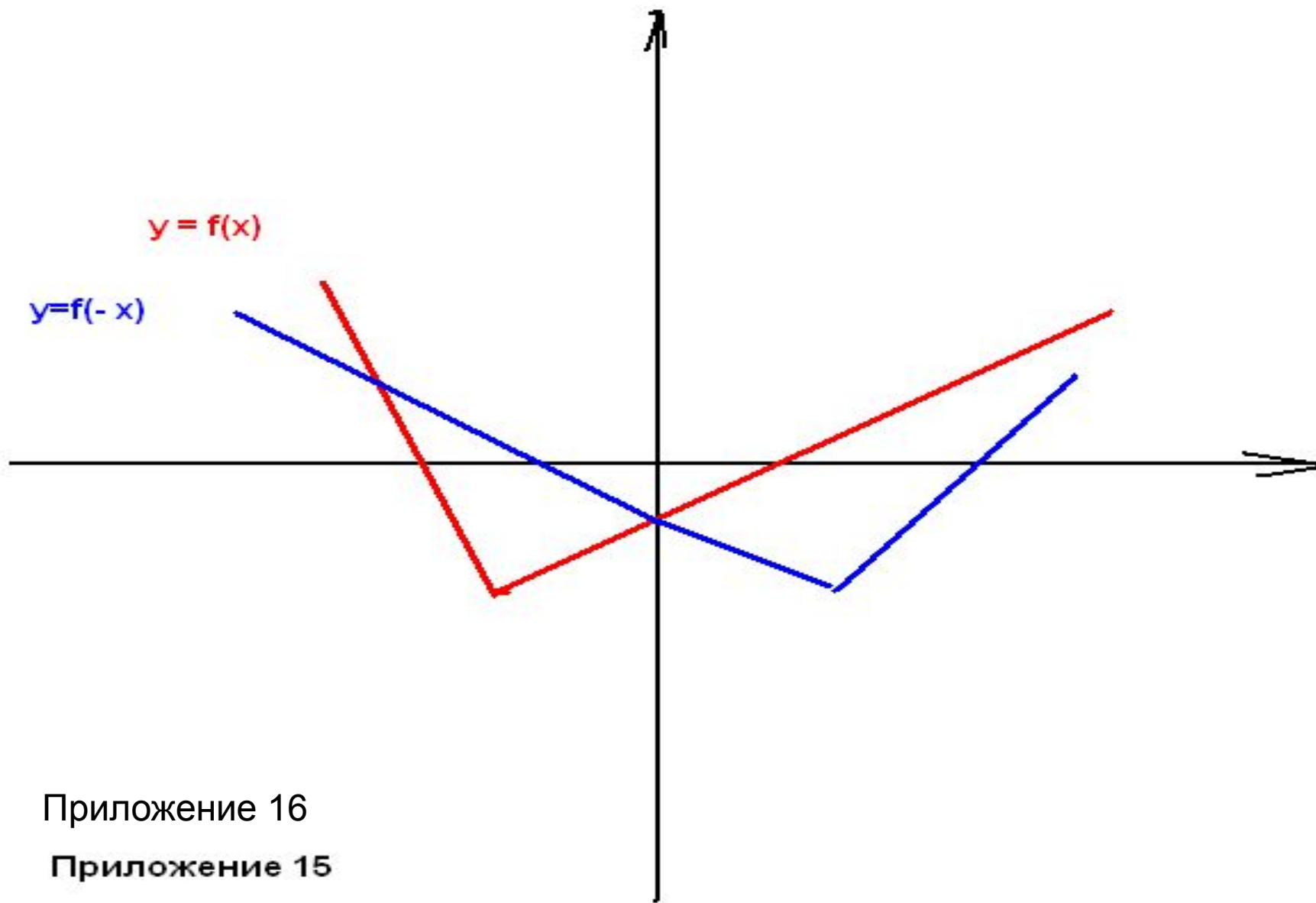


Приложение 15

Приложение 14

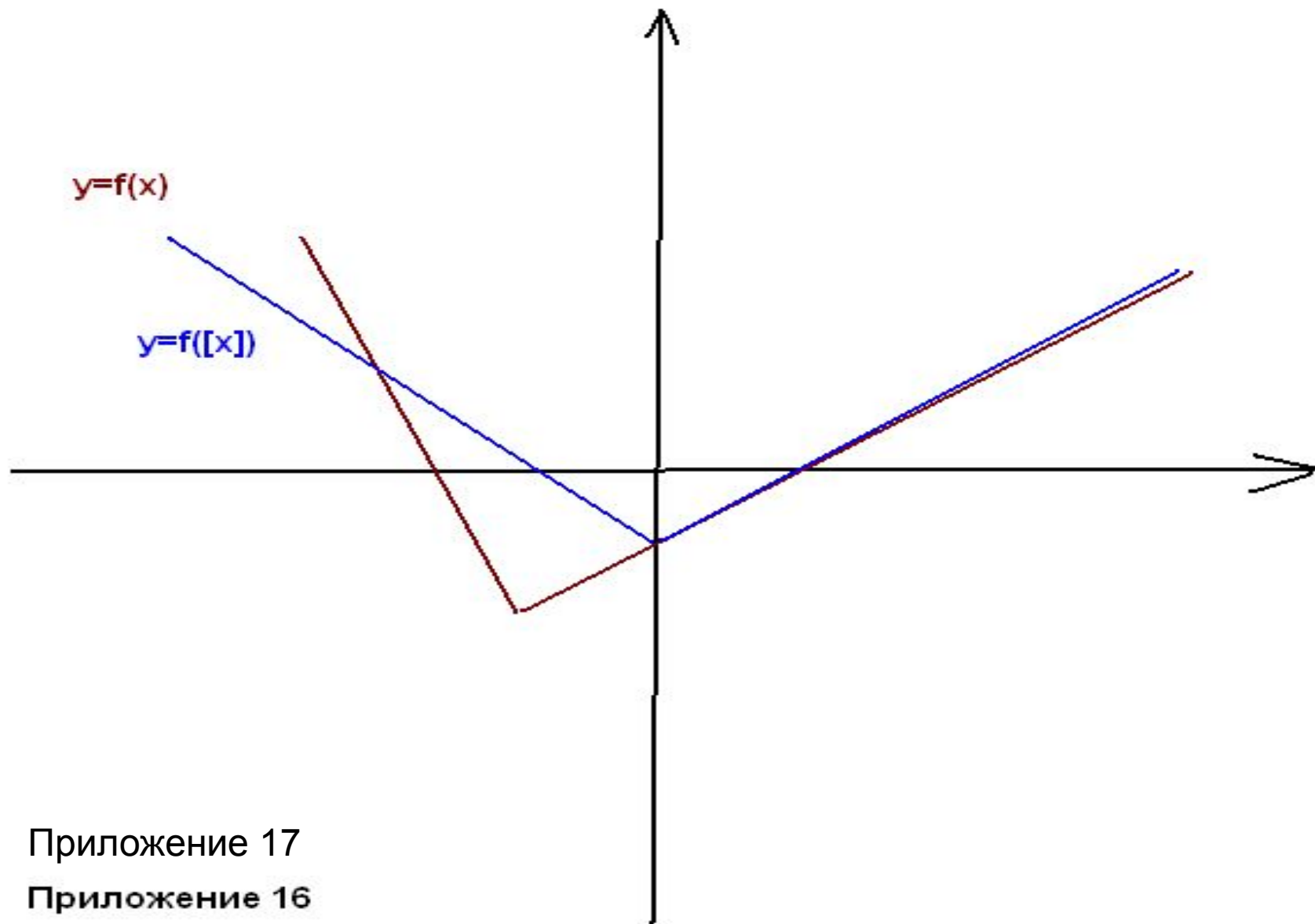
Преобразования исходного графика функции $y = f(x)$.

- ***Симметрия относительно оси Oy .***
- а) $y = f(-x)$ – симметричное отражение графика относительно оси Oy ;
- б) $y = f(|x|)$ – замена части графика, лежащей левее Oy , отражением относительно этой оси части, лежащей правее оси Oy с сохранением правой части графика. (Приложение 15 и 16)



Приложение 16

Приложение 15



Приложение 17
Приложение 16

Заключение.

- Заканчивая свою работу я увидел, что строить графики элементарных функций интересно и просто. А график является портретом функции, поэтому функцию можно назвать поистине красавицей.
- Математика – это набор инструментов, который необходим в познании окружающего мира. И этим инструментом необходимо владеть в совершенстве, чтобы познавать, развивать и изменять нашу жизнь.

Список литературы.

- Н.П. Токарчук «Красавицы функции и их графики».
- В.К.Егоров, Б.А.Радунский, Д.А.Тальский «Методика построения графиков функций».
- Ю.Н.Макрычев, Н.Г.Миндюк, К.И.Нешков, С.Б.Севорова «Учебник алгебры».