

# Тема: Полная и неполная индукция.

## Метод математической индукции.

### Цели:

#### Образовательные:

- изучить метод математической индукции;
- научить применять метод математической индукции при решении задач.

#### Развивающие:

- содействовать развитию у учащихся мыслительных операций: умение анализировать, синтезировать, сравнивать;
- формировать и развивать общеучебные умения и навыки.

#### Воспитательные:

- воспитывать внимательность, аккуратность, инициативность, трудолюбие.

## **Дедуктивный и индуктивный метод**

В основе всякого математического исследования лежат дедуктивный и индуктивный методы. *Дедуктивный метод* рассуждений - это рассуждение от общего к частному, т.е. рассуждение, исходным моментом которого является общий результат, а заключительным моментом – частный результат.

Слово *индукция* по-русски означает наведение, а *индуктивными* называют выводы, сделанные на основе наблюдений, опытов, т.е. полученные путем заключения от частного к общему.

## **Полная и неполная индукция**

*Метод математической индукции можно сравнить с прогрессом. Мы начинаем с низшего, в результате логического мышления приходим к высшему. Человек всегда стремился к прогрессу, к умению развивать свою мысль логически, а значит, сама природа предназначала ему размышлять индуктивно.*

# Полная индукция

Пусть требуется установить, что каждое натуральное чётное число  $n$  в пределах  $4 \leq n \leq 20$  представимо в виде суммы двух простых чисел. Для этого возьмём все такие числа и выпишем соответствующие разложения:

$$4=2+2; 6=3+3; 8=5+3; 10=7+3; 12=7+5;$$

$$14=7+7; 16=11+5; 18=13+5; 20=13+7.$$

Каждое из интересующих нас чисел представляется в виде суммы двух простых слагаемых.

Полная индукция заключается в том, что общее утверждение доказывается по отдельности в каждом из конечного числа возможных случаев.

# Неполная индукция

Иногда общий результат удаётся предугадать после рассмотрения не всех, а достаточно большого числа частных случаев (так называемая неполная индукция). Результат, полученный неполной индукцией, остается, однако, лишь гипотезой, пока он не доказан точным математическим рассуждением, охватывающим все частные случаи.

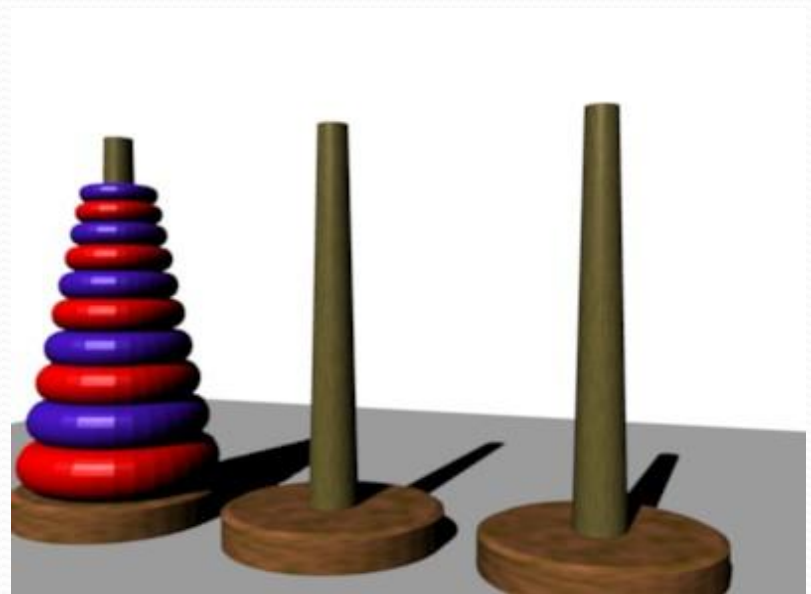
# Метод математической индукции

Пусть нужно доказать справедливость некоторого утверждения для любого натурального числа  $n$ . Непосредственная проверка этого утверждения для каждого значения  $n$  невозможна, поскольку множество натуральных чисел бесконечно. Чтобы доказать это утверждение:

1. проверяют сначала его справедливость для  $n=1$ .
2. предполагают, что при любом натуральном значении  $k$  утверждение справедливо.
3. доказывают справедливость утверждения при  $n=k+1$ .
4. тогда утверждение считается доказанным для всех  $n$ .

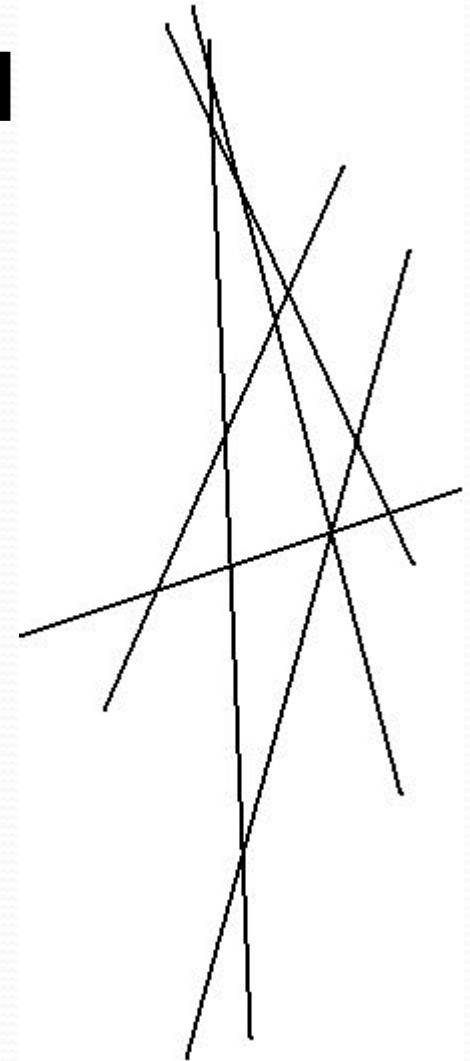
# Ханойские башни

Есть три стержня и кольцо разного размера. Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить пирамидку с одного стержня на другой?



# Пересечение прямых

Докажите, что любые  $n$  прямых, расположенных на одной плоскости, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не пересекаются в одной точке, пересекаются ровно в  $\frac{n(n-1)}{2}$  точках.





# Докажите тождество

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + \frac{1}{2})(n + 1)}{3}$$

- 1. [БАЗА] Проверим, работает ли эта формула при  $n=1$ :

$$1^2 = \frac{1(1 + \frac{1}{2})(1 + 1)}{3} = 1,$$

- 2. [ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ] Предположим, что тождество верно при  $n=k$ , то есть

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k + \frac{1}{2})(k + 1)}{3}$$

- 3. [ШАГ] Шаг индукции будет соответствовать проверке этого тождества при  $n=k+1$ , то есть нужно доказать, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{(k + 1)(k + \frac{3}{2})(k + 2)}{3}$$

- 4. [ВЫВОД] Тождество верно для любого .

### Группа 1.

**Задача 1.** Докажите, что при каждом натуральном  $n$ , начиная с  $n=3$ , существует выпуклый  $n$ -угольник, имеющий ровно три острых угла.

**Задача 2.** Доказать, что  $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$ .

**Задача 3.** Доказать, что  $(11^{n+2} + 12^{2n+1})$  делится на 133 без остатка.

### Группа 2.

**Задача 1.** Плоскость разделена на части  $n$  прямыми. Докажите, что эти части можно раскрасить в два цвета так, что соседние куски будут раскрашены в разные цвета.

**Задача 2.** Доказать, что  $1+x+x^2+x^3+\dots+x^n=(x^{n+1}-1)/(x-1)$ .

**Задача 3.** Доказать, что при любом  $n$   $7^n - 1$  делится на 6 без остатка.

### Группа 3.

**Задача 1.** Докажите что сумма углов выпуклого  $n$ -угольника равна  $(n-2) \cdot 180^\circ$  (или  $(n-2)\pi$  радиан). В частности для треугольника получаем  $(3-2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$  а для четырехугольника  $(4-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$

**Задача 2.** Доказать, что при любом  $n$  справедливо утверждение:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$$

**Задача 3.** Доказать, что  $3^{3n-1} + 2^{4n-3}$  при произвольном натуральном  $n$  делится на 11.

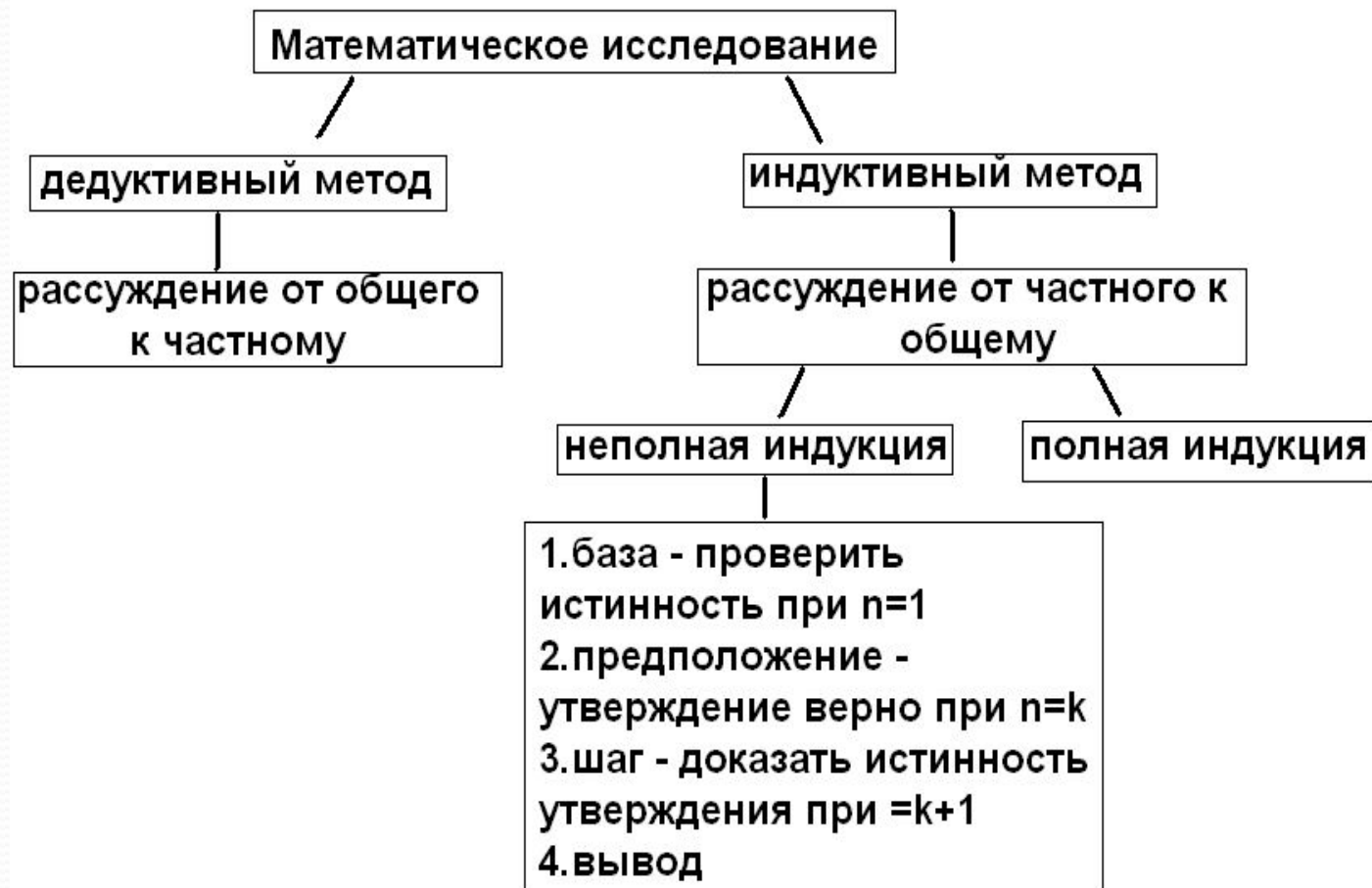
### Группа 4.


**Задача 1.** Чему равно количество кусочков, на которые  $n$  прямых (не проходящих через одну точку) делят плоскость на части? Одна прямая — на две части, две — на четыре. А пятнадцать прямых?

**Задача 2.** Доказать, что  $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (2n-1)^3 - (2n)^3 = -n^2(4n+3)$  для любого натурального  $n$ .

**Задача 3.** Доказать, что  $11^{2n} - 1$  при произвольном натуральном  $n$  делится на 6 без остатка.

# Рефлексия





*Лаговская Е.В. учитель математики и  
информатики  
Школа-лицей «Дарын» г. Петропавловск  
Северо-Казахстанская область*