

# Решение задач «Магия тел вращения»

Презентацию подготовила:  
Учитель математики МБОУ СОШ №1  
г.Воткинска, Удмуртской Республики  
Колесникова Татьяна Павловна

**Найдите площадь поверхности (внешней и внутренней) шляпы, размеры которой (в см) указаны на рисунке.**

**Решение.**

**1) Если дно шляпы опустить на плоскость её поля, то получим круг радиуса  $R = r_1 + 10 = 20$  см.**

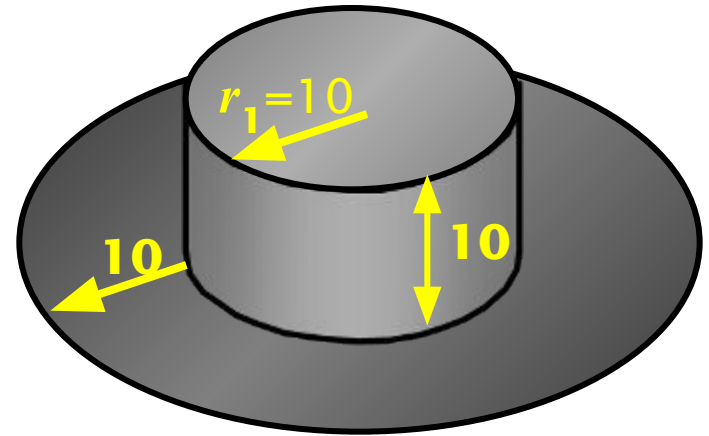
**2) Площадь этого круга**

$$S_M = \pi \cdot R^2 = 400\pi (\text{ см}^2).$$

**3) Найдем площадь боковой поверхности цилиндрической части  $S_{\text{б}} = h_{\text{окр}} \cdot 2\pi r_1 = 2\pi \cdot 10 \cdot 10 = 200\pi$  ( см<sup>2</sup>).**

**4) Найдем площадь шляпы**

$$S_{\text{шляпы}} = 2 \cdot (S_{\text{круга}} + S_{\text{б}}) = 2 \cdot (400\pi + 200\pi) = 1600\pi (\text{ см}^2).$$



**Ответ: 1600π (см<sup>2</sup>).**

### Задача 1.

Прямоугольный треугольник с гипотенузой 25 см и проведенной к ней высотой равной 12 см вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении.

Решение:

$$AB=25 \text{ см}, CH=12 \text{ см}$$

$$S_{\text{тела}} = S_{\text{бок.кон(1)}} + S_{\text{бок.кон(2)}}$$

$$h^2 = a_c * b_c \text{ (высота в прямоугольном треугольнике)}$$

$$CH^2 = AH * HB. \text{ Пусть } AH = x, \text{ тогда } HB = 25 - x.$$

$$x(25 - x) = 12^2;$$

$$x^2 - 25x + 144 = 0;$$

$$AH = 16 \text{ см}, HB = 9 \text{ см}$$

$$\text{Из } \triangle AHC \text{ по теореме Пифагора } AC^2 = AH^2 + CH^2;$$

$$AC = 20 \text{ см} - (\text{образующая 1})$$

$$S_{\text{бок.кон(1)}} = \pi r l = \pi * 12 * 20 = 240\pi \text{ (см}^2\text{)};$$

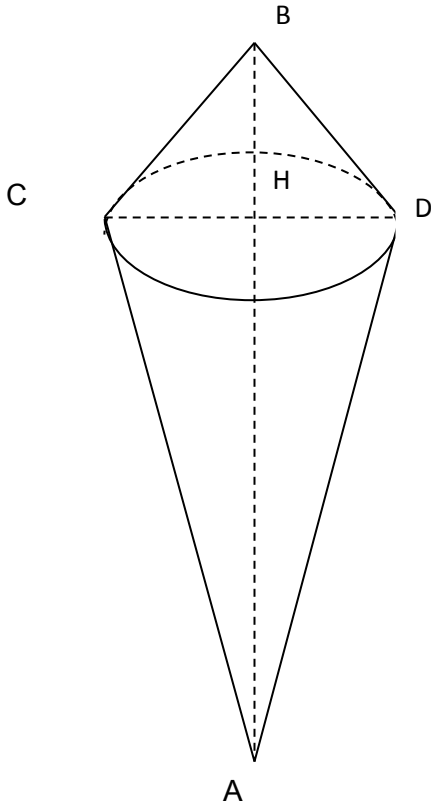
$$\text{Из } \triangle BHC \text{ } CB^2 = CH^2 + HB^2$$

$$CB = 15 \text{ (см)} - (\text{образующая 2}).$$

$$S_{\text{бок.кон(2)}} = \pi * 12 * 15 = 180\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

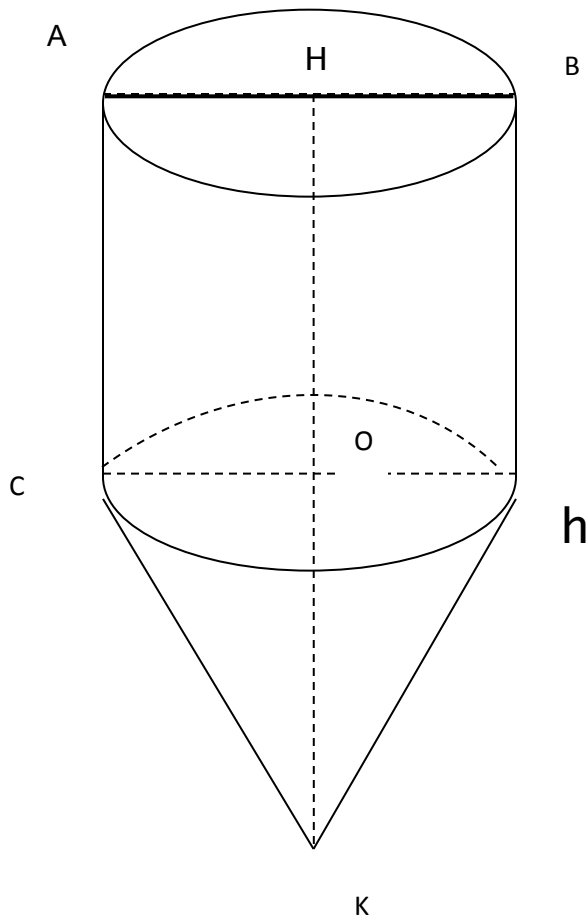
$$S_{\text{тела}} = 240\pi + 180\pi = 420\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

$$\text{Ответ: } 420\pi \text{ см}^2$$



## Задача 2.

Прямоугольная трапеция с основаниями 5 см и 10 см и большей боковой стороной равной 13 см вращается вокруг большего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.



Решение:

$$AC=5 \text{ см}, HK=10 \text{ см}, CK=13 \text{ см.}$$

$$OK=HK-AC=5 \text{ см};$$

$$l=13 \text{ см}$$

Из  $\triangle COK$  по теореме Пифагора  $CO^2=CK^2-OK^2$ ;  $CO=r=12 \text{ см};$

$$S_{\text{бок.кон}} = \pi r l = \pi \cdot 12 \cdot 13 = 156\pi \text{ (см}^2\text{)};$$

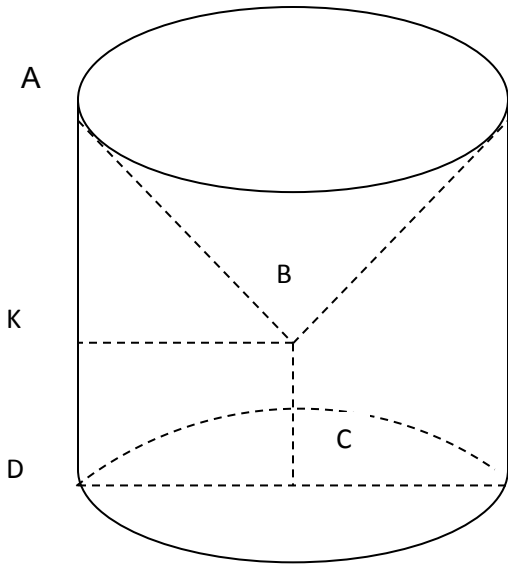
$$S_{\text{цил.}} = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi \cdot 12 \cdot 5 + 144\pi = 264\pi \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{\text{тела}} = S_{\text{бок.кон.}} + S_{\text{цил.}} = 156\pi + 264\pi = 420\pi \text{ (см}^2\text{)};$$

**Ответ:**  $420\pi \text{ см}^2$

### Задача 3.

Прямоугольная трапеция с основаниями 5 см и 10 см и большей боковой стороной равной 13 см вращается вокруг меньшего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.



Решение:

$$BC=5 \text{ см}, AD=10 \text{ см}, AB=13 \text{ см}$$

$$S_{\text{тела}} = S_{\text{бок.кон.}} + S_{\text{цил(основание)}}$$

$$S_{\text{тела}} = \pi r l + 2\pi r h + \pi r^2; AK=AD-BC=5 \text{ (см)};$$

Из  $\triangle АКВ$  - прямоугольного по теореме Пифагора  $KB^2=AB^2-AK^2$ ;

$$KB=12 \text{ см} - r$$

$AB=l$  – образующая

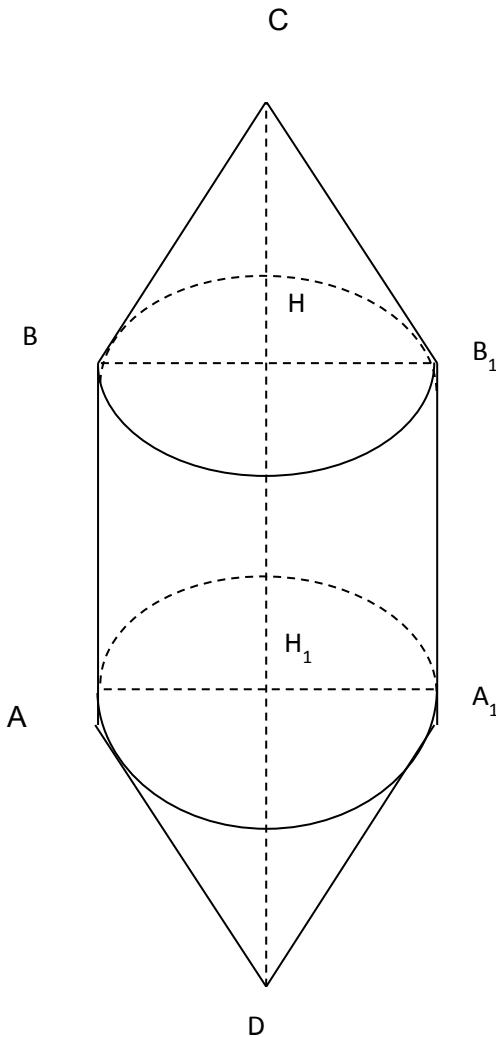
$$h=AD=10 \text{ см}$$

$$S_{\text{тела}} = \pi \cdot 12 \cdot 13 + 2\pi \cdot 12 \cdot 10 + 144\pi = 540\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

**Ответ:**  $540\pi \text{ см}^2$

### Задача 4.

Равнобокая трапеция с основаниями 4 см и 10 см и высотой 4 см вращали вокруг большего основания. Найдите площадь поверхности тела вращения.



**Решение:**

$AB=4\text{ см}, DC=10\text{ см}, BH=4\text{ см}$

$$S_{\text{тела}} = 2 S_{\text{бок.кон.}} + S_{\text{бок.цил.}}$$

$$S_{\text{бок.кон.}} = \pi r l$$

$$HC = 10 - 2/2 = 3.$$

Из  $\triangle BHC$  по теореме Пифагора

$$CB^2 = CH^2 + HB^2;$$

$CB = 5\text{ см.} - l$  (образующая).

$BH = r = 4\text{ см};$

$$S_{\text{бок.кон.}} = \pi \cdot 4 \cdot 5 = 20\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

$$h = HH_1 = 10 - (3 + 3) = 4\text{ см.} \quad S_{\text{бок.цил.}} = 2\pi r h = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \pi = 32\pi \text{ (см}^2\text{)}$$

$$S_{\text{тела}} = 40\pi + 32\pi = 72\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

**Ответ:**  $72\pi\text{ см}^2$ .

**Задача 5** Образующая и радиус основания цилиндра равны 1. Найдите длину кратчайшего пути по боковой поверхности этого цилиндра, соединяющего центрально-симметричные точки  $A$  и  $B$  (рис. 29).

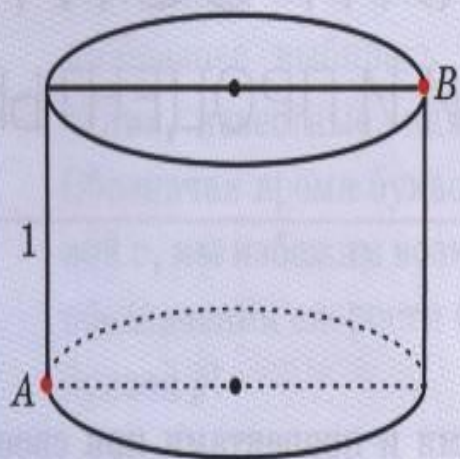


Рис. 29

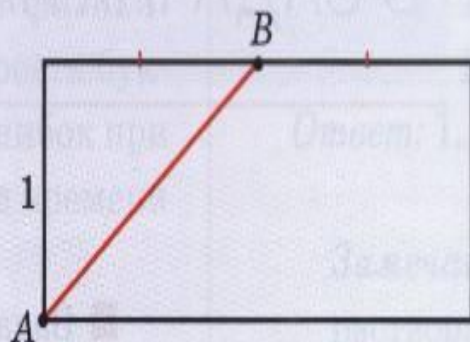


Рис. 30

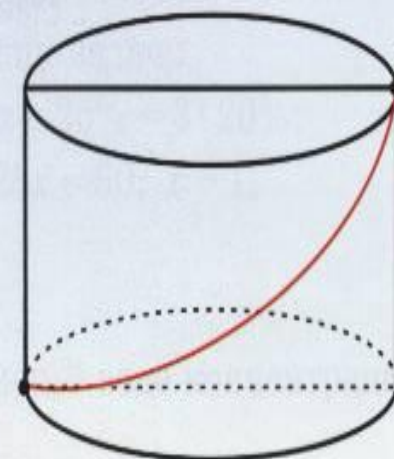


Рис. 31

*Решение.* Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник со сторонами  $2\pi$  и 1. Кратчайшим путем из точки  $A$  в точку  $B$  является отрезок  $AB$ , длина которого равна  $\sqrt{1 + \pi^2}$ . Соответствующий путь на поверхности цилиндра изображен на рисунке 31.

*Ответ:*  $\sqrt{1 + \pi^2}$ .

**Задача 6**

На внутренней стенке цилиндрической банки в трех сантиметрах от верхнего края висит капля меда, а на наружной стенке, в диаметрально противоположной точке сидит муха (рис. 32). Найдите кратчайший путь, по которому муха может доползти до меда. Радиус основания банки равен 10 см.

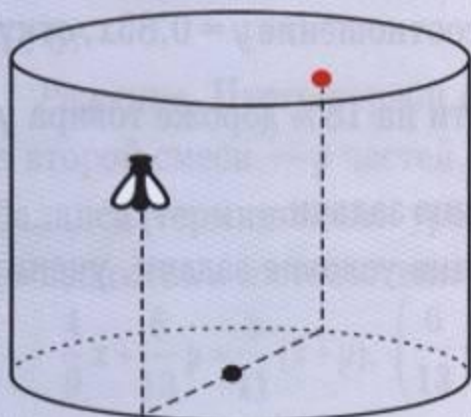


Рис. 32

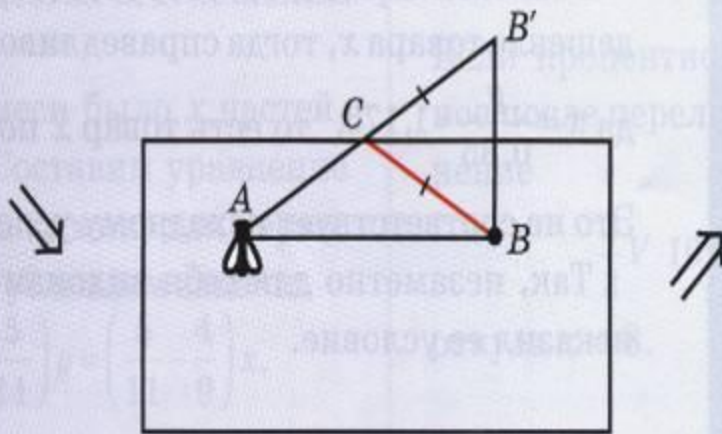


Рис. 33

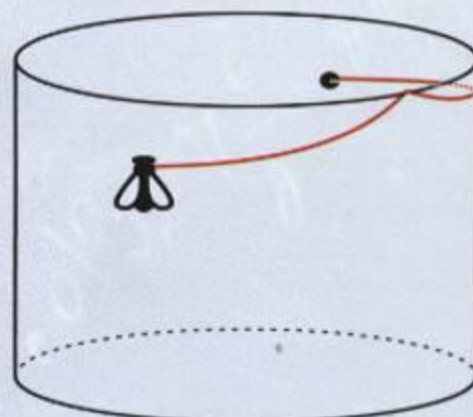


Рис. 34

*Решение.* Разверткой боковой поверхности цилиндра является прямоугольник (рис. 33).

Конечно, кратчайшим путем между точками  $A$  и  $B$  является отрезок  $AB$ . Однако чтобы муха могла попасть на внутреннюю сторону банки, ей нужно переползти через край в некоторой точке  $C$ . Рассмотрим точку  $B'$ , симметричную точке  $B$  относительно стороны прямоугольника. Тогда отрезки  $BC$  и  $B'C$  равны, следовательно, длина кратчайшего пути равна длине отрезка  $AB'$ . Она равна  $2\sqrt{25\pi^2 + 9}$ . Соответствующий путь на поверхности банки изображен на рисунке 34.

*Ответ:*  $2\sqrt{25\pi^2 + 9}$ .



**Задача 7** Осевое сечение конуса — правильный треугольник  $ABC$  со стороной 1. Найдите длину кратчайшего пути по поверхности этого конуса из точки  $A$  в точку  $D$  — середину стороны  $BC$  (рис. 35).

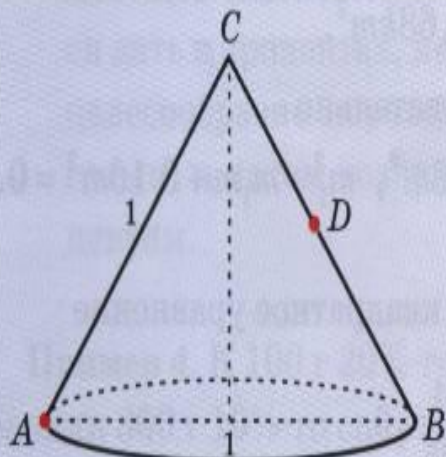


Рис. 35

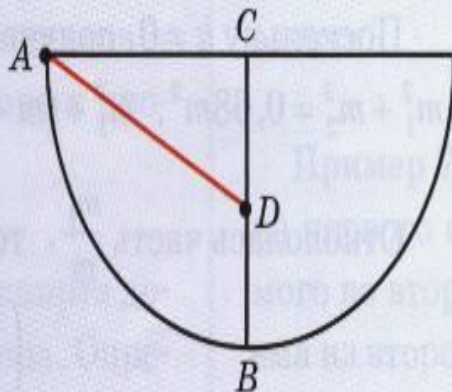


Рис. 36

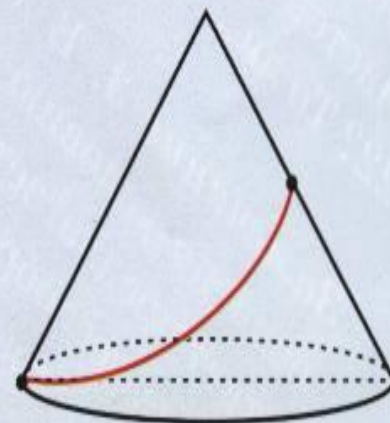


Рис. 37

*Решение.* Разверткой боковой поверхности этого конуса является полукруг радиуса 1 (рис. 36).

Кратчайшим путем из точки  $A$  в точку  $D$  является отрезок  $AD$ , длина которого равна  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ . Соответствующий путь на поверхности конуса изображен на рисунке 37.

Ответ:  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

# Задача В11

Дано два цилиндра. Объем первого равен 12 м<sup>3</sup>. Радиус основания второго в два раза меньше, чем первого, а высота в три раза больше. Требуется найти объем второго цилиндра.

Решение: Объем цилиндра вычисляется по формуле:  $V = h\pi r^2$

Отметим радиус основания первого цилиндра  $r$  а высоту  $h$ .

Тогда радиус основания второго цилиндра равен  $r/2$ , а высота  $3h$ . Подставим в указанную выше формулу и

получим:  $V_2 = 3h\pi(r/2)^2$

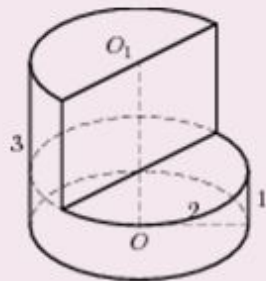
Упростим полученное выражение:  $V_2 = 3h\pi(r/2)^2 = 3/4h\pi r^2 = 3/4 \cdot 12 = 9$

Таким образом, объем второго цилиндра равен 9 м<sup>3</sup>.

Ответ: 9.

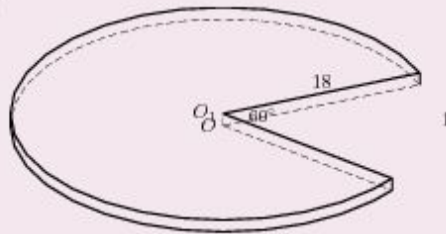
Решите самостоятельно следующие задачи:

№ 25777 Найдите объем  $V$  части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите



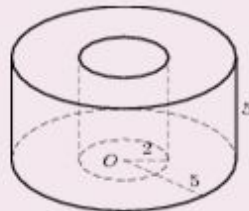
ответ: 8

№ 25769 Найдите объем  $V$  части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите  $V/\pi$



ответ: 270

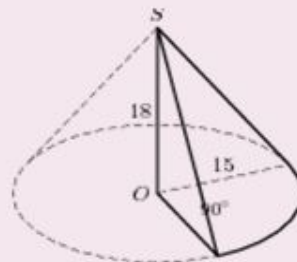
№ 25781 Найдите объем  $V$  части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите  $V/\pi$



ответ: 105

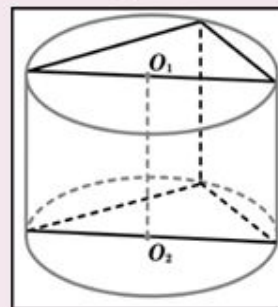
Решите самостоятельно следующие задачи:

№ 25795 Найдите объем  $V$  части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите  $V/\pi$



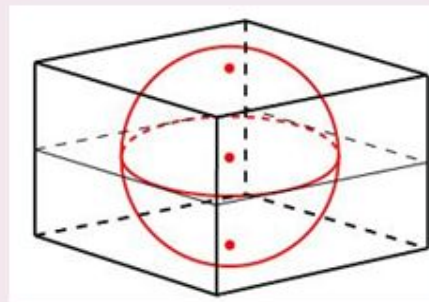
ответ: 337,5

№ 4969 В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 3. Боковые ребра равны  $\frac{5}{\pi}$ . Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



ответ: 22,5

№ 27105 Объем прямоугольного параллелепипеда, описанного около сферы, равен 216. Найдите радиус сферы.



ответ: 3