



**ПРОЦЕССЫ И АППАРАТЫ**  
**ХИМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ**

## Лекция 6.

# ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ И АППАРАТЫ. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

1. ВВЕДЕНИЕ

2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ

3. ДАВЛЕНИЕ ПОКОЯЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ НА ДНО  
И СТЕНКИ СОСУДА

4. ГИДРОСТАТИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

5. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

# 1. ВВЕДЕНИЕ

Проведение процессов химической технологии обычно связано с перемещением жидкостей, газов или паров в трубопроводах и аппаратах, образованием или разделением гетерогенных систем (перемешивание, диспергирование, отстаивание, фильтрование и др.). Поскольку скорость всех этих процессов определяется законами гидромеханики, то их принято называть *гидромеханическими процессами*.

При расчете процессов и аппаратов химической технологии необходимо учитывать гидродинамические условия в аппаратах, которые очень сильно влияют на осуществляемые в них процессы.

## 2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ

В гидростатике изучается равновесие жидкостей, находящихся в состоянии *относительного* покоя. При этом форма объема жидкости не меняется, силы внутреннего трения отсутствуют. При решении уравнений Навье-Стокса при условии равенства нулю скоростей движения жидкости по соответствующим осям координат была получена система дифференциальных уравнений равновесия Эйлера:

$$- dp \partial x = 0; - dp \partial y = 0; - \rho g - \partial p \partial z = 0 .$$

Давление в покоящейся жидкости изменяется только по вертикали(т. е. вдоль оси  $z$ ), оставаясь одинаковым во всех точках любой горизонтальной плоскости, так как изменения давления вдоль осей  $x$  и  $y$  равны нулю. Поскольку частные производные  $\partial p \partial x$  и  $\partial p \partial y$  равны нулю, частная производная  $\partial p \partial z$  может быть заменена на  $dp dz$ . Тогда:

$$- \rho g - dp dz = 0 , \text{ или } - dp - \rho g dz = 0 .$$

Разделив левую и правую части уравнения на  $\rho g$  и умножив все его члены на  $(-1)$ , получим:

$$dz + dp / \rho g = 0 .$$

Для несжимаемой однородной жидкости  $\rho = const$ . Тогда:

$$dz + d[p / (\rho g)] = 0 , \text{ или } d[z + p / (\rho g)] = 0 .$$

Отсюда после интегрирования получим:

$$z + p / (\rho g) = const .$$

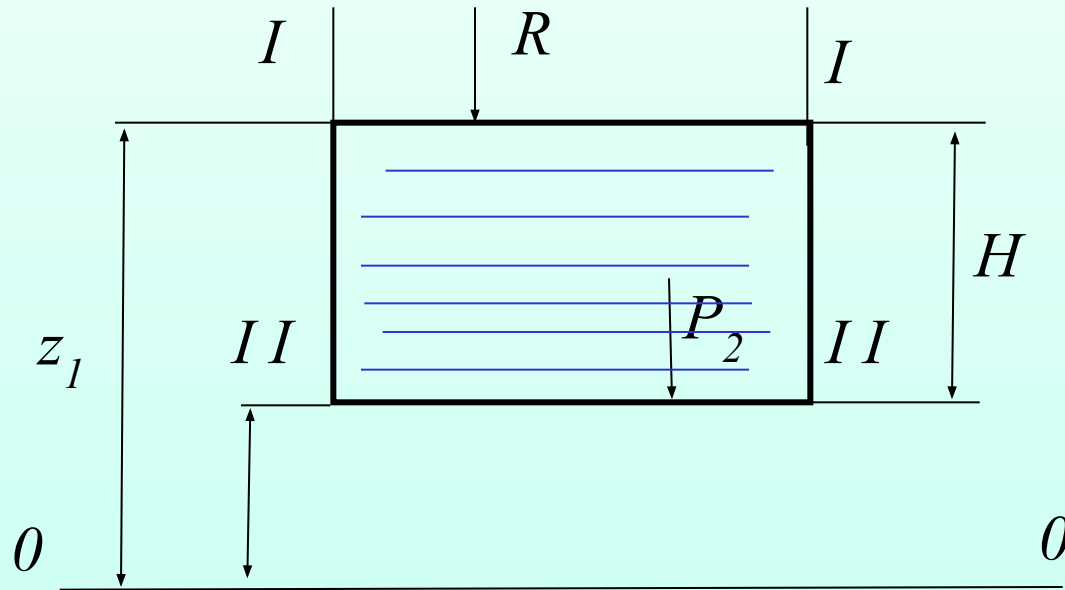


Рисунок 1 – К основному уравнению гидростатики

Для двух произвольных горизонтальных плоскостей I – I и II – II (рисунок 1) уравнение примет вид:

$$z_1 + p_1/(\rho g) = z_2 + p_2/(\rho g).$$

Уравнение называют основным уравнением гидростатики. Величину  $z$ , характеризующую расстояние данной точки от произвольно выбранной горизонтальной плоскости отсчета (рисунок 6), часто называют *нивелирной высотой*. Она выражается в единицах длины.

$$[z] = [p / (\rho g)] = [p / \gamma] = [Н \cdot м^3 / (м^2 \cdot Н)] = [Н \cdot м / Н] = [м].$$

Таким образом, по физическому смыслу нивелирная высота представляет собой энергию, приходящуюся на единицу веса жидкости. Иными словами, нивелирная высота, называемая также геометрическим напором, характеризует *удельную потенциальную энергию положения* данной точки над произвольно выбранной плоскостью сравнения.

Величину  $p / (\rho g)$  называют *гидростатическим* или *пьезометрическим напором*. Как и нивелирная высота, гидростатический напор по физическому смыслу представляет собой энергию, приходящуюся на единицу веса жидкости, и характеризует ***удельную потенциальную энергию давления в данной точке.***

Согласно основному уравнению гидростатики, *сумма удельных потенциальных энергий положения и давления в покоящейся жидкости есть величина постоянная и равная полному гидростатическому напору.*

Следовательно, *основное уравнение гидростатики является частным случаем закона сохранения энергии.*



Перепишав уравнение относительно  $p_2$ , получим:

$$p_2 = p_1 + \rho g(z_1 - z_2).$$

Уравнение (54) является выражением *закона Паскаля*, из которого следует, что *давление, создаваемое в любой точке покоящейся несжимаемой жидкости передается во все стороны с одинаковой силой*.

Действительно в соответствии с уравнением (54), при изменении давления  $p_1$  в точке  $z_1$  жидкости на какую-либо величину давление во всякой другой точке жидкости изменится на ту же величину.

### 3. ДАВЛЕНИЕ ПОКОЯЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ НА ДНО И СТЕНКИ СОСУДА

Давление жидкости на горизонтальное дно сосуда везде одинаково. Давление же на его боковые стенки возрастает с увеличением глубины погружения. При этом давление на дно сосуда не зависит от формы или угла наклона боковых стенок сосуда, а также от объема жидкости в нем.

При  $p_1$  и  $H$  (рисунок 1)  $p_2 = p_1 + \rho g H$  (где  $p_1$  и  $p_2$  – давление соответственно на поверхность жидкости и на дно сосуда).

Таким образом, при данной плотности жидкости сила давления  $P$  на дно сосуда зависит только от высоты столба  $H$  жидкости и площади  $F$  дна сосуда:

$$P = p F, \text{ или } P = (p + \rho g H) F_1. \quad (55)$$

Поскольку гидростатическое давление жидкости на вертикальную стенку сосуда изменяется по ее высоте, то общая сила давления на нее распределяется неравномерно и будет определяться по формуле:

$$P = p_1 + (\rho g h) F_{cm} , (56)$$

где  $h$  – расстояние от верхнего уровня жидкости до центра тяжести смоченной площади  $F_{cm}$  стенки. Из выражения (56) следует, что сила давления на вертикальную стенку равна произведению ее смоченной площади на гидростатическое давление в центре тяжести смоченной площади стенки. Точка приложения сил давления на стенку называется центром давления.

Эта точка расположена всегда ниже центра тяжести смоченной площади стенки. Например, для вертикальной плоской стенки центр давления расположен от верхнего уровня жидкости на расстоянии  $2/3 H$ .

## 4. ГИДРОСТАТИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

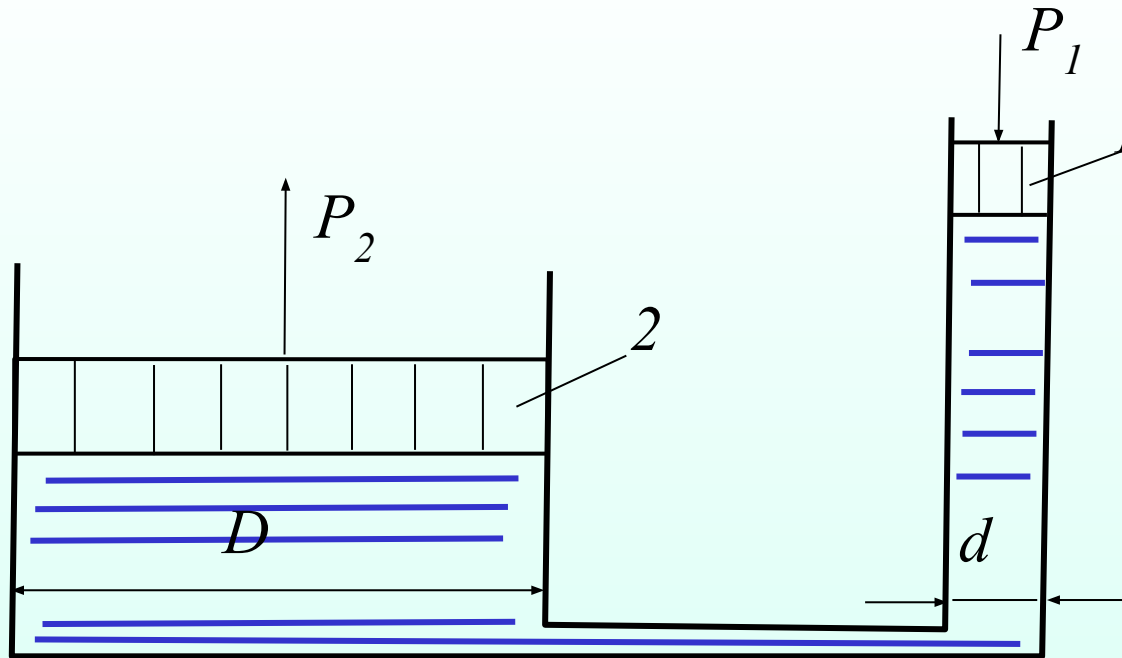


Рисунок 7 – Схема гидравлического пресса

Наиболее распространенным типом гидростатических машин является *гидравлический пресс*, который применяют для прессования и брикетирования различных материалов: пластических масс, металлокерамических порошков и др.

В основу работы гидравлического пресса положен **закон**

**Паскаля.**

При приложении сравнительно небольшого усилия к поршню 1 (рисунок 7), движущемуся в цилиндре меньшего диаметра  $d$ , и создании удельного давления  $p$  на поршень 1 и, следовательно, на рабочую жидкость (вода, масло и др.), такое же давление  $p$  будет приходиться на поршень 2 большего диаметра  $D$ . При этом сила давления на поршень 1 и на поршень 2 соответственно составит:

$$P_1 = p F_1 = p \pi d^2 / 4$$

$$P_2 = p F_2 = p \pi D^2 / 4 .$$

Отсюда (без учета разницы уровней жидкости в цилиндрах):

$$P_2 = P_1 D^2 / d .$$

Таким образом, поршень 2 передаст силу давления, во столько раз превышающую силу, приложенную к поршню 1, во сколько раз поперечное сечение цилиндра 2 больше, чем сечение цилиндра 1.

## 5. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

При преобразовании уравнения Навье-Стокса для идеальной жидкости была получена система уравнений:

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\omega_x}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial x}; \\ \rho \frac{d\omega_y}{d\tau} &= -\frac{\partial p}{\partial y}; \\ \rho \frac{d\omega_z}{d\tau} &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z},\end{aligned}$$

которые называют дифференциальными уравнениями движения идеальной жидкости Эйлера.

Интегрирование этих уравнений приводит к важнейшему уравнению гидродинамики – **уравнению Бернулли**, широко используемому в инженерных расчетах.

Для того чтобы найти силы, действующие во всем рассматриваемом объеме движущейся идеальной жидкости, умножим левые и правые части уравнений Эйлера на соответствующие длины ребер этого объема ( $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ ) и поделим на  $\rho$

$$\frac{d\omega_x}{d\tau} dx = \frac{dx}{d\tau} d\omega_x = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} dx;$$

$$\frac{dy}{d\tau} d\omega_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy;$$

$$\frac{dz}{d\tau} d\omega_z = -gdz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz.$$

Но

$$\frac{dx}{d\tau} = \omega_x; \frac{dy}{d\tau} = \omega_y; \frac{dz}{d\tau} = \omega_z,$$

тогда

$$\omega_x d\omega_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx;$$

$$\omega_y d\omega_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy;$$

$$\omega_z d\omega_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz - gdz.$$

Сложим левые и правые части этих уравнений. Получим уравнение (57):

$$\omega_x d\omega_x + \omega_y d\omega_y + \omega_z d\omega_z = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) - g dz.$$

В левой части уравнения (57):

$$\omega_x d\omega_x = d(\omega_x^2 / 2);$$

$$\omega_y d\omega_y = d(\omega_y^2 / 2);$$

$$\omega_z d\omega_z = d(\omega_z^2 / 2),$$

откуда

$$\omega_x d\omega_x + \omega_y d\omega_y + \omega_z d\omega_z = d(\omega_x^2 / 2) + d\omega_y^2 / 2 + d\omega_z^2 / 2 = d(\omega^2 / 2).$$

В правой части уравнения (57) выражение, заключенное в скобках, представляет собой полный дифференциал гидростатического давления  $dp$ .



С учетом проведенных преобразований уравнение (57) примет вид:

$$d(\omega^2 / 2) = -g dz - \frac{dp}{\rho}.$$

Разделим обе части уравнения (58) на  $g$ . Получим:

$$d[\omega^2 / (2g)] = -dz - dp / (\rho g)$$

или

$$dz + dp / (\rho g) + d[\omega^2 / 2g] = 0.$$

Так как в рассматриваемом случае  $\rho = \mathit{const}$  и  $g = \mathit{const}$ , то сумму дифференциалов можно заменить дифференциалом суммы:

$$d[z + p / (\rho g) + \omega^2 / (2g)] = 0.$$

После интегрирования уравнения (59) получим:

$$z + p / (\rho g) + \omega^2 / (2g) = \mathit{const} = H.$$

Уравнение (60) называют *уравнением Бернулли для идеальной жидкости*. Величину  $[z + p / (\rho g) + \omega^2 / (2g)]$  **называют общим или гидродинамическим напором.**

Очевидно, что для любых сечений потока значение  $H$  должно оставаться постоянным, т. е.:

$$z_1 + p_1/(\rho g) + \omega_1^2/(2g) = z_2 + p_2/(\rho g) + \omega_2^2/(2g) = \dots = H.$$

Сумма  $z + p/(\rho g)$  в уравнение (60) характеризует полную удельную потенциальную энергию в данном сечении (точке) и выражается в единицах длины или удельной энергии, т. е. энергии приходящейся на единицу веса жидкости.

Третье слагаемое уравнения (60), т. е.  $\omega^2/(2g)$  – скоростной (динамический) напор или удельная кинетическая энергия в данном сечении (точке) потока.

Таким образом, уравнение Бернулли выражает частный случай закона сохранения энергии (или энергетический баланс потока).

**СПАСИБО ЗА**  
**ВНИМАНИЕ!**