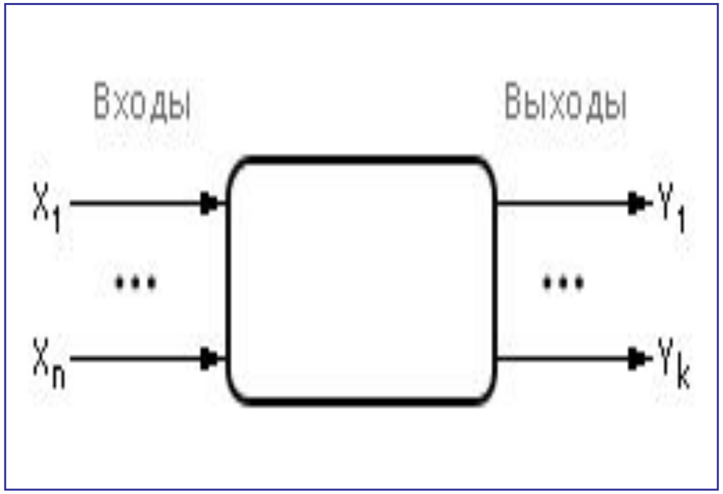
Линейные регрессионые модели

Одномерная регрессионная модель
Многомерная регрессионная модель

По степени информированности исследователя об объекте существует деление объектов на три типа «ящиков»:

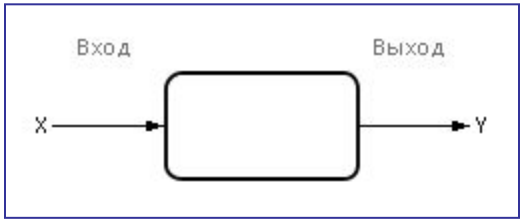
«белый ящик»: об объекте известно все;
«серый ящик»: известна структура объекта, неизвестны количественные значения параметров;
«черный ящик»: об объекте неизвестно ничего.

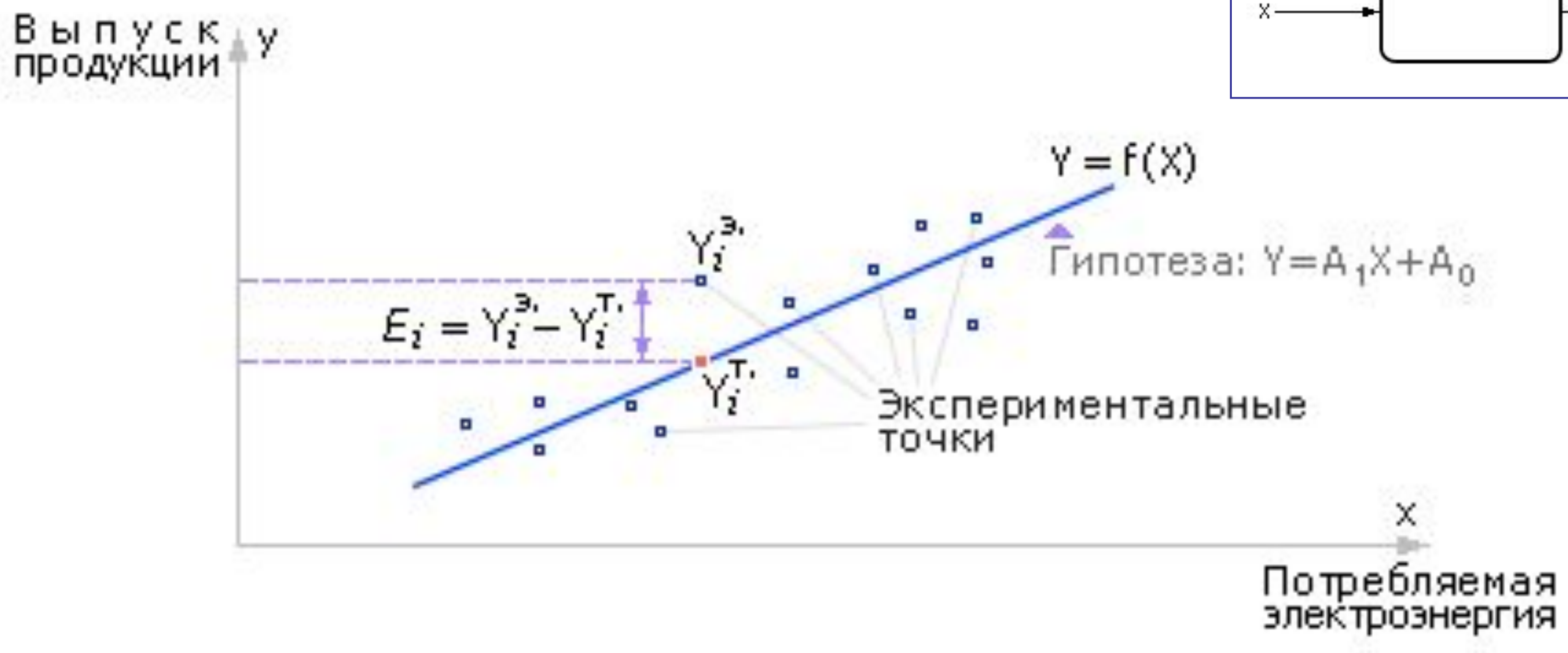


Обозначение черного ящика на схемах

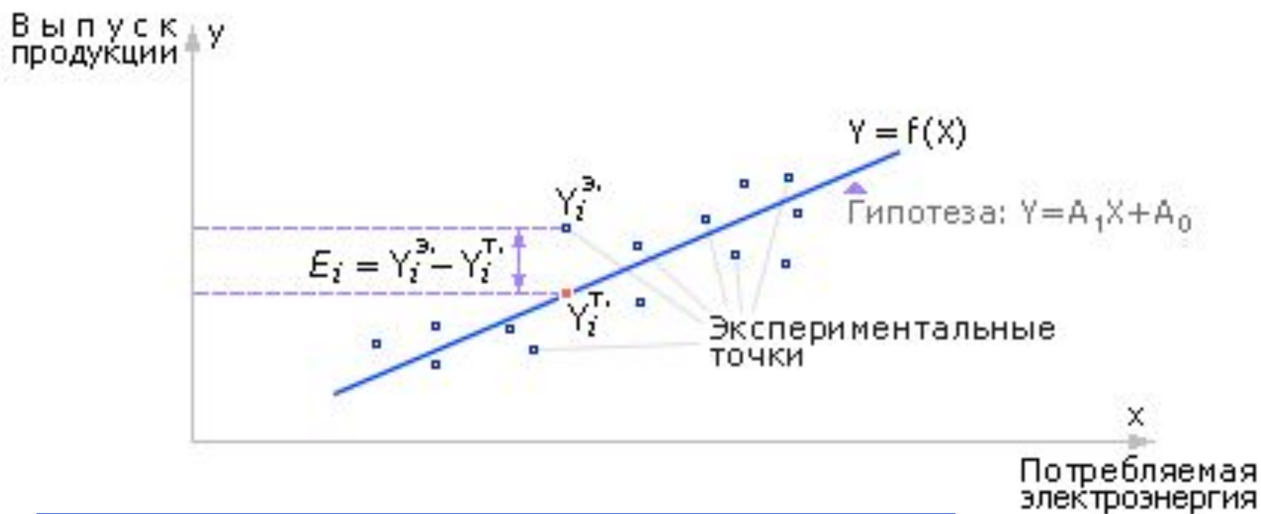
Задача состоит в том, чтобы, зная множество **значений на входах и выходах,** построить **модель**, то есть определить функцию ящика, по которой вход преобразуется в выход. Такая задача называется **задачей регрессионного анализа**.

Пусть, например, перед нами стоит задача определить, как зависит выпуск продукции от количества потребляемой электроэнергии. Результаты наблюдений отобразим на графике/ Всего на графике *n* экспериментальных точек, которые соответствуют *n* наблюдениям





Для начала предположим, что мы имеем дело с черным ящиком, имеющим один вход и один выход. Допустим для простоты, что зависимость между входом и выходом линейная или почти линейная. Тогда данная модель будет называться **линейной одномерной регрессионной моделью**.



Рассматривая экспериментально полученные данные, **предположим**, что они подчиняются **линейной гипотезе**, то есть выход *Y* зависит от входа *X* линейно, то есть гипотеза имеет вид:

***Y* = *A*1*X* + *A*0**

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

$$A_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

Проверка линейной гипотезы

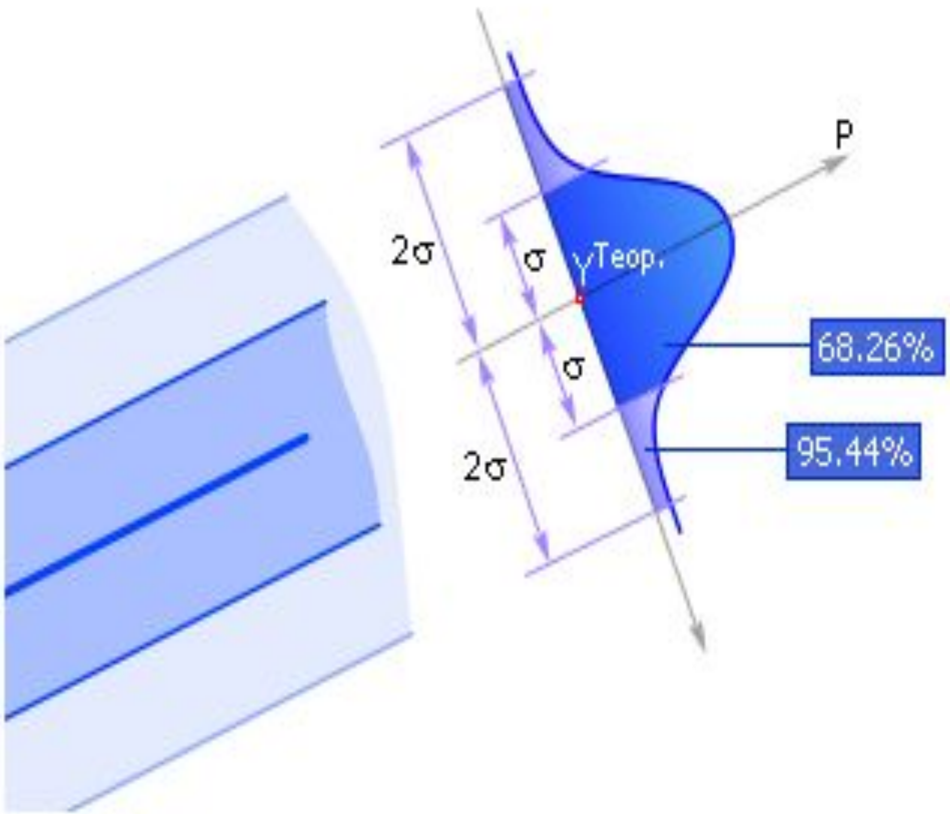
Чтобы определить, принимается гипотеза или нет, нужно, во-первых, рассчитать ошибку между точками заданной экспериментальной и полученной теоретической зависимости и суммарную ошибку:

Ei* = (*Yi*Эксп. – *Yi*Теор.), *i* = 1, …, *n

$$F(A_0, A_1) = \sum_{i=1}^{n} E_i^2$$

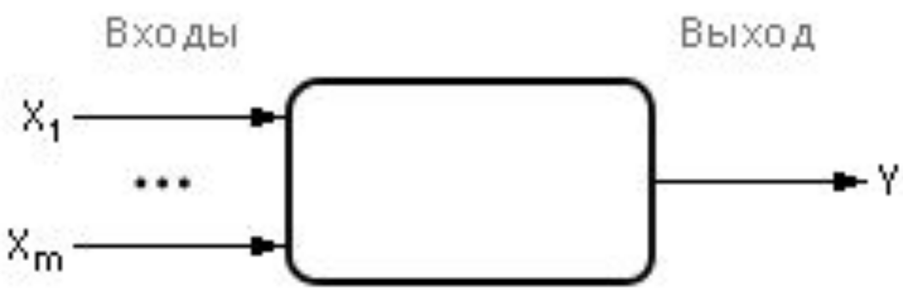
$$\sigma = \sqrt{\frac{F}{n}}$$

n-общее число точек



Если в полосу, ограниченную 2σ попадает 68.26% и более экспериментальных точек то выдвинутая гипотеза принимается. В противном случае выбирают более сложную гипотезу или проверяют исходные данные. Если требуется б***о***льшая уверенность в результате, то используют дополнительное условие: в полосу, ограниченную линиями 4σ, должны попасть 95.44% и более экспериментальных точек.

Линейная множественная модель



Гипотеза – линейная модель
Y* = *A0* + *A1* · *X1* + … + *Am* · *Xm

Для нахождения коэффициентов Ai методом Крамера представим систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^{n} X_{mi} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{1i} & \dots & \sum_{i=1}^{n} X_{mi}X_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{2i} & \dots & \sum_{i=1}^{n} X_{mi}X_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{mi} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{mi} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i}X_{mi} & \dots & \sum_{i=1}^{n} X_{mi}X_{mi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} Y_iX_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} Y_iX_{2i} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} Y_iX_{mi} \end{pmatrix}$$

Конец темы