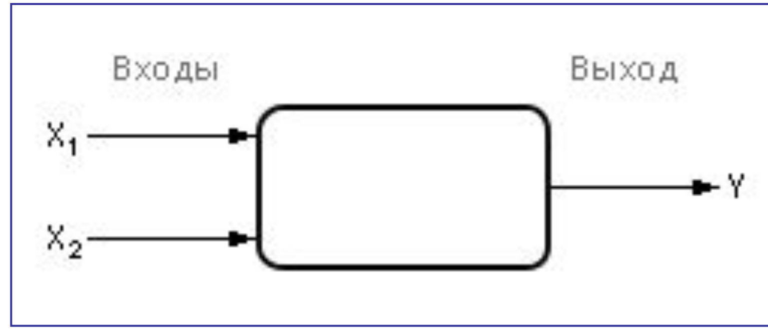
Нелинейные регрессионные модели

Полиномиальная множественная регрессионная модель
Мультипликативная регрессионная модель
Обратная регрессионная модель
Экспоненциальная модель

Полиномиальная множественная регрессионная модель

Если черный ящик имеет, например, **два входа**, а **зависимость** выхода от входов напоминает **квадратичную**, то целесообразно выбрать такую гипотезу:



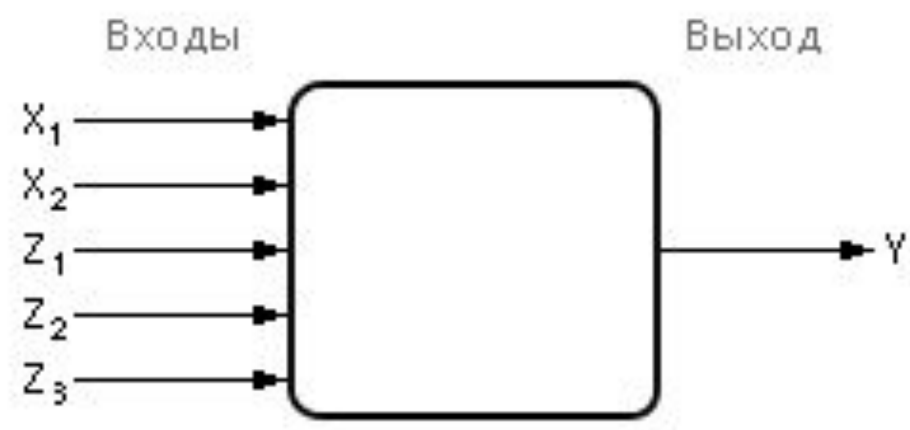
$$Y = A0 + A1 \cdot X1 + A2 \cdot X2 + A3 \cdot X1 \cdot X2 + A4 \cdot X1 \cdot X1 + A5 \cdot X2 \cdot X2$$

Обозначим: $Z1 = X1 \cdot X2$; $Z2 = X1 \cdot X1$; $Z3 = X2 \cdot X2$ и подставим эти выражения в предыдущую формулу:

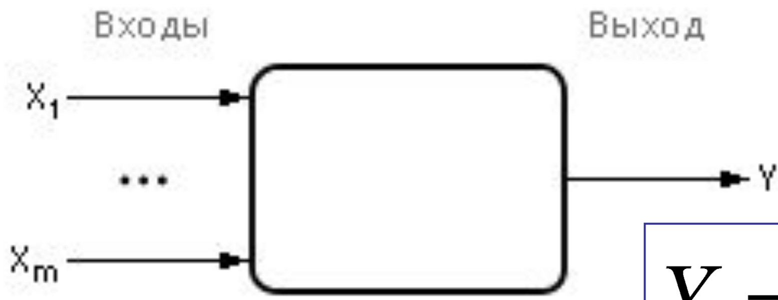
$$Y = A0 + A1 \cdot X1 + A2 \cdot X2 + A3 \cdot Z1 + A4 \cdot Z2 + A5 \cdot Z3$$

.

Таким образом, данная задача сведена к **линейной множественной модели**



Мультипликативная регрессионная модель



$$Y = A_0 * X_1^{A_1} * X_2^{A2} * \ldots * X_m^{A_m}$$

Прологарифмируем левую и правую части данного уравнения:

$$\ln(Y) = \ln(A0) + A1 \cdot \ln(X1) + A2 \cdot \ln(X2) + \ldots + Am \cdot \ln(Xm).$$

Обозначим:

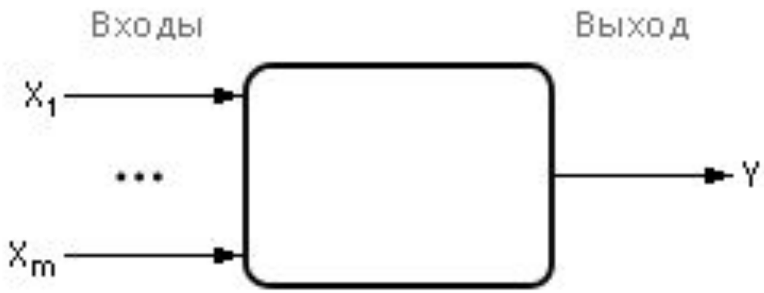
$$W = \ln(Y),\ B0 = \ln(A0),\ Z1 = \ln(X1),\ Z2 = \ln(X2),$$
$$\ldots,\ Zm = \ln(Xm).$$

Получим:

$$W = B0 + A1 \cdot Z1 + A2 \cdot Z2 + \ldots + Am \cdot Zm.$$

То есть вновь осуществлен переход к **линейной множественной модели**.

Обратная регрессионная модель



$$Y = \frac{k}{A_0 + A_1 * X_1 + \ldots\ldots + A_m * X_m}$$

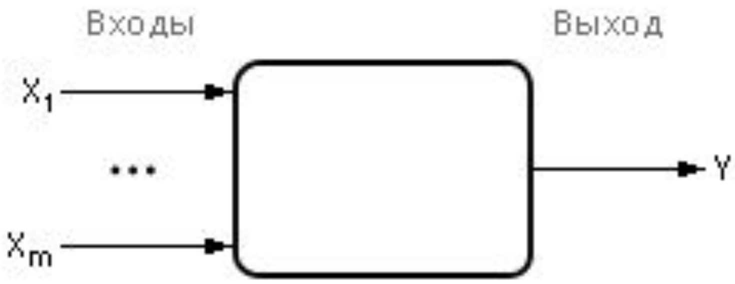
Заменим:

***W* = 1/*Y*, *ai* = *Ai*/*k*.**

И перейдем к **линейной множественной модели**

***W* = *a*0 + *a*1 · *X*1 + … + *am* · *Xm*.**

Экспоненциальная модель



$$Y = e^{B_0 + B_1 * X_1 + \ldots\ldots + B_m * X_m}$$

Прологарифмируем левую и правую части уравнения:

ln(*Y*) = *B*0 + *B*1 · *X*1 + *B*2 · *X*2 + … + *Bm* · *Xm*.

Выполним замену
W **= ln(*Y*)** и получим:

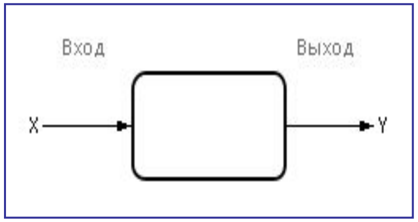
W **=** ***B*0 + *B*1 · *X*1 + *B*2 · *X*2 + … + *Bm* · *Xm***.

Далее пользуемся выражением для **линейной множественной модели**.

Регрессионный анализ нелинейной модели

Получены экспериментальные данные:

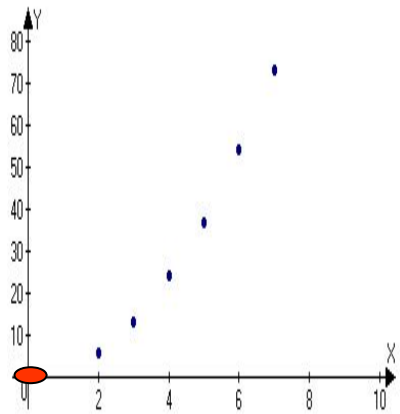
Y	**6**	**13,5**	**24**	**37,5**	**54**	**73,5**
X	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**



Построим новую табличную зависимость с учетом подстановки.

$$Y = Lgy,\ A_0 = Lga_0 + Lga_1,\ A_1 = Lgb$$

y	6	13,5	24	37,5	54	73,5
Y=Lgy	**0.778**	**1.13**	**1.38**	**1.574**	**1.732**	**1.866**
x	2	3	4	5	6	7



$$Y = a_0 + a_1 \cdot x^b$$

$$A_0 + A_1 \cdot 2 = 0{,}778$$

$$A_0 + A_1 \cdot 7 = 1{,}866$$

Решаем данную систему уравнений и находим значение коэффициент

$$A_0 = 0{,}3428 \quad A_1 = 0{,}2176 \qquad A_0 = Lga_0 + Lga_1,\ A_1 = Lgb$$

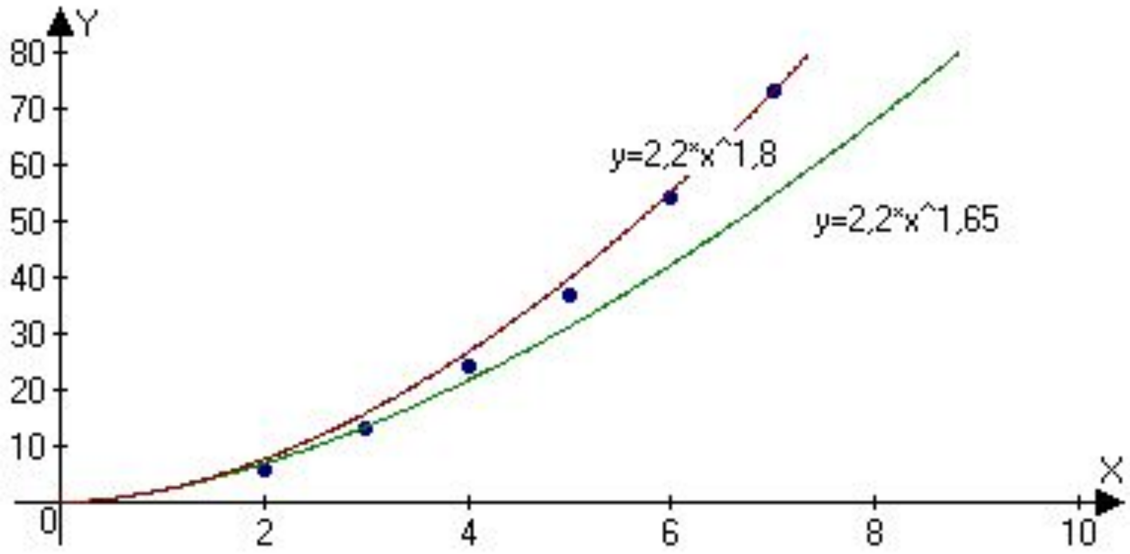
По виду зависимости предполагаем, что она проходит через ноль, следовательно

$$a_0 = 0 \qquad A_0 = Lga_1,$$

$$a_1 = 10^{0,3428} \quad b = 10^{0,2176} \qquad a_1 = 2{,}2 \quad b = 1{,}65$$

$$\boxed{y = 2{,}2 \cdot x^{1,65}}$$

Построим график по полученной зависимости $y = 2{,}2 \cdot x^{1{,}65}$



На графике видно, что **полученная зависимость** уходит от экспериментальных данных. По видимости ошибка возникла за счет неточности вычислений. Учитывая, что расчетная кривая имеет меньшую крутизну, можно предположить, что показатель степени при x недостаточен. Попробуем увеличить его до 1,8 и построим график. **Вторая кривая** практически совпадает с экспериментальными данными, так что для дальнейшей работы принимаем зависимость следующего вида:

$$\boxed{y = 2{,}2 \cdot x^{1{,}8}}$$

The end