

Нелинейные регрессионные модели

Полиномиальная множественная регрессионная модель

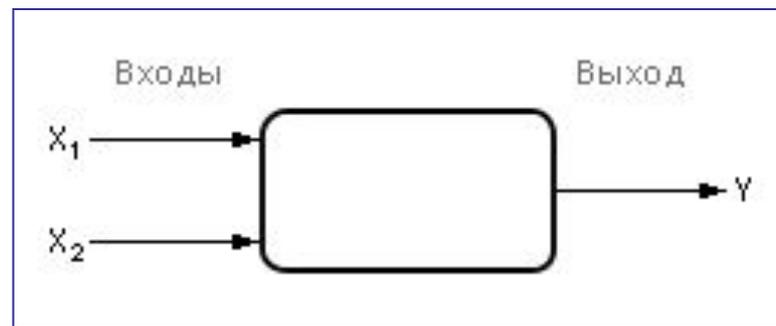
Мультипликативная регрессионная модель

Обратная регрессионная модель

Экспоненциальная модель

Полиномиальная множественная регрессионная модель

Если черный ящик имеет, например, **два входа**, а **зависимость** выхода от входов напоминает **квадратичную**, то целесообразно выбрать такую гипотезу:

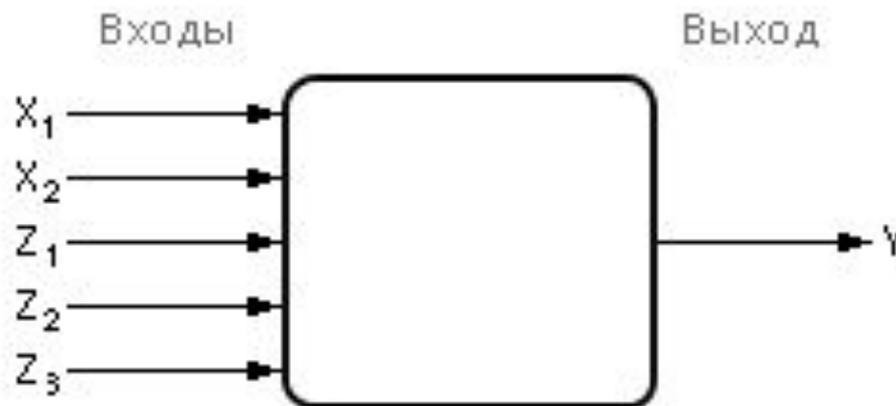
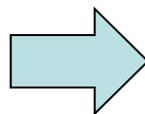


$$Y = A_0 + A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot X_1 \cdot X_2 + A_4 \cdot X_1 \cdot X_1 + A_5 \cdot X_2 \cdot X_2$$

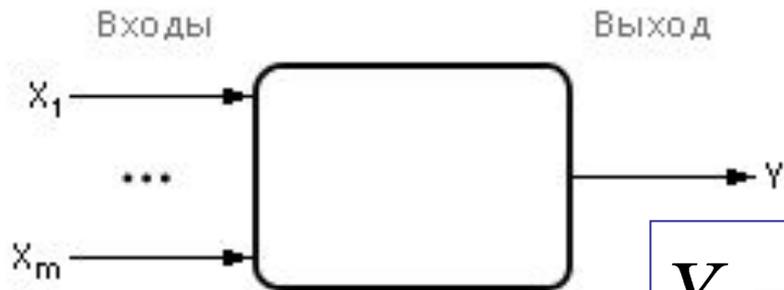
Обозначим: $Z_1 = X_1 \cdot X_2$; $Z_2 = X_1 \cdot X_1$; $Z_3 = X_2 \cdot X_2$ и подставим эти выражения в предыдущую формулу:

$$Y = A_0 + A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + A_3 \cdot Z_1 + A_4 \cdot Z_2 + A_5 \cdot Z_3$$

Таким образом, данная задача сведена к **линейной множественной модели**



Мультипликативная регрессионная модель



$$Y = A_0 * X_1^{A_1} * X_2^{A_2} * \dots * X_m^{A_m}$$

Прологарифмируем левую и правую части данного уравнения:

$$\ln(Y) = \ln(A_0) + A_1 \cdot \ln(X_1) + A_2 \cdot \ln(X_2) + \dots + A_m \cdot \ln(X_m).$$

Обозначим:

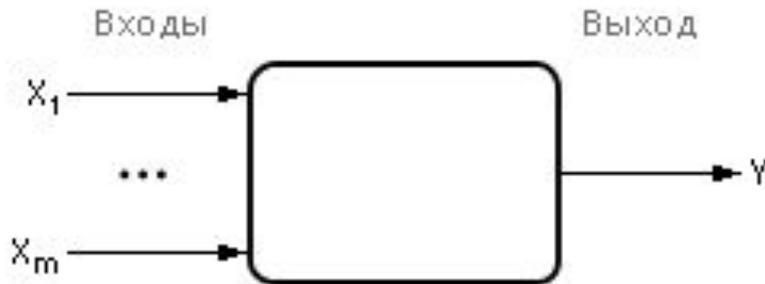
$$W = \ln(Y), B_0 = \ln(A_0), Z_1 = \ln(X_1), Z_2 = \ln(X_2), \\ \dots, Z_m = \ln(X_m).$$

Получим:

$$W = B_0 + A_1 \cdot Z_1 + A_2 \cdot Z_2 + \dots + A_m \cdot Z_m.$$

То есть вновь осуществлен переход к **линейной множественной модели**.

Обратная регрессионная модель



$$Y = \frac{k}{A_0 + A_1 * X_1 + \dots + A_m * X_m}$$

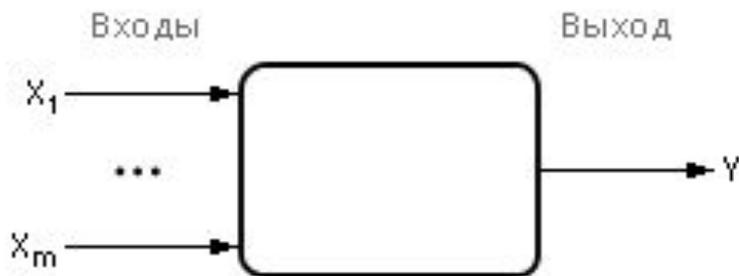
Заменим:

$$W = 1/Y, \quad a_i = A_i/k.$$

И перейдем к линейной множественной модели

$$W = a_0 + a_1 \cdot X_1 + \dots + a_m \cdot X_m.$$

Экспоненциальная модель



$$Y = e^{B_0 + B_1 \cdot X_1 + \dots + B_m \cdot X_m}$$

Прологарифмируем левую и правую части уравнения:

$$\ln(Y) = B_0 + B_1 \cdot X_1 + B_2 \cdot X_2 + \dots + B_m \cdot X_m.$$

Выполним замену

$W = \ln(Y)$ и получим:

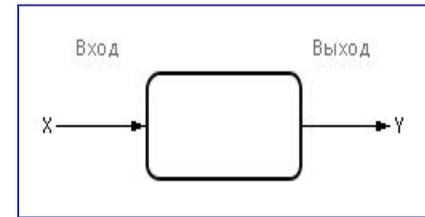
$$W = B_0 + B_1 \cdot X_1 + B_2 \cdot X_2 + \dots + B_m \cdot X_m.$$

Далее пользуемся выражением для **линейной множественной модели**.

Регрессионный анализ нелинейной модели

Получены экспериментальные данные:

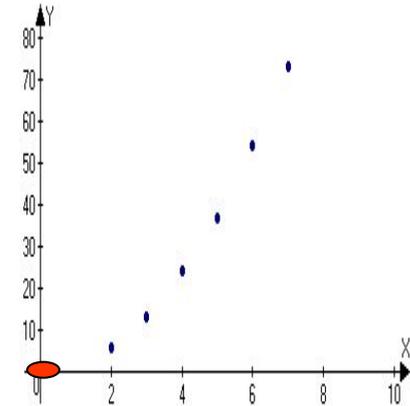
Y	6	13,5	24	37,5	54	73,5
X	2	3	4	5	6	7



Построим новую табличную зависимость с учетом подстановки.

$$Y = Lgy, A_0 = Lga_0 + Lga_1, A_1 = Lgb$$

y	6	13,5	24	37,5	54	73,5
Y=Lgy	0.778	1.13	1.38	1.574	1.732	1.866
x	2	3	4	5	6	7



$$A_0 + A_1 \cdot 2 = 0,778$$

$$A_0 + A_1 \cdot 7 = 1,866$$

Решаем данную систему уравнений и находим значение коэффициентов

$$A_0 = 0,3428 \quad A_1 = 0,2176 \quad A_0 = Lga_0 + Lga_1, \quad A_1 = Lgb$$

По виду зависимости предполагаем, что она проходит через ноль, следовательно

$$a_0 = 0 \quad A_0 = Lga_1,$$

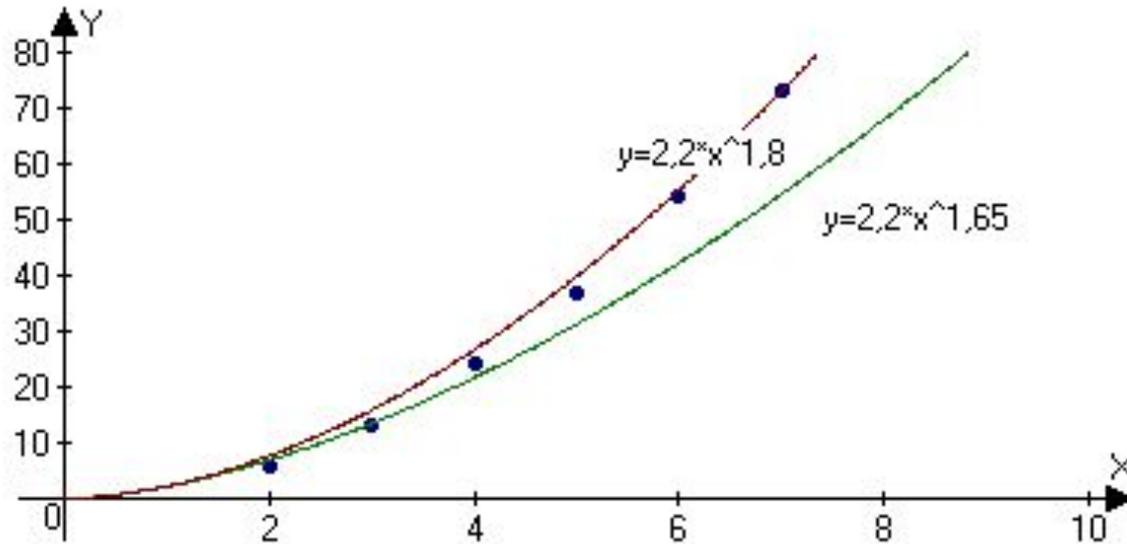
$$a_1 = 10^{0,3428} \quad b = 10^{0,2176} \quad a_1 = 2,2 \quad b = 1,65$$

$$Y = a_0 + a_1 \cdot x^b$$

$$y = 2,2 \cdot x^{1,65}$$

Построим график по полученной зависимости

$$y = 2,2 \cdot x^{1,65}$$



На графике видно, что **полученная зависимость** уходит от экспериментальных данных. По видимости ошибка возникла за счет неточности вычислений. Учитывая, что расчетная кривая имеет меньшую крутизну, можно предположить, что показатель степени при x недостаточен. Попробуем увеличить его до 1,8 и построим график.

Вторая кривая практически совпадает с экспериментальными данными, так что для дальнейшей работы принимаем зависимость следующего вида:

$$y = 2,2 \cdot x^{1,8}$$

The end