

Консервативное звено 2 порядка
 Колебательное звено 2 порядка
 Апериодическое звено 2 порядка
 Модель в виде фильтра Каллмана
 Модель в виде Фурье представления

Звено второго порядка (колебательное)

Такие звенья описываются дифференциальным уравнением вида:

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b U$$

где,
 y – выходной сигнал
 U – входной сигнал
 a, b – коэффициенты уравнения
 t - время

Для звена второго порядка характерны параметры:

$$T^2 = \frac{a_0}{a_2}, \quad 2 \xi T = \frac{a_1}{a_2}, \quad k = \frac{b}{a_2}$$

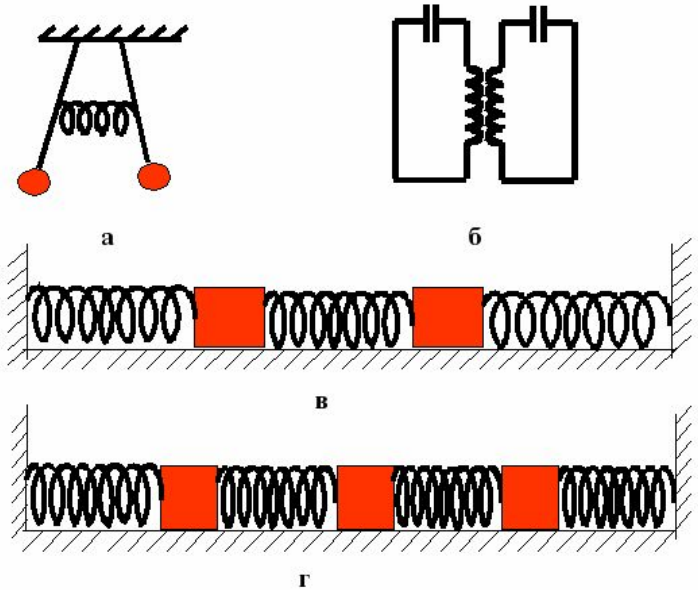
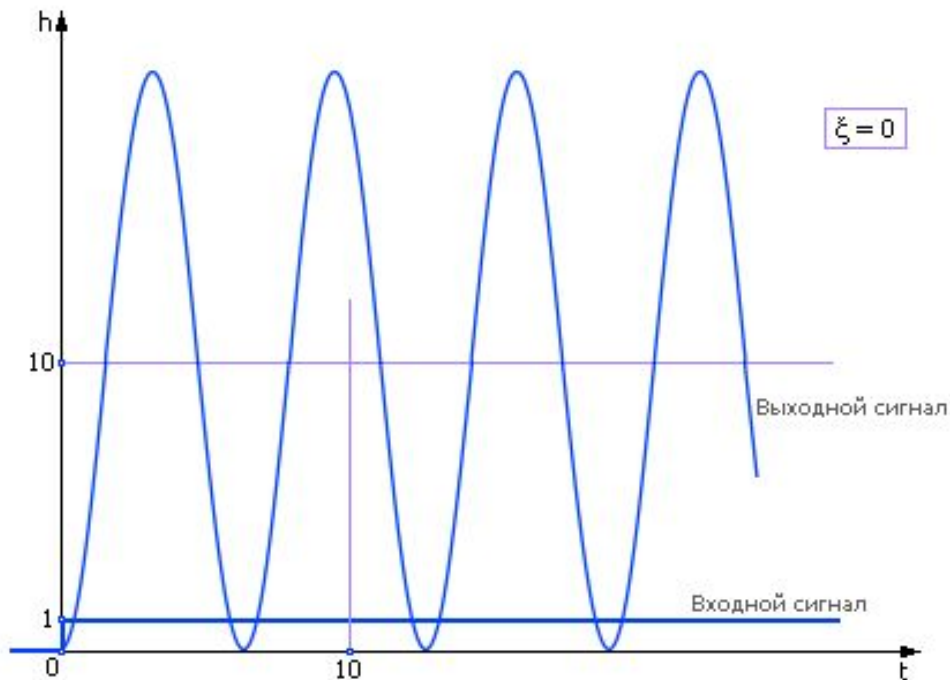
Где,
 T – постоянная времени (в секундах);
 ξ – коэффициент затухания (безразмерная величина);
 k – передаточный коэффициент.

Различают три вида звеньев второго порядка



$\xi = 0$ — консервативное звено второго порядка;

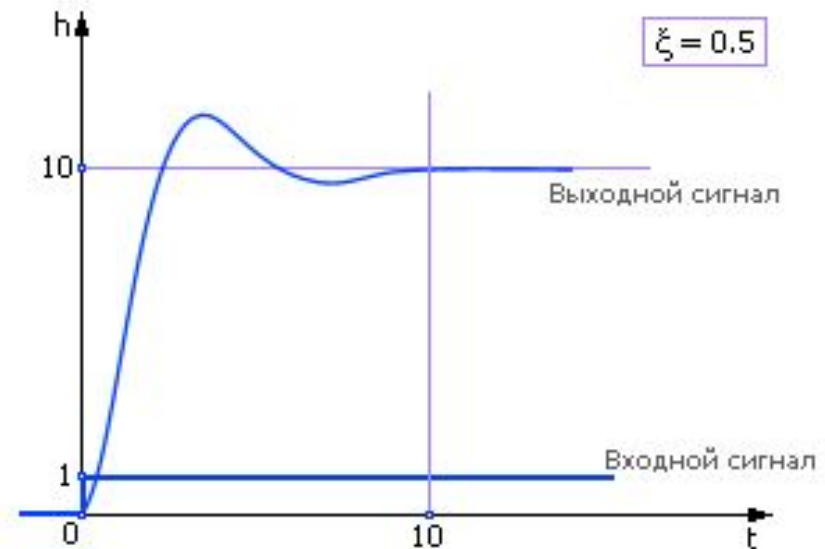
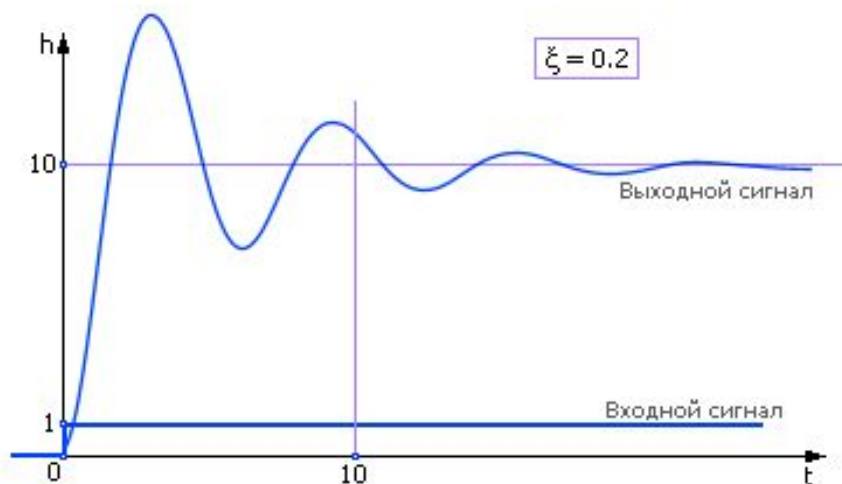
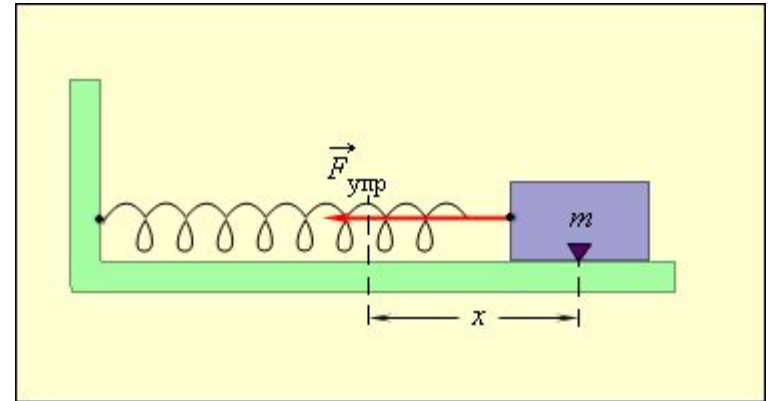
$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b U$$



При подаче на вход единичного сигнала на выходе появляется колебательный гармонический сигнал постоянный по амплитуде и частоте.

$0 < \xi < 1$ — колебательное звено второго порядка;

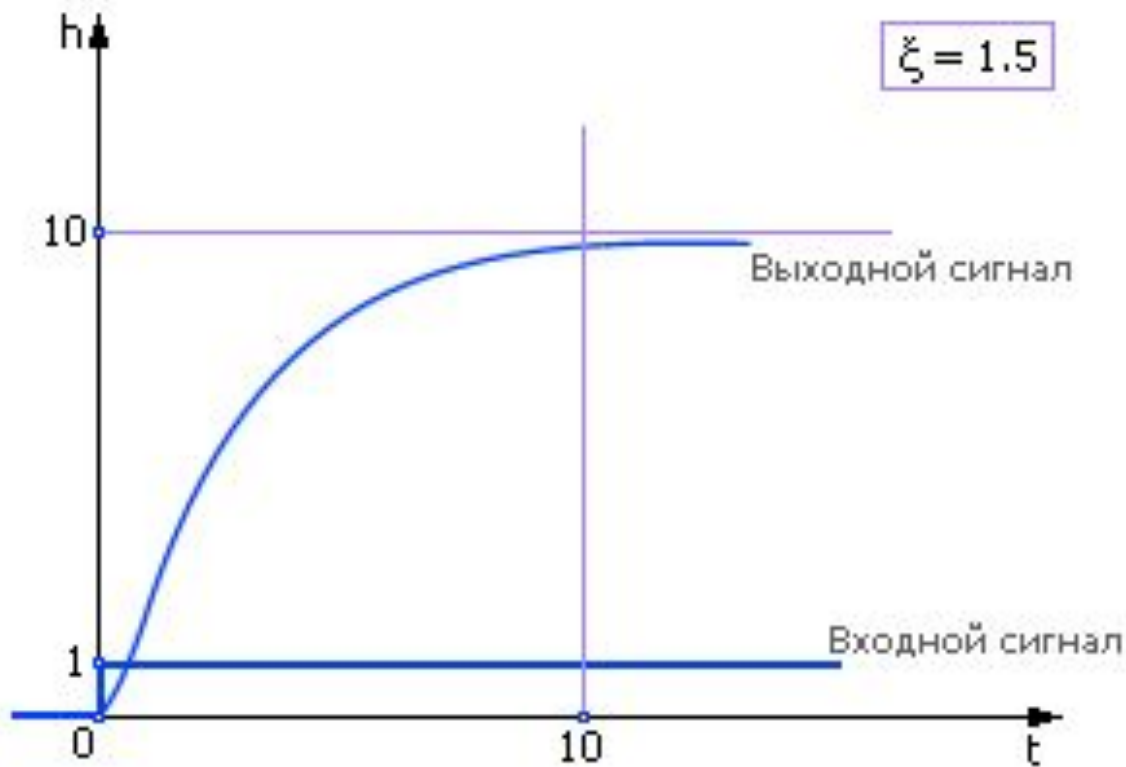
$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b U$$



При подаче на вход единичного сигнала на выходе появляются затухающие колебания. Из графиков видно, что с ростом ξ колебательность звена уменьшается

$\xi \geq 1$ — апериодическое звено второго порядка.

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b U$$



При подаче на вход единичного сигнала выходной сигнал нелинейно нарастает до значения, определенного коэффициентом усиления К. Скорость нарастания сигнала определяется постоянной времени Т



Модель в виде фильтра Каллмана

любой динамический сигнал может быть представлен в виде:

$$Y_i = A_1 \cdot X_i + A_2 \cdot X_{i-1} + \dots + B_1 \cdot Y_{i-1} + B_2 \cdot Y_{i-2} + \dots + C.$$



Идея фильтра Каллмана заключается в том, что выход системы в i -ый момент времени определяется **входным сигналом, его предысторией и предысторией самого состояния системы.**

Чем **больше членов ряда**, то есть чем **больше переменных Y** учитывается в записи модели, тем **глубже память системы.**

Заметим, что наличие члена Y_{i-1} в модели динамической системы соответствует наличию первой производной, Y_{i-2} — второй производной и т. д.

Таблица экспериментальных данных

i	X_i	Y_i
1	X_1	Y_1
2	X_2	Y_2
...
$n - 1$	X_{n-1}	Y_{n-1}
n	X_n	Y_n

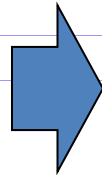


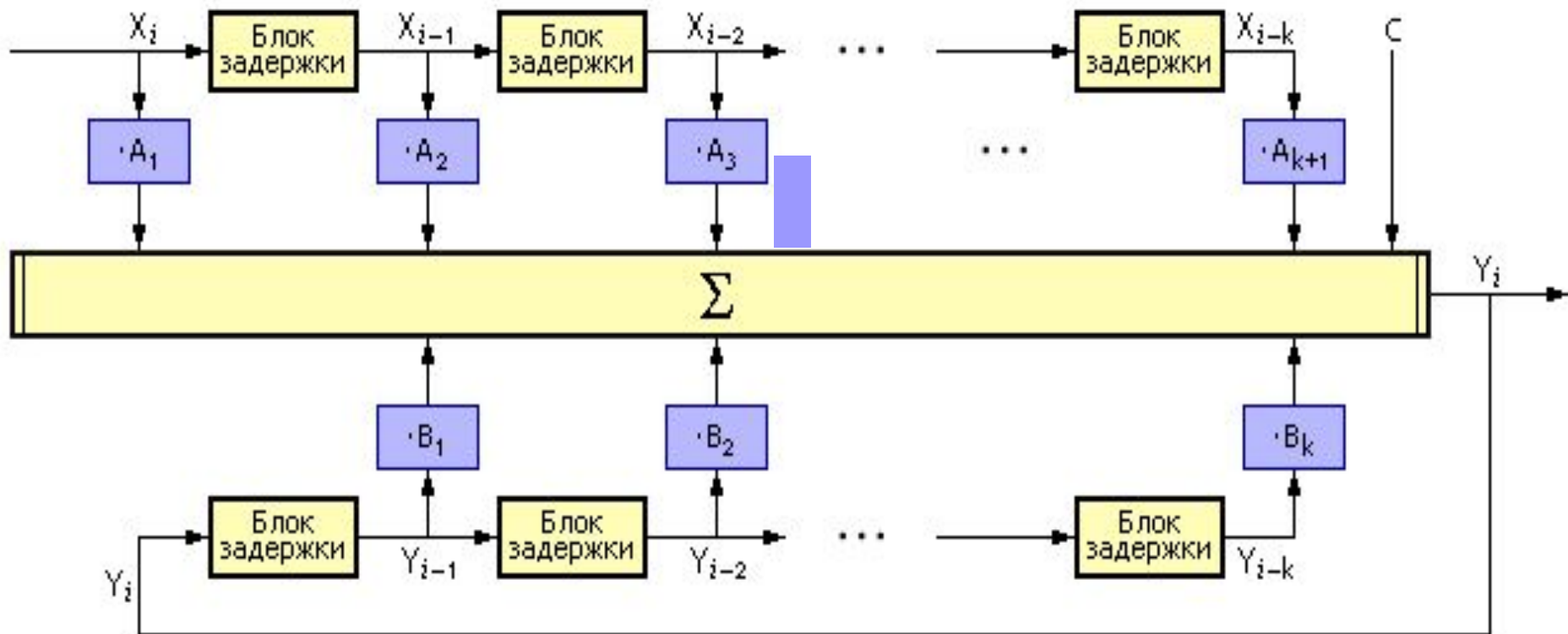
Таблица экспериментальных данных и промежуточных расчетов

i	X_i	X_{i-1}	...	Y_i	Y_{i-1}	Y_{i-2}
m	X_m	X_{m-1}	...	Y_m	Y_{m-1}	Y_{m-2}
$m + 1$	X_{m+1}	X_m	...	Y_{m+1}	Y_m	Y_{m-1}
$m + 2$	X_{m+2}	X_{m+1}	...	Y_{m+2}	Y_{m+1}	Y_m
...

$$Y_i = A1 \cdot X_i + A2 \cdot X_{i-1} + \dots + B1 \cdot Y_{i-1} + B2 \cdot Y_{i-2} + \dots + C.$$

После взятия частных производных от F по $A1, A2, \dots, B1, B2, \dots, C$, приравнивания их к нулю и составления системы уравнений получается линейная множественная регрессионная модель, из которой определяются неизвестные коэффициенты $A1, A2, \dots, B1, B2, \dots, C$ модели.

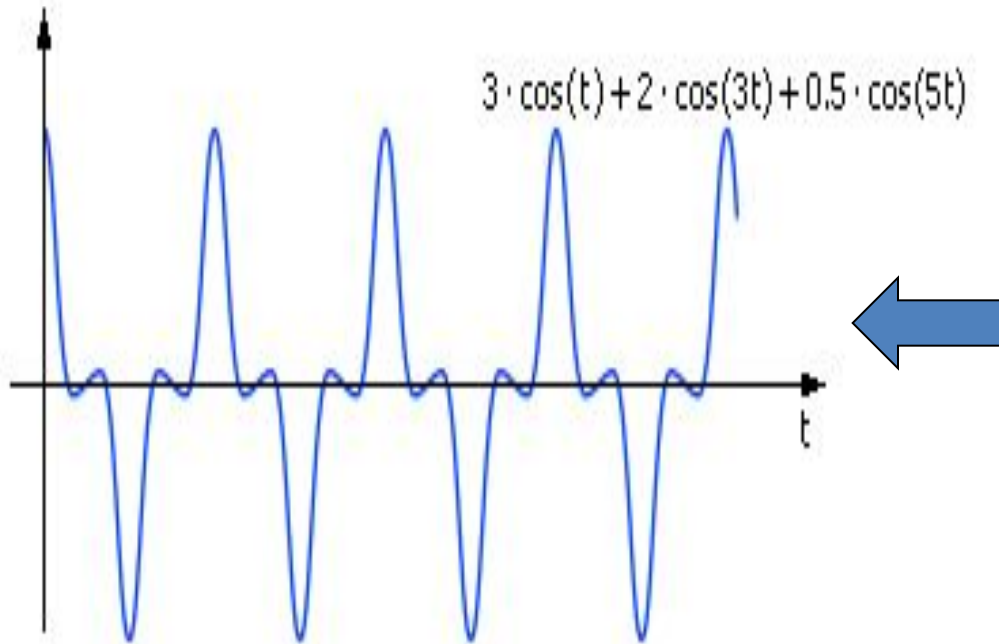
Пример технической реализации фильтра Калмана



«Блок задержки» в представленной реализации необходим для того, чтобы сдвинуть сигнал на такт и получить соседний отсчет для следующей переменной ряда модели

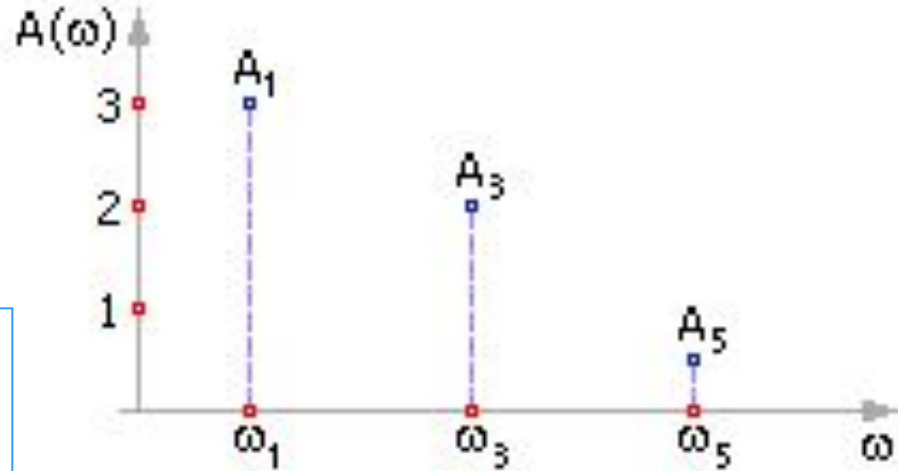
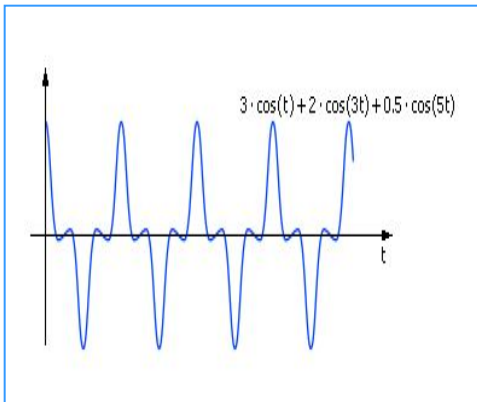
Модель в виде Фурье представления (модель сигнала)

Этот способ моделирования динамических систем основывается на том, что в **любом сигнале** присутствуют гармонические составляющие. В зависимости от частоты, составляющие называются **гармониками** (первая, вторая и так далее). Сумма гармоник с соответствующими весами составляет **модель сигнала**.



В сигнале присутствует сумма трех гармоник
: $3 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \cos(3t) + 0.5 \cdot \cos(5t)$.
Это значит, что в сигнале присутствует первая гармоника с амплитудой 3, третья гармоника с амплитудой 2, пятая гармоника с амплитудой 0.5.

График спектра сигнала (амплитудно-частотная характеристика)



Спектр – это частотная характеристика сигнала. Любой сигнал, сколь сложен бы он ни был, может быть представлен суммой гармоник. Более простой сигнал представляется меньшим числом гармоник, более сложный – большим. Быстро меняющийся сигнал, содержащий резкие пики, имеет в своем составе гармоники высоких порядков. Чем больше гармоник представлено в модели сигнала, тем точнее, в общем случае, модель отражает реальный сигнал.

По характеристикам гармоник и их весам можно восстановить исходный сигнал



Прямое преобразование Фурье

$$A_0 = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) dt$$

$$A_1 = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right) dt$$

$$B_1 = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \sin\left(\frac{2\pi t}{p}\right) dt$$

$$A_2 = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \cos\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right) dt$$

$$B_2 = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \sin\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right) dt$$

.....

.....

$$A_i = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \cos\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) dt$$

$$B_i = \frac{2}{p} \int_0^p X(t) \sin\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) dt$$

.....

.....

где, А,В – веса соответствующих гармоник,
i – номер гармоники,
p – период.



Обратное преобразование Фурье

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + B_1 \sin\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + A_2 \cos\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right) + B_2 \sin\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right) + \dots$$
$$+ A_i \cos\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) + B_i \sin\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) + \dots$$

Моделирование объекта с использованием преобразования Фурье

