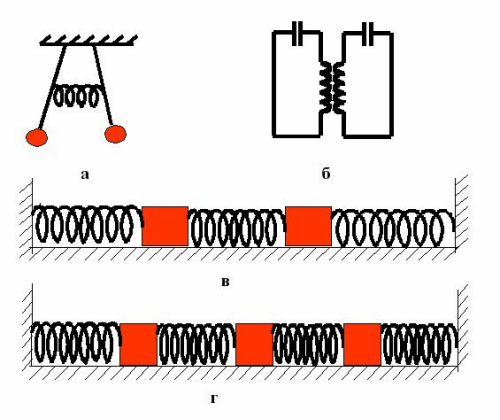



Консервативное звено 2 порядка
Колебательное звено 2 порядка
Апериодическое звено 2 порядка
Модель в виде фильтра Каллмана
Модель в виде Фурье представления

# Звено второго порядка (колебательное)

Такие звенья описываются дифференциальным уравнением вида:

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b U$$

где,
y – выходной сигнал
U – входной сигнал
a,b – коэффициенты уравнения
t - время

Для звена второго порядка характерны параметры:

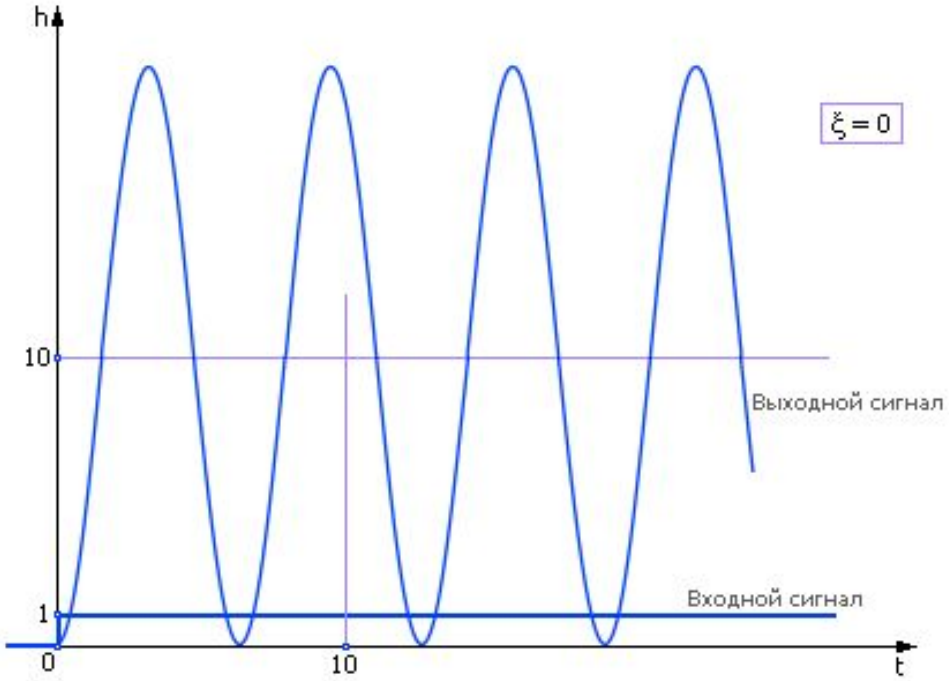
$$T^2 = \frac{a_0}{a_2}, \quad 2\xi T = \frac{a_1}{a_2}, \quad k = \frac{b}{a_2}$$

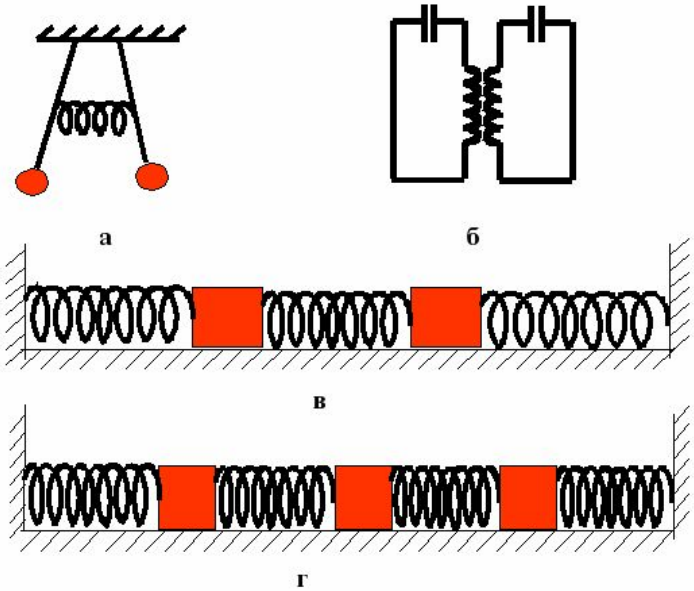
*Где,*
*T* — постоянная времени (в секундах);
*ξ* — коэффициент затухания (безразмерная величина);
*k* — передаточный коэффициент.

Различают три вида звеньев второго порядка

# $\xi = 0$ — консервативное звено второго порядка;

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b U$$

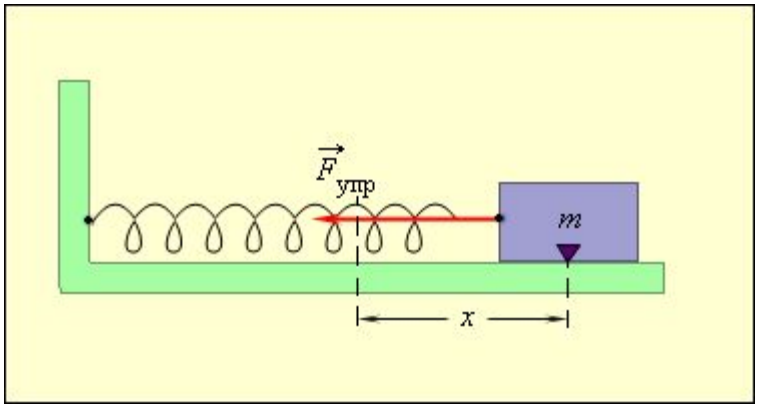


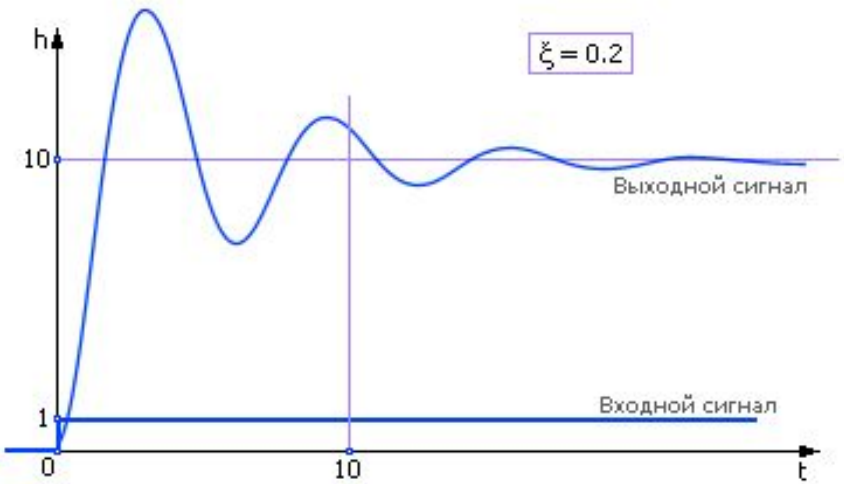



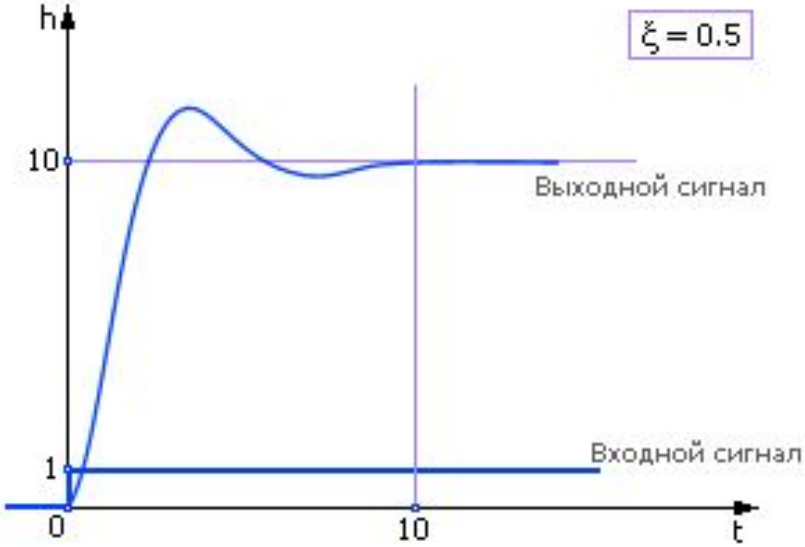

При подаче на вход единичного сигнала на выходе появляется колебательный гармонический сигнал постоянный по амплитуде и частоте.

**0 < ξ < 1** — колебательное звено второго порядка;

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b U$$



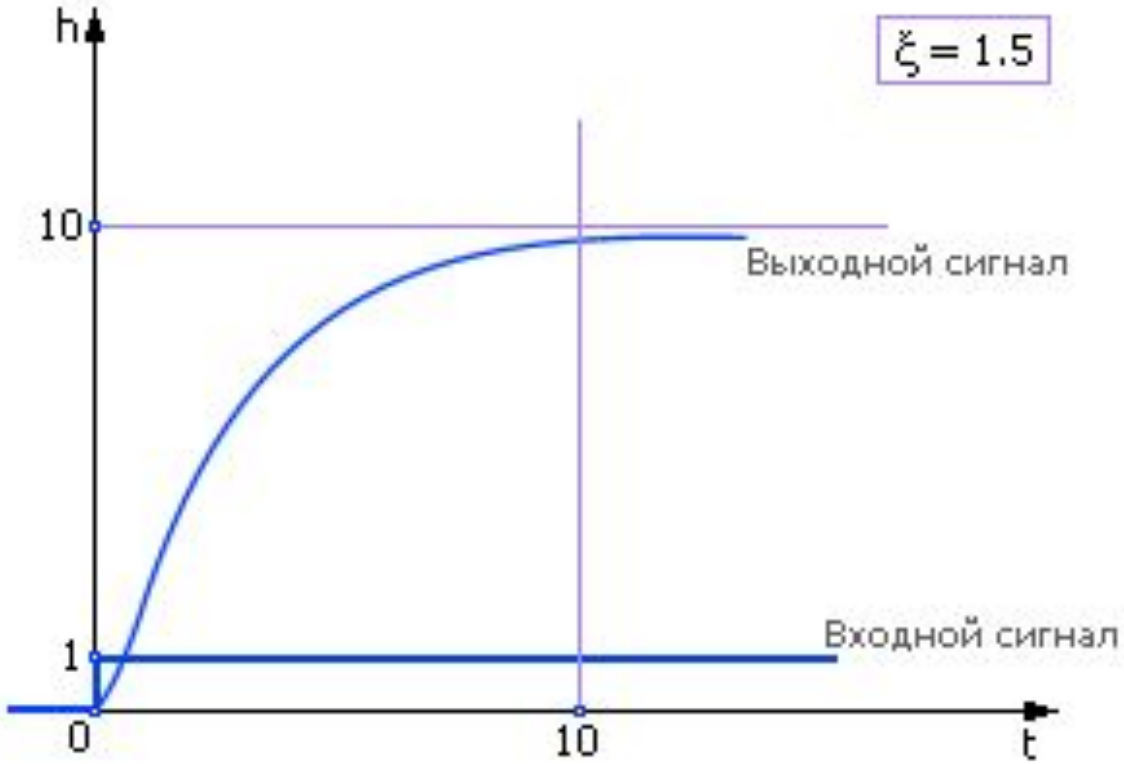




При подаче на вход единичного сигнала на выходе появляются затухающие колебания. Из графиков видно, что с ростом ξ колебательность звена уменьшается

# $\xi \geq 1$ — апериодическое звено второго порядка.

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = b U$$




При подаче на вход единичного сигнала выходной сигнал нелинейно нарастает до значения, определенного коэффициентом усиления К. Скорость нарастания сигнала определяется постоянной времени Т

The end

# Модель в виде фильтра Каллмана

любой динамический сигнал может быть представлен в виде:

$$Yi = A1 \cdot Xi + A2 \cdot Xi - 1 + \ldots + B1 \cdot Yi - 1 + B2 \cdot Yi - 2 + \ldots + C.$$

**Идея фильтра Каллмана** заключается в том, что выход системы в *i*-ый момент времени определяется **входным** сигналом, **его предысторией** и **предысторией самого состояния системы**.
Чем **больше членов ряда**, то есть чем **больше переменных** *Y* учитывается в записи модели, тем **глубже память системы**.
Заметим, что наличие члена *Yi* – 1 в модели динамической системы соответствует наличию первой производной, *Yi* – 2 — второй производной и т. д.

Таблица экспериментальных данных

| $i$ | $X_i$ | $Y_i$ |
|---|---|---|
| 1 | $X_1$ | $Y_1$ |
| 2 | $X_2$ | $Y_2$ |
| … | … | … |
| $n-1$ | $X_{n-1}$ | $Y_{n-1}$ |
| $n$ | $X_n$ | $Y_n$ |

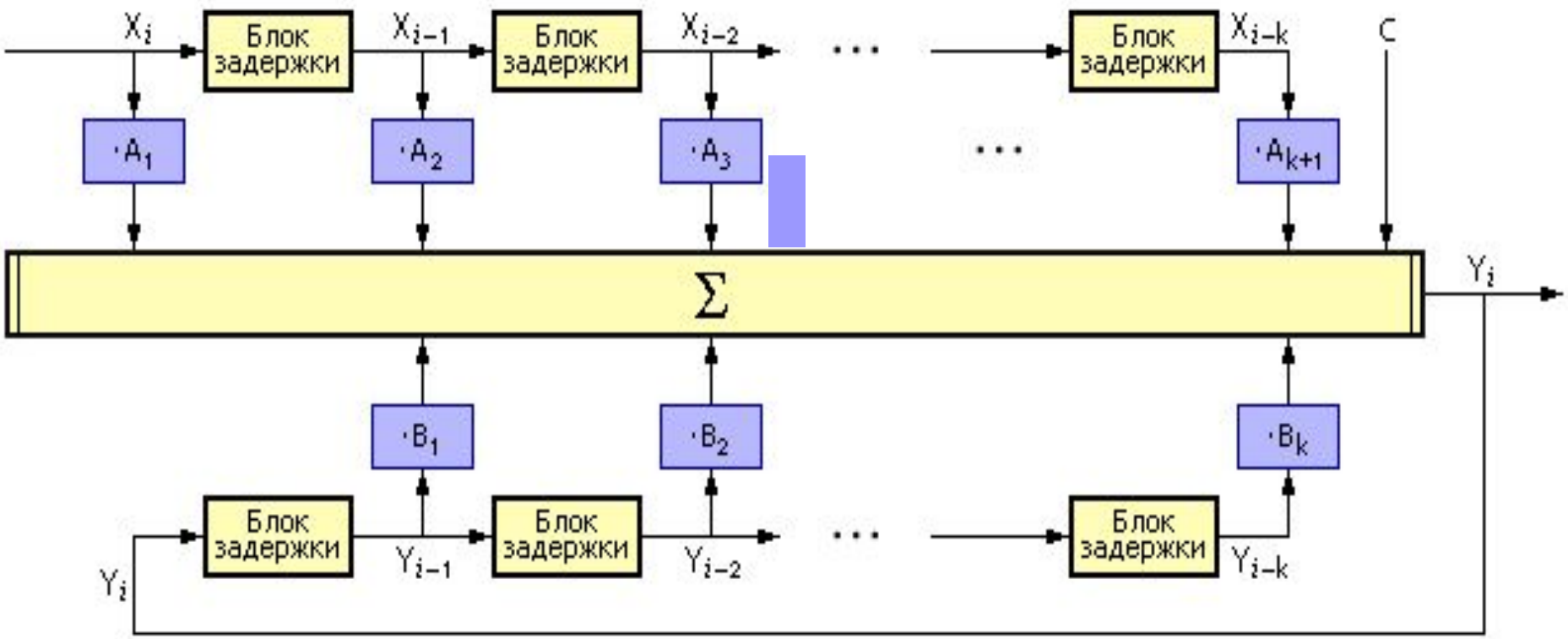
Таблица экспериментальных данных и промежуточных расчетов

| $i$ | $X_i$ | $X_{i-1}$ | … | $Y_i$ | $Y_{i-1}$ | $Y_{i-2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $X_m$ | $X_{m-1}$ | … | $Y_m$ | $Y_{m-1}$ | $Y_{m-2}$ |
| $m+1$ | $X_{m+1}$ | $X_m$ | … | $Y_{m+1}$ | $Y_m$ | $Y_{m-1}$ |
| $m+2$ | $X_{m+2}$ | $X_{m+1}$ | … | $Y_{m+2}$ | $Y_{m+1}$ | $Y_m$ |
| … | … | … | … | … | … | … |

$$Yi = A1 \cdot Xi + A2 \cdot Xi - 1 + \ldots + B1 \cdot Yi - - 1 + B2 \cdot Yi - 2 + \ldots + C.$$

После взятия частных производных от $F$ по $A1$, $A2$, …, $B1$, $B2$, …, $C$, приравнивания их к нулю и составления системы уравнений получается линейная множественная регрессионная модель, из которой определяются неизвестные коэффициенты $A1$, $A2$, …, $B1$, $B2$, …, $C$ модели.

# Пример технической реализации фильтра Каллмана

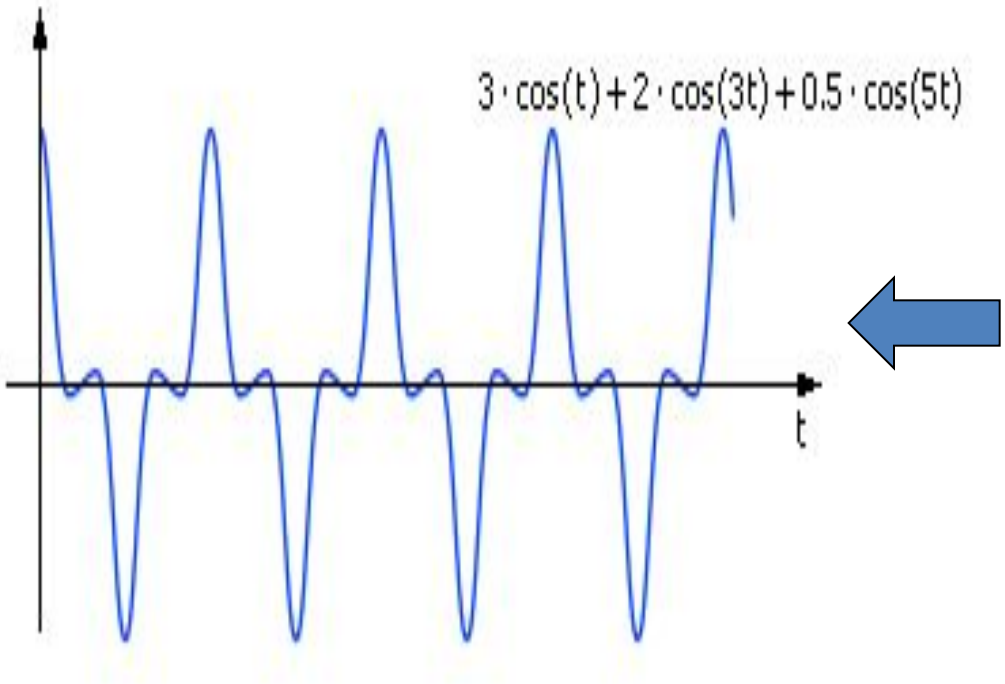



«Блок задержки» в представленной реализации необходим для того, чтобы сдвинуть сигнал на такт и получить соседний отсчет для следующей переменной ряда модели

Конец раздела

# Модель в виде Фурье представления (модель сигнала)

Этот способ моделирования динамических систем основывается на том, что в **любом сигнале** присутствуют гармонические составляющие. В зависимости от частоты, составляющие называются **гармониками** (первая, вторая и так далее). Сумма гармоник с соответствующими весами составляет **модель сигнала**.




В сигнале присутствует сумма трех гармоник :$3 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \cos(3t) + 0.5 \cdot \cos(5t)$. Это значит, что в сигнале присутствует первая гармоника с амплитудой 3, третья гармоника с амплитудой 2, пятая гармоника с амплитудой 0.5.

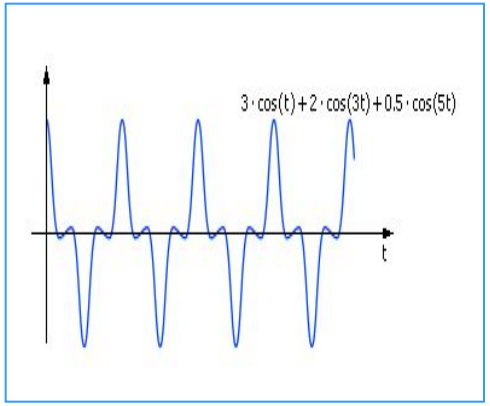
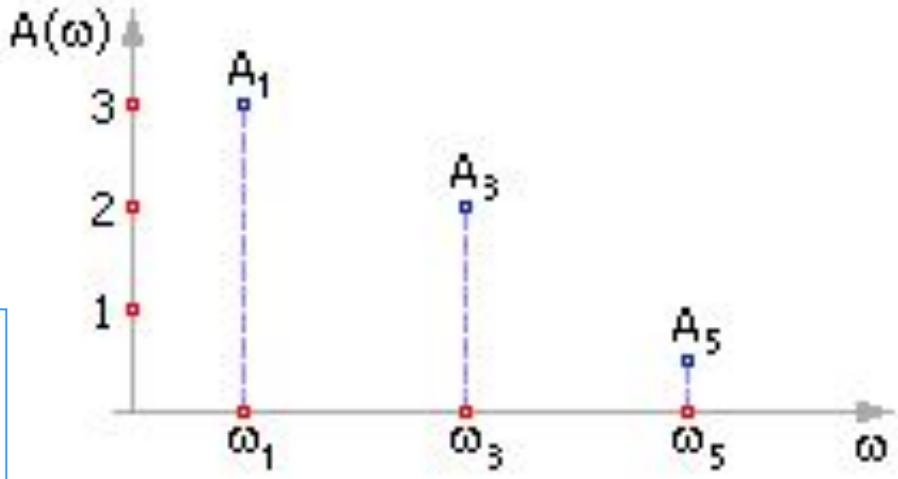



График спектра сигнала
(амплитудно-частотная характеристика)




Спектр – это частотная характеристика сигнала.
Любой сигнал, сколь сложен бы он ни был, может быть представлен суммой гармоник. Более простой сигнал представляется меньшим числом гармоник, более сложный — большим. Быстро меняющийся сигнал, содержащий резкие пики, имеет в своем составе гармоники высоких порядков. Чем больше гармоник представлено в модели сигнала, тем точнее, в общем случае, модель отражает реальный сигнал.

По характеристикам гармоник и их весам можно восстановить исходный сигнал

# Прямое преобразование Фурье

$$A_0 = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\,dt$$

$$A_1 = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right)dt \qquad B_1 = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\sin\left(\frac{2\pi t}{p}\right)dt$$

$$A_2 = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\cos\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right)dt \qquad B_2 = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\sin\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right)dt$$

.....

.....

$$A_i = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\cos\left(\frac{2\pi it}{p}\right)dt \qquad B_i = \frac{2}{p}\int_0^p X(t)\sin\left(\frac{2\pi it}{p}\right)dt$$

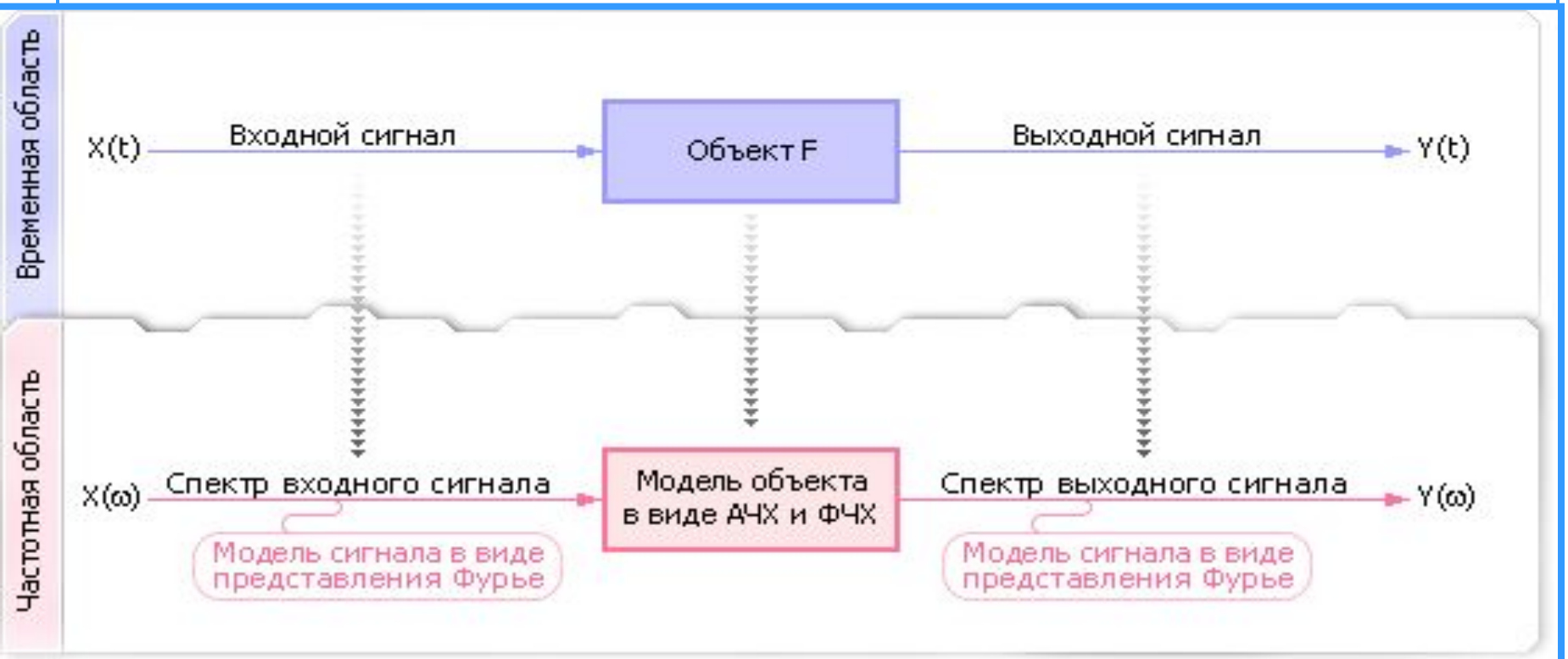
.....

.....

где, A,B – веса соответствующих гармоник,
i – номер гармоники,
p – период.

# Обратное преобразование Фурье

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + B_1\sin\left(\frac{2\pi t}{p}\right) + A_2\cos\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right) + B_2\sin\left(\frac{2\pi 2t}{p}\right) + \ldots$$

$$+ A_i\cos\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) + B_i\sin\left(\frac{2\pi i t}{p}\right) + \ldots$$

Моделирование объекта с использованием преобразования Фурье