СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Система счисления (СС)- способ представления (записи) чисел с помощью некоторых символов (*цифр*)

ИСТОРИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ - 1

Единичная система – количество предметов изображалось нанесением черточек (засечек) на твердую поверхность (10-11 тыс. лет до н.э.)

Алфавитные системы (славянская, греческая, финикийская)– числа от 1 до 9 и целые количества десятков, сотен и т.д. обозначались символами

ИСТОРИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ - 2

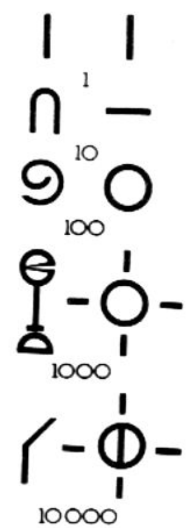
«Особые числа»:

- 1 и 2 – первые числительные, остальные числа получались путем их повторения;
- 3,4 – числительные, связанные с окружающим миром и религией (3 царства, 4 стороны света);
- 5,10,20 – удобство использования для счета (число пальцев);
- 7 – число, связанное с небом (созвездие Б.Медведицы, лунная неделя, планеты-боги, радуга);
- 12 – «дюжина», для счета по пальцам (12 суставов) – время, знаки зодиака;
- 13 – «чертова дюжина», лишнее число
- 60 – время (минуты, секунды), углы
- 100 – «тьма»

ИСТОРИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ - 3

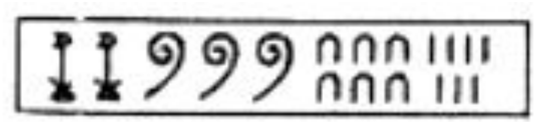
Первые цифры и запись чисел

Египетская -



- Критская

Пример: 2367 =



ИСТОРИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ - 4

Римская система – значение числа равно:

1) сумме значений идущих подряд нескольких одинаковых «цифр» (группы первого вида);

2) разности значений двух «цифр», если слева от большей «цифры» стоит меньшая. В этом случае от значения большей «цифры» отнимается значение меньшей «цифры». Вместе они образуют группу второго вида. Причем левая «цифра» может быть меньше правой максимум на один порядок: так перед L(50) и C(100) из «младших» может стоять только X(10), перед D(500) и M(1000) -только C(100), перед V(5) — только 1(1);

3) сумме значений групп и «цифр», не вошедших в группы первого или второго вида.

Примеры: CDXLIV = (D - C) + (L - X) + (V - I) = 400 + 40 + 4

MCMLXXIV = M + (M - C) + L + (X + X) + (V - I) = 1000 + 900 + 50 + 20 + 4

ИСТОРИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ - 5

Мультипликативные системы – для записи одинакового числа единиц, десятков, сотен или тысяч применяются одни и те же символы, но после каждого символа пишется название сооветствующего разряда (Вавилон, племена Майя, Индия)

Пример: 323 схематично будет выглядеть так:

3Y 2X 3

(где X – обозначение десятков, Y – обозначение сотен)

ИСТОРИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ - 6

Десятичная система – возникла с введением нуля – «О» (от греческого Ouden – «ничто») (Индия, V век н.э.)

ПРИМЕРЫ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

Совре-менная	Египетская (иерофлифич.)	Египетская (иератическая)	Вавилонская	Греческая (аттическая)	Греческая (ионическая)	Римская	Древнееврейская	Индейцев майя	Древнекитайская (палочк.)	Древнекит. (иероглифическая)	Индийск. (деванагари)	Арабская (алфавит)	Арабская (современная)	Арабская (гобари)
1	𓏺		𒁹	Ι	A	I	א	•	𝍠	一	१	ا	١	1
2	𓏻		𒈫	ΙΙ	B	II	ב	••	𝍡	二	२	ب	٢	2
3	𓏼		𒐈	ΙΙΙ	Γ	III	ג	•••	𝍢	三	३	ج	٣	3
4	𓏽		𒐉	ΙΙΙΙ	Δ	IIII	ד	••••	𝍣	四	४	د	٤	4
5	𓏾		𒐊	𐅃	E	V	ה	—	𝍤	五	५	ه	٥	5
6	𓏿		𒐋	𐅃Ι	F	VI	ו	𝋦	𝍥	六	६	و	٦	6
7	𓐀		𒑂	𐅃ΙΙ	Z	VII	ז	𝋧	𝍦	七	७	ز	٧	7
8	𓐁		𒑄	𐅃ΙΙΙ	H	VIII	ח	𝋨	𝍧	八	८	ح	٨	8
9	𓐂		𒑆	𐅃ΙΙΙΙ	Θ	IX	ט	𝋩	𝍨	九	९	ط	٩	9
10	𓎆		𒌋	Δ	I	X	י	𝋪	𝍩	十	१०	ي	١٠	10
20	𓎇		𒎙	ΔΔ	K	XX	כ		𝍪	二十	२०	ك	٢٠	20

ПОЗИЦИОННЫЕ И НЕПОЗИЦИОННЫЕ СС

В *непозиционных* системах счисления вес цифры не зависит от позиции, которую она занимает в числе (XXXL)

В *позиционных* системах счисления вес каждой цифры изменяется в зависимости от ее позиции в последовательности цифр, изображающих число (243, 324, 432)

ПОЗИЦИОННЫЕ СС

Количественное значение (*величина*) цифры определяется ее видом и положением в записи числа

Основание системы счисления – количество различных цифр, используемых для представления числа

Основание 10 у привычной десятичной системы счисления (десять пальцев на руках). Алфавит: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.
Основание 60 придумано в Древнем Вавилоне: деление часа на 60 минут, минуты — на 60 секунд, угла — на 360 градусов.
Основание 12 распространили англосаксы: в году 12 месяцев, в сутках два периода по 12 часов, в футе 12 дюймов.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЛА - 1

Позиция цифры в числе называется *разрядом*.

$\mathbf{A}_q = \mathbf{a}_{n-1}\times q^{n-1} + \ldots + \mathbf{a}_1\times q^1 + \mathbf{a}_0\times q^0 + \mathbf{a}_{-1}\times q^{-1} + \ldots + \mathbf{a}_{-m}\times q^{-m}$,
где

q — основание системы счисления (*количество используемых цифр*)

$\mathbf{A}_q$ — число в системе счисления с основанием q

a — цифры многоразрядного числа A_q

n (m) — количество целых (дробных) разрядов числа A_q

Пример:

2 1 0 -1 -2

$239{,}45_{10} = 2\times10^2 + 3\times10^1 + 9\times10^0 + 4\times10^{-1} + 5\times10^{-2}$.

$a_2\ a_1\ a_0,\ a_{-1}\ a_{-2}$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЛА - 2

Одно и то же число может быть представлено в различных системах счисления (с разными основаниями)

$$\mathbf{101111_2} \leftarrow [47] \rightarrow \mathbf{57_8}$$

$$\mathbf{1202_3} \leftarrow [47] \rightarrow \mathbf{47_{10}}$$

$$\mathbf{223_4} \leftarrow [47] \rightarrow \mathbf{2F_{16}}$$

[.] – значение числа. Для простоты понимания значение числа всегда указывается в десятичной СС

ПЕРЕВОД ЧИСЛА $N_p \Rightarrow N_q$

Перевод числа из одной СС в другую осуществляется в два этапа:

1) переводится целая часть числа;
2) переводится дробная часть числа.

ПЕРЕВОД ЧИСЛА $N_p \Rightarrow N_q$.

(правило перевода целой части числа)

Для перевода целого числа N_p в число N_q необходимо N_p делить на основание q (по правилам, принятым в $СС_p$) до получения целого остатка, меньшего q. Полученное частное снова необходимо делить на основание q до получения целого остатка, меньшего q и т.д. до тех пор, пока последнее частное не будет меньше q.

Число N_q представится в виде упорядоченной последовательности цифр $СС_q$ (остатков от деления) в порядке, обратном получению, причем старшую цифру числа N_q даст последнее частное

ПЕРЕВОД ЧИСЛА $N_p \Rightarrow N_q$.

(правило перевода дробной части числа)

Перевод правильной дроби N_p в число N_q заключается в последовательном умножении дроби N_p на основание q (по правилам, принятым в $СС_p$), причем перемножению подвергается только дробная часть.

Дробь N_q представится в виде упорядоченной последовательности целых частей произведений в порядке их получения.

В общем случае при переводе может возникать погрешность вследствие конечности разрядной сетки. Если требуемая точность перевода есть q^{-k}, то число указанных произведений должно быть равно k.

ПЕРЕВОД ЧИСЛА $N_p \Rightarrow N_q$.

(упражнения)

$349_{10} \rightarrow ?_4$

$0{,}41_{10} \rightarrow ?_2$

$24{,}18_{10} \rightarrow ?_3$

$534_{10} \rightarrow ?_{16}$

...

$3A_{16} \rightarrow ?_4$

$2{,}7_8 \rightarrow ?_{10}$

$3{,}7_8 \rightarrow ?_2$

...

ПЕРЕВОД ЧИСЛА $N_8 \Rightarrow N_2$, $N_{16} \Rightarrow N_2$

Перевод восьмеричных и шестнадцатеричных чисел в двоичную систему: каждую цифру заменить эквивалентной ей двоичной *триадой* (тройкой цифр) или *тетрадой* (четверкой цифр).

Примеры:

$$5371_8 = \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{001}_{1}{}_2;$$

$$1A3F_{16} = \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{1111}_{F}{}_2$$

ПЕРЕВОД ЧИСЛА $N_2 \Rightarrow N_8$, $N_2 \Rightarrow N_{16}$

Чтобы перевести число из <u>двоичной</u> системы в <u>восьмеричную</u> или <u>шестнадцатеричную</u>, его нужно разбить влево и вправо от запятой на *триады* (для восьмеричной) или *тетрады* (для шестнадцатеричной) и каждую такую группу заменить соответствующей восьмеричной (шестнадцатеричной) цифрой.

Примеры:

$1101010000111_2 = 1\ \ 5\ \ \ 2\ \ \ 0\ \ \ 7_8$;

1 101 010 000 111

$110111000001101_2 = \ \ 6\ \ \ \ E\ \ \ \ 0\ \ \ \ D_{16}$

110 1110 0000 1101

ДВОИЧНАЯ АРИФМЕТИКА

Таблица сложения	Таблица вычитания	Таблица умножения
0 + 0 = 0	0 – 0 = 0	0 × 0 = 0
1 + 0 = 1	1 – 0 = 1	1 × 0 = 0
0 + 1 = 1	1 – 1 = 0	1 × 1 = 1
1 + 1 = 10	10 – 1 = 1	

```
   1 1 0 1 1
 1 0 1 1 0 1
-------------
1 0 0 1 0 0 0


1 0 0 1 0 0 0
-------------
 1 0 1 1 0 1
   1 1 0 1 1
```

```
1 1 0 1 0 1 0 0 1 | 1 0 0 0 1
1 0 0 0 1         |----------
-----------         1 1 0 0 1
  1 0 0 1 1
  1 0 0 0 1
  ---------
      1 0 0 0 1
      1 0 0 0 1
      ---------
      0 0 0 0 0
```

```
        1 1 0 0 1
        1 0 0 0 1
        1 1 0 0 1
-----------------
      0 0 0 0 0 _
    0 0 0 0 0 _ _
  0 0 0 0 0 _ _ _
1 1 0 0 1 _ _ _ _
-----------------
1 1 0 1 0 1 0 0 1
```

КОДЫ И КОДИРОВАНИЕ ЧИСЕЛ -1

Код – это правило, описывающее отображение одного набора знаков в другой набор знаков.

Кодом также называют *множество образов*, получаемых при этом отображении.

Примеры:

[45] = 101101_2 (двоичное кодирование и двоичный код)

«A», «B», «1», «a», «+»,... = 65, 66, 49, 97, 43,..

(ASCII-код)

КОДЫ И КОДИРОВАНИЕ ЧИСЕЛ -2

Примеры кодов:

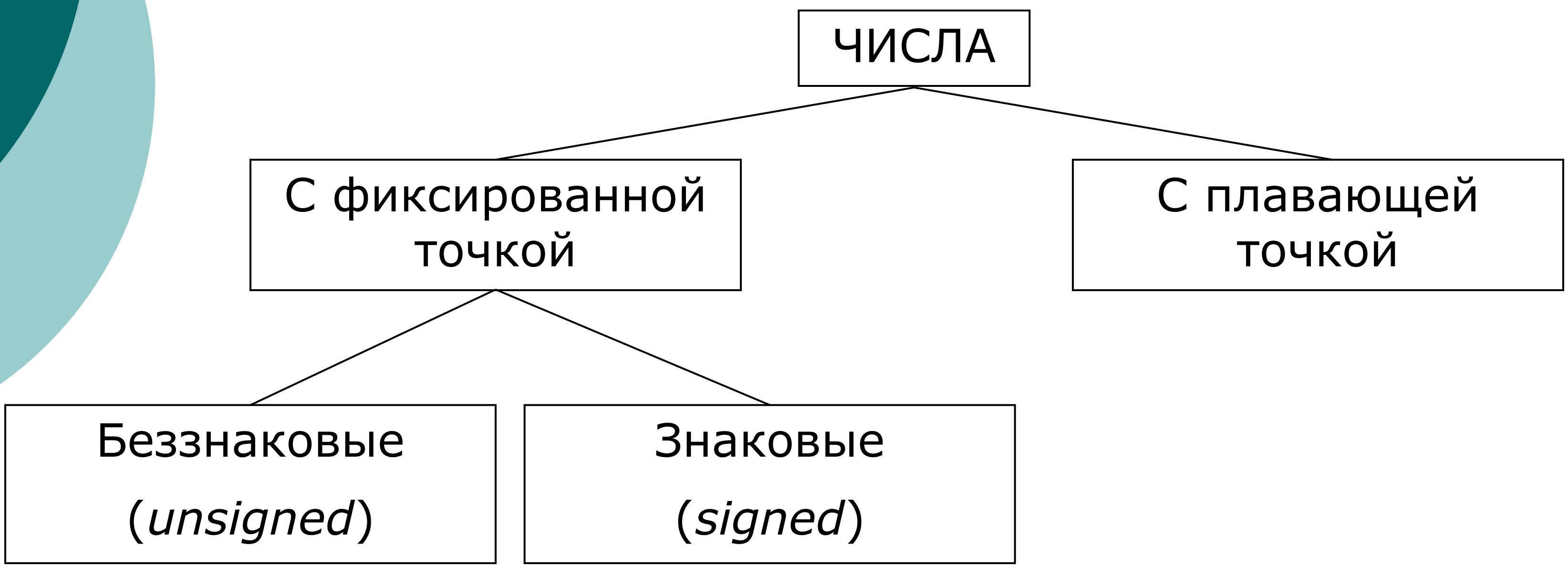
-*код Бэкона* (1561-1626) – каждый символ представляется комбинацией из пяти символов «A» и «B»:

a = AAAAA, k = ABAAB, t = BAABA

-*код Грея* – соседние слова отличаются не более, чем в одном разряде:

N	Двоичный код	Код Грея	N	Двоичный код	Код Грея
0	000	000	4	100	110
1	001	001	5	101	111
2	010	011	6	110	101
3	011	010	7	111	100

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В ЭВМ -1



В языках программирования высокого уровня (C/C++, Pascal) некоторые типы «по умолчанию» являются знаковыми (например, `int` ≡ `signed int`), а некоторые – беззнаковыми (например, `char` ≡ `unsigned char`).

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В ЭВМ -2

Числа с плавающей точкой:
при выполнении операций местоположение точки в записи числа изменяется таким образом, чтобы слева от точки оставался один разряд, а смещение точки описывалось экспонентой:

$$\begin{array}{r} 4.8 * 10^{1} \\ 5.6 * 10^{1} \\ \hline 10.4 * 10^{1} \end{array} \rightarrow \mathbf{1.04 * 10^{2}}$$

Формат (IEEE-754)	*S*	*E*	*M*	*Диапазон чисел:*
Single Precision (32)	1 (31)	8 (30 – 23)	23 (22-00)	от ± $\sim 10^{-44.85}$ до $\sim 10^{38.53}$
Double Precision (64)	1 (63)	11 (62 - 52)	52 (51-00)	от ± $\sim 10^{-323.3}$ до $\sim 10^{308.3}$

Достоинства: большой диапазон обрабатываемых значений

Недостатки: сложность в реализации устройства обработки

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ В ЭВМ -3

Числа с фиксированной точкой: местоположение точки в записи числа не изменяется.
Точка, разделяющая целую и дробную часть, *теоретически* может располагаться между любыми двумя разрядами.
На *практике* для *целых* ФЗ-чисел считается, что точка расположена слева от самого младшего разряда: 01011001**.**

$$\begin{array}{r} 48. \\ 56. \\ \hline 104. \end{array}$$

Достоинства: простота реализации устройства обработки, высокая точность, интуитивная понятность

Недостатки: малый диапазон возможных значений

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ БЕЗ ЗНАКА

Представление беззнакового (unsigned) числа соответствует его записи в заданной системе счисления (обычно двоичной или шестнадцатеричной)

Машинное представление числа (беззнакового или знакового) выполняется с учетом разрядности *n* машинного слова

Диапазон представления беззнаковых чисел:

$$0 \le x \le 2^n-1$$

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ СО ЗНАКОМ

Знаковые (signed) числа представляются в ЭВМ:

- в прямом коде;
- в обратном коде;
- в дополнительном коде

Для обозначения знака числа в этих кодах выделяется специальный знаковый разряд, в котором записывается «0» для положительного числа и «1» для отрицательного числа.

Знаковый разряд всегда располагается слева от цифровых разрядов.

ПРЯМОЙ КОД

Число представляется в виде его абсолютного значения и кода знака

$$[x]_{\text{пр}} = \begin{cases} |x|, & \text{если } x \geq 0; \\ 2^{n-1} + |x|, & \text{если } x \leq 0 \end{cases}$$

Диапазон представления:

$$1-2^{n-1} \leq x \leq 2^{n-1} - 1$$

Представления «0»:

$$[+0]_{\text{пр}} = 0'00\ldots0_2$$

$$[-0]_{\text{пр}} = 1'00\ldots0_2$$

ПРЯМОЙ КОД (пример)

Представить в прямом коде для n=5, n=8

x = [13] x = [-13]

$$/x/ = /13/_{10} = 1101_2 = D_{16}$$

<u>n=5:</u> [13] = 0’1101$_{пр,2}$	[-13] = 1’1101$_{пр,2}$
<u>n=8:</u> [13] = 0’0001101$_{пр,2}$ = 0D$_{пр,16}$	[-13] = 1’0001101$_{пр,2}$ = 8D$_{пр,2}$

ОБРАТНЫЙ КОД

Обратный код положительного числа $x \geq 0$ содержит «0» в старшем знаковом разряде и обычное представление x в остальных разрядах.

Если $x \leq 0$, то знаковый разряд содержит «1», а остальные разряды содержат инвертированные значения

$$[x]_{\text{обр}} = \begin{cases} |\,x\,|, & \text{если x} \geq 0; \\ (2^{n-1} - 1) - |\,x\,|, & \text{если x} \leq 0 \end{cases}$$

Диапазон представления:

$$1-2^{n-1} \leq x \leq 2^{n-1} - 1$$

Представления «0»:

$$[+0]_{\text{обр}} = 0'00\ldots0_2$$

$$[-0]_{\text{обр}} = 1'11\ldots1_2$$

ОБРАТНЫЙ КОД (пример)

Представить в обратном коде для n=5, n=8

$$x = [13] \qquad\qquad x = [-13]$$

$$/x/ = /13/_{10} = 1101_2 = D_{16}$$

<u>n=5:</u> $[13] = 0'1101_{пр,2} =$ $= 0'1101_{обр,2}$	$[-13] = 1'1101_{пр,2} =$ $= 1'0010_{обр,2}$
<u>n=8:</u> $[13] = 0'0001101_{пр,2} = 0D_{пр,16} =$ $= 0'0001101_{обр,2} = 0D_{обр,16}$	$[-13] = 1'0001101_{пр,2} = 8D_{пр,2} =$ $= 1'1110010_{обр,2} = F2_{обр,16}$

ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ В ОБРАТНОМ КОДЕ

Коды слагаемых суммируются, включая знаковый разряд, с циклическим (круговым) переносом.

Результат верен, если не произошло переполнение.

Переполнение происходит тогда, когда перенос в знаковый разряд (C_s) не равен переносу из знакового разряда (C_{s+1})

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КОД

Дополнительный код положительного числа $x \geq 0$ содержит «0» в старшем знаковом разряде и обычное представление x в остальных разрядах (совпадает с прямым и обратным).

Если $x \leq 0$, то знаковый разряд содержит «1», а остальные разряды содержат дополнение модуля исходного числа до 2^{n-1}.

$$[x]_{\text{доп}} = \begin{cases} |x|, & \text{если x} \geq 0; \\ 2^{n-1} - |x|, & \text{если x} < 0 \end{cases}$$

Диапазон представления:

$$-2^{n-1} \leq x \leq 2^{n-1} - 1$$

Представление «0»:

$$[0]_{\text{обр}} = 0'00...0_2$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КОД (пример)

Представить в дополнительном коде для n=5, n=8

x = [13] x = [-13]

$/x/ = /13/_{10} = 1101_2 = D_{16}$

<u>n=5:</u> $[13] = 0'1101_{пр,2} =$ $= 0'1101_{обр,2} =$ $= 0'1101_{доп,2}$	$[-13] = 1'1101_{пр,2} =$ $= 1'0010_{обр,2} =$ $= 1'0011_{доп,2}$
<u>n=8:</u> $[13] = 0'0001101_{пр,2} = 0D_{пр,16} =$ $= 0'0001101_{обр,2} = 0D_{обр,16} =$ $= 0'0001101_{доп,2} = 0D_{доп,16}$	$[-13] = 1'0001101_{пр,2} = 8D_{пр,2} =$ $= 1'1110010_{обр,2} = F2_{обр,16} =$ $= 1'1110011_{доп,2} = F3_{доп,16}$

ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ В ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ КОДЕ

Коды слагаемых суммируются, включая знаковый разряд. Перенос (если он есть) отбрасывается.

Результат верен, если не произошло переполнение.

Переполнение происходит тогда, когда перенос в знаковый разряд (C_s) не равен переносу из знакового разряда (C_{s+1})

УВЕЛИЧЕНИЕ РАЗРЯДНОСТИ ЧИСЕЛ ПРИ ПРИСВАИВАНИИ

Для беззнаковых (unsigned) чисел поле расширения в переменной-результате заполняется нулями

Для знаковых (signed) чисел поле расширения в переменной-результате заполняется знаковым битом

В языках высокого уровня способ расширения выбирается и реализуется компилятором по типу данных автоматически

В Ассемблере программист самостоятельно выбирает способ реализации расширения разрядности переменной

УМНОЖЕНИЕ ЦЕЛОГО ЧИСЛА НА КОНСТАНТУ ПОСРЕДСТВОМ СДВИГОВ

Сдвиг *беззнаковых* (*unsigned*) или *знаковых* (*signed*) числа **влево** на *n* двоичных разрядов приводит к его **умножению** на 2^n

Если переменную *V* необходимо умножить на константу *C*, то константа *C* представляется в виде суммы степеней числа 2, а результат умножения записывается как сумма сдвигов числа *V* на показатели степеней.

Пример: *V = V * 25;* $C = 25 = 11001_2 = 16+8+1 = 2^4 + 2^3 + 2^0$

V = *V*(16+8+1) = V*16 + V*8 + V =* ***(V<<4) + (V<<3) + V***

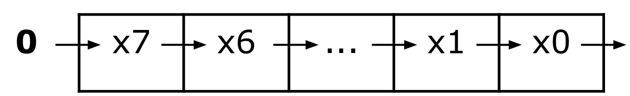
Достоинства: сдвиги и сложения выполняются быстрее, чем умножение

Недостатки: формула зависит от конкретного значения C, т.е. нельзя таким способом перемножить две переменных.

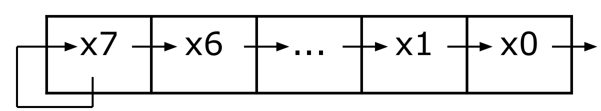
ДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОГО ЧИСЛА НА 2^n ПОСРЕДСТВОМ СДВИГОВ

Сдвиг *беззнаковых* (*unsigned*) или *знаковых* (*signed*) числа **вправо** на *n* двоичных разрядов приводит к его **делению** на 2^n

Для сдвига вправо *беззнаковых (unsigned)* чисел используется *логический* сдвиг:



Для сдвига вправо *знаковых (signed)* чисел используется *арифметический* сдвиг:



Пример: *V = V / 16;* $C = 16 = 10000_2 = 2^4$ ***V = (V>>4);***

Достоинства: сдвиги выполняются быстрее, чем деление. Компилятор автоматически выбирает правильную команду сдвига (по типу данных)

Недостатки: фактор сдвига зависит от конкретного значения *C*, таким способом нельзя выполнить деление на переменную или число $\neq 2^n$