Предел функции

1. Предел функции в точке

- Функция *f(x)* определена в окрестности точки *a* (конечной или бесконечной), если *a* конечная точка, то в самой точке *f(x)* может быть и не определена.
- **Пояснение:** если с приближением точки *x* к точке *a* соответствующие значения *f(x)* приближаются к точке *A* (конечной или бесконечной) таким образом, что для *X* принадлежащих достаточно малой окрестности $R_\delta(a)$ значения *f(x)* принадлежат сколь угодно малой окрестности $R_\varepsilon(A)$, то *f(x)* стремится к пределу *A* при *x* стремящемся к *a*.

- **Определение**: Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящимся к x_0, если для любого, сколь угодно малого, наперед заданного, положительного числа ε, найдется такое положительное число δ, зависящее от ε ($\delta = \delta(\varepsilon) > 0$), что из условия $x \in R_\delta(x_0)$ ($x \neq x_0$, если x_0 - число) следует, что $f(x) \in R_\varepsilon(A)$.
- Обозначение:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} A$

- На языке неравенств
- 2. Односторонние пределы.

3. Предел функции натурального аргумента. Предел последовательности

- Если область определения функции – множество натуральных чисел N, то аргумент обычно обозначают n.
- $y=f(n)$, $n \in N$ – функция натурального аргумента.
- Интересует поведение $f(n)$ при $n \to \infty$, т.е. $n=1,2,3,\ldots$

4. Признаки существования предела.

- Теорема 1.
- Теорема « о двух милиционерах»

- Теорема 2.
- Если функция f(x) ограничена и монотонна в некоторой окрестности точки *a*, то:
- 1) f(x) имеет в точке *a* оба конечных односторонних предела, если *a* – конечная точка.
- 2) существует конечный предел f(x), если $a=\infty$

5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

- **Определения:**

1. Функция f(x) называется б.м. в точке *a* (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

2. Функция f(x) называется б.б. в точке *a* (или при $x \to a$), если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Точка *a* может быть как конечной, так и бесконечной точкой.

- **<u>Теорема 1.</u>** (связь между б.м. и б.б. величинами).

- 1. Если f(x) б.м. в точке *a*, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - б.б. в точке *a*.
- 2. Если f(x) б.б. в точке *a*, то $\dfrac{1}{f(x)}$ - б.м. в точке *a*.
- <u>Доказательство:</u>

Пусть f(x) б.м. в точке *a*, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

- Это означает, что $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta(\varepsilon)>0:\ \forall\, x \in R_\delta(a) \Rightarrow$
- $|f(x)-0|<\varepsilon$, или $|f(x)|<\varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{|f(x)|} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$$

- Итак, $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon)>0:\ \forall x \in R_\delta(a) \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$
- Отсюда следует, что $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$
-

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.
f(x) б.б. в точке *a*, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

- Это означает, что $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon)>0:\ \forall x \in R_\delta(a) \Rightarrow$
- $$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$$

Таким образом, $\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta(\varepsilon)>0:\ \forall x \in R_\delta(a) \Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

- **Теорема 2.**
- Чтобы f(x) при $x \to a$ стремилась к конечному пределу A, необходимо и достаточно, чтобы функция $\phi(x)=f(x)-A$ была б.м. в точке a.
- ***Доказательство*** .

Необходимость: Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

- Тогда $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta(\varepsilon)>0: \forall\, x \in R_\delta(a) \Rightarrow$
- $|f(x)-A|<\varepsilon$, или $|\phi(x)-0|<\varepsilon$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = 0$, $\phi(x)$ – б.м. в точке a

- <u>Достаточность:</u>

Пусть $\lim\limits_{x \to a} \phi(x) = 0$, $\phi(x) = f(x) - A$ – б.м. в точке a.

- Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in R\delta(a)$ =>
- $|\phi(x) - 0| < \varepsilon$ или $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

<u>Следствие:</u> Для того, чтобы f(x) при $x \to a$ стремилась к конечному пределу A, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была равна сумме числа A и некоторой б.м. в точке a функции: $\boxed{f(x) = A + \phi(x)}$

6. Свойства б.м. функций.

- <u>Теорема 1.</u>
- Алгебраическая сумма конечного числа б.м. в точке *a* функций является функцией б.м. в этой точке.
- <u>Доказательство:</u>

Пусть $\lim\limits_{x \to a} \phi_1(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \phi_2(x) = 0$,

- Тогда для одного и того же $\varepsilon>0$
- $\exists\, \delta_1(\varepsilon)>0: \forall x \in R\delta_1(a) \Rightarrow |\phi_1(x)|<\varepsilon/2$
- $\exists\, \delta_2(\varepsilon)>0: \forall x \in R\delta_2(a) \Rightarrow |\phi_2(x)|<\varepsilon/2$

- Выберем $\delta = \min(\delta_1, \delta_1)$. Тогда $\forall x \in R\delta(a)$ оба неравенства будут выполняться одновременно. Поэтому для тех же $\forall x \in R\delta(a)$ будет иметь место оценка:
- $|\phi_1(x) + \phi_2(x)| \leq |\phi_1(x)| + |\phi_2(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
- Следовательно,
- $\lim(\phi_1(x) + \phi_2(x)) = 0$, это и означает, что
- $x \to a$
- $\phi_1(x) + \phi_2(x)$ – бесконечно малая в точке a.

Замечание

- **<u>Определение</u>.**
- Функция f(x) называется ограниченной на множестве X, если существуют такие два числа m и M, что $\forall x \in X$: $m \leq f(x) \leq M$.
- <u>Пример</u>: $y=\sin x$.
- $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ $-1 \leq \sin x \leq 1$. Функция ограничена на всей числовой оси.
- Если f(x) ограничена на множестве X, то $\exists$ $p > 0$, что $\forall x \in X$: $|f(x)| < p$.

- $\forall x \in$ R: $|\sin x| \leq 1$

- **Теорема 2**.
- Произведение функции f(x), ограниченной в некоторой окрестности точки a на функцию ϕ (x), б.м. в точке a, является функцией б.м. в точке a.
- Доказательство:
- 1). По условию f(x) ограничена в окрестности точки a, т.е. $\exists\ p > 0$, что $\forall x \in R_{\delta_1}(a) \Rightarrow |f(x)| < p$,

2). $\lim\limits_{x \to a} \phi_2(x) = 0$, тогда

- $\varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta_2(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in R_{\delta_2}(a) \Rightarrow |\phi(x)| < \varepsilon/p$

- Выберем $\delta = \min(\delta_1, \delta_1)$. Тогда $\forall x \in R\delta(a)$ одновременно
- $|\phi(x)|<\varepsilon/p$ и $|f(x)|<p$. Следовательно,
- $|f(x) \cdot \phi(x)| = |f(x)| \cdot |\phi(x)| < p \cdot \varepsilon/p = \varepsilon$
- Это и означает, что $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot \phi(x))=0$,
- т.е. произведение ограниченной функции на б. м. есть функция бесконечно малая.
- **Следствие 1**. Произведение постоянной величины C на функцию $\phi(x)$ – б.м. в точке a, является функцией б.м. в этой точке.

- Замечание.
- Постоянная функция f(x)= c =const ограничена на всем своем множестве определения.
- **Следствие 2**.
- Произведение двух функций, б.м. в точке a, является функцией б.м. в этой точке.

- Замечание.
- «$1/0=\infty$, $1/\infty=0$» Запись допускается, **НО**:
- Равенства не выражают никакой количественной связи: на 0 делить нельзя, а бесконечность – не число.

7.Свойства функций, стремящихся к конечному пределу

- **<u>Теорема 1</u>**. Если функция f(x) при $x \to a$ стремится к конечному пределу, то этот предел является единственным.
- <u>Доказательство</u> (от противного):
- Пусть f(x) при $x \to a$ имеет два предела A и B, при этом $A \neq B$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = B,$$

- Значит (см. теорему 2, параграф 5)
  - $f(x) = A + \alpha(x)$
  - $f(x) = B + \beta(x)$,
- где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые в точке a.
- Вычитаем почленно:
- $0 = A - B + \alpha(x) - \beta(x)$, или $B - A = \alpha(x) - \beta(x)$.
- $B - A$ – число, не равное 0, $\alpha(x) - \beta(x)$ – б.м. в точке a. Равенство невозможно. Предположение о существовании второго предела – неверно.

- **Теорема 2**. Если функция f(x) при $x \to a$ стремится к конечному пределу, то в некоторой окрестности точки *a* эта функция ограничена.
- Доказательство:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \text{где } A \text{ – число.}$$

- По определению предела: $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta(\varepsilon) > 0:$
- $\forall x \in R_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Последнее неравенство эквивалентно двойному неравенству:
- $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, или $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.
- Обозначим $A - \varepsilon = m$, $A + \varepsilon = M$

- Тогда: $m < f(x) < M$, т.е. $f(x)$ – ограничена в окрестности точки a.
- *Замечание*.
- В двух последних теоремах точка а может быть как конечной, так и бесконечными точками.

8. Неперово число

- *Джон Непер (1550-1617) – шотландский математик. Изобрел логарифмы: дал определение, объяснение свойств, таблицы и приложения.*
- Рассмотрим $f(n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
- Формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1))}{n!}b^n$$

- Положим *а*=1, *в*=1/n:
- $f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$
- $= \quad 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\ldots+$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n}$$
- Или $f(n) = 2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$
- $$+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \qquad (*)$$

- Все скобки в правой части (*) положительны, и все члены в правой части положительны.
- Перейдем от ***n*** к ***n+1***. Все слагаемые в (*) возрастут, прибавится еще одно положительное слагаемое => $f(n+1) > f(n)$
- Функция $f(n)$ на множестве N – монотонно возрастает.

- Покажем, что $f(n)$ ограничена.
- Все скобки в (*) меньше 1. Заменим их на 1. Правая часть возрастет.

- Получим оценку:

- $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}$

- Заменим в знаменателях все множители, большие чем 2, на 2. Правая часть еще больше возрастет, неравенство усилится.

- $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$

- Правая часть, начиная со второго слагаемого, - геометрическая прогрессия: $b_1=1/2$, $q=1/2$.

- Сумма *n-1* члена:

$$2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}$$

- Эта сумма меньше единицы. Получим оценку:
-
- $f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$
- $\forall n \in N$

- Функция f(n) возрастает, наименьшее значение принимает при n=1 .
   - f(1)=2
- Итак, $\forall n \in N$: $2 \le f(n) < 3$ =>
- f(n)= $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ - ограничена.
- (монотонна и ограничена на множестве натуральных чисел)
- На основании теоремы 2, пункта 4 следует, что f(n) при $n \to \infty$ стремится к конечному пределу.

- Этот предел называют «неперовым числом» и обозначают через «*e*».

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

- *e*- иррациональное число, выражается бесконечной десятичной дробью

- e=2,7181…

- (Леонард Эйлер, L.Euler)

9. Натуральные логарифмы

- Число *e* играет большую роль в математике и в приложениях.
- Логарифмы при основании *e* называются натуральными логарифмами. Обозначение $\ln x$.
- Натуральный логарифм примерно в 2,3 раза больше десятичного логарифма.

10. Теорема о конечных пределах функции

- **<u>Теорема.</u>** Если при $x \to a$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ стремятся каждая к конечному пределу, то:
- 1). $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$
- 2). $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$
- 3). $$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$$

$$\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0$$

- Доказательство единообразно.
- Докажем вторую часть.
- По условию $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2$
- A_1 и A_2 – числа. Тогда по теореме 2.5:
- $f_1(x)= A_1 + \phi_1(x)$ и $f_2(x)= A_2+ \phi_2(x)$, где $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ – функции, б.м. в точке a.
- $f_1(x)\, f_2(x)=(A_1 + \phi_1(x)) \cdot (A_2+ \phi_2(x)) = A_1 A_2 +(A_1 \phi_2(x)+$
- $+A_2 \phi_1(x)+ \phi_1(x)\, \phi_2(x))$

Функция в скобках – б.м. в точке a. (См. теоремы)

- Получили:
- $f_1(x)\, f_2(x) = A_1 \cdot A_2$ + б.м.
- Следовательно:

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = A_1\cdot A_2 = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$$

- В частности, при $f_1(x) = C = const$, получим:

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f_2(x)) = \lim_{x\to a} c\cdot \lim_{x\to a} f_2(x) = c\cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела.