

Предел функции

1. Предел функции в точке

- Функция $f(x)$ определена в окрестности точки a (конечной или бесконечной), если a конечная точка, то в самой точке $f(x)$ может быть и не определена.
- **Пояснение:** если с приближением точки x к точке a соответствующие значения $f(x)$ приближаются к точке A (конечной или бесконечной) таким образом, что для X принадлежащих достаточно малой окрестности $R_\delta(a)$ значения $f(x)$ принадлежат сколь угодно малой окрестности $R_\varepsilon(A)$, то $f(x)$ стремится к пределу A при x стремящемся к a .

- **Определение:** Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящимся к x_0 , если для любого, сколь угодно малого, наперед заданного, положительного числа ε , найдется такое положительное число δ , зависящее от ε ($\delta = \delta(\varepsilon) > 0$), что из условия $x \in R_\delta(x_0)$ ($x \neq x_0$, если x_0 - число) следует, что $f(x) \in R_\varepsilon(A)$.

- **Обозначение:**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \rightarrow A_{x \rightarrow x_0}$$



- На языке неравенств
- 2. Односторонние пределы.

3. Предел функции натурального аргумента. Предел последовательности

- Если область определения функции – множество натуральных чисел N , то аргумент обычно обозначают n .
- $y=f(n)$, $n \in N$ – функция натурального аргумента.
- Интересует поведение $f(n)$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. $n=1,2,3,\dots$

4. Признаки существования предела.

- Теорема 1.
- Теорема « о двух милиционерах»

- Теорема 2.
- Если функция $f(x)$ ограничена и монотонна в некоторой окрестности точки a , то:
 - 1) $f(x)$ имеет в точке a оба конечных односторонних предела, если a – конечная точка.
 - 2) существует конечный предел $f(x)$, если $a = \infty$

5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

● Определения:

1. Функция $f(x)$ называется б.м. в точке a (или при $x \rightarrow a$), если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
2. Функция $f(x)$ называется б.б. в точке a (или при $x \rightarrow a$), если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Точка a может быть как конечной, так и бесконечной точкой.

● **Теорема 1.** (связь между б.м. и б.б. величинами).

- 1. Если $f(x)$ б.м. в точке a , то $\frac{1}{f(x)}$ - б.б. в точке a .
- 2. Если $f(x)$ б.б. в точке a , то $\frac{1}{f(x)}$ - б.м. в точке a .
- **Доказательство:**

Пусть $f(x)$ б.м. в точке a , т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

- Это означает, что $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in R_\delta(a) \Rightarrow$
- $|f(x) - 0| < \varepsilon$, или $|f(x)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{|f(x)|} \boxtimes \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| \boxtimes \frac{1}{\varepsilon}$$

- Итак, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in R_\delta(a) \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| \boxtimes \frac{1}{\varepsilon}$
- Отсюда следует, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \infty$
-

Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

$f(x)$ б.б. в точке a , т.е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

- Это означает, что $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in R_\delta(a) \Rightarrow$
- $|f(x)| \boxtimes \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{|f(x)|} \boxtimes \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| \boxtimes \varepsilon$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in R_\delta(a) \Rightarrow$

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| \boxtimes \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| \boxtimes \varepsilon \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

- Теорема 2.

- Чтобы $f(x)$ при $x \rightarrow a$ стремилась к конечному пределу A , необходимо и достаточно, чтобы функция $\phi(x) = f(x) - A$ была б.м. в точке a .
- Доказательство .

Необходимость: Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

- Тогда $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in R_\delta(a) \Rightarrow$
- $|f(x) - A| < \varepsilon$, или $|\phi(x) - 0| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = 0$, $\phi(x)$ – б.м. в точке a

● Достаточность:

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = 0$, $\phi(x) = f(x) - A$ – б.м. в точке a .

● Это означает, что $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in R\delta(a) \Rightarrow$

● $|\phi(x) - 0| < \varepsilon$ или $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это значит, что
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$

Следствие: Для того, чтобы $f(x)$ при $x \rightarrow a$

стремилась к конечному пределу A ,

необходимо и достаточно, чтобы эта функция

была равна сумме числа A и некоторой б.м. в

точке a функции: $f(x) = A + \phi(x)$

● 6. Свойства б.м. функций.

● Теорема 1.

- Алгебраическая сумма конечного числа б.м. в точке a функций является функцией б.м. в этой точке.

● Доказательство:

Пусть $\lim_{x \rightarrow a} \phi_1(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow a} \phi_2(x) = 0$,

- Тогда для одного и того же $\varepsilon > 0$

- $\exists \delta_1(\varepsilon) > 0: \forall x \in R_{\delta_1}(a) \Rightarrow |\phi_1(x)| < \varepsilon/2$

- $\exists \delta_2(\varepsilon) > 0: \forall x \in R_{\delta_2}(a) \Rightarrow |\phi_2(x)| < \varepsilon/2$

- Выберем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall x \in R_\delta(a)$ оба неравенства будут выполняться одновременно. Поэтому для тех же $\forall x \in R_\delta(a)$ будет иметь место оценка:
- $|\phi_1(x) + \phi_2(x)| \leq |\phi_1(x)| + |\phi_2(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
- Следовательно,
- $\lim_{x \rightarrow a} (\phi_1(x) + \phi_2(x)) = 0$, это и означает, что
- $\phi_1(x) + \phi_2(x)$ – бесконечно малая в точке a .

Замечание

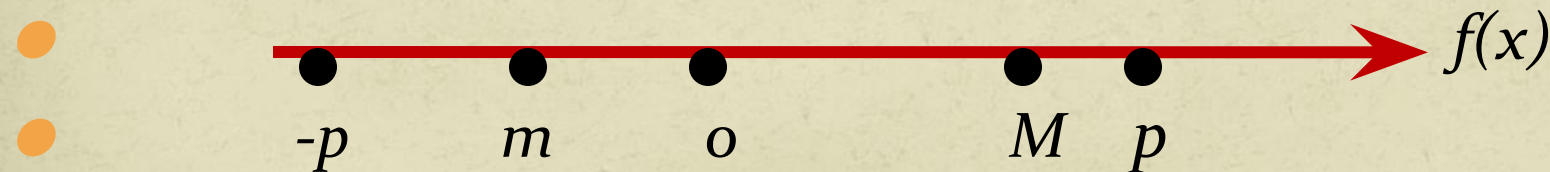
- Определение.

- Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве X , если существуют такие два числа m и M , что $\forall x \in X: m \leq f(x) \leq M$.

- Пример: $y = \sin x$.

- $\forall x \in (-\infty, +\infty) \quad -1 \leq \sin x \leq 1$. Функция ограничена на всей числовой оси.

- Если $f(x)$ ограничена на множестве X , то $\exists p > 0$, что $\forall x \in X: |f(x)| < p$.



- $\forall x \in \mathbb{R}: |\sin x| \leq 1$

- Теорема 2.
- Произведение функции $f(x)$, ограниченной в некоторой окрестности точки a на функцию $\phi(x)$, б.м. в точке a , является функцией б.м. в точке a .
- Доказательство:
- 1). По условию $f(x)$ ограничена в окрестности точки a , т.е. $\exists p > 0$, что $\forall x \in R_{\delta_1}(a) \Rightarrow |f(x)| < p$,
- 2). $\lim_{x \rightarrow a} \phi_2(x) = 0$, тогда
- $\varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2(\varepsilon) > 0: \forall x \in R_{\delta_2}(a) \Rightarrow |\phi(x)| < \varepsilon/p$

- Выберем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall x \in R_\delta(a)$ одновременно
- $|\phi(x)| < \varepsilon/p$ и $|f(x)| < p$. Следовательно,
- $|f(x) \cdot \phi(x)| = |f(x)| \cdot |\phi(x)| < p \cdot \varepsilon/p = \varepsilon$
- Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot \phi(x)) = 0$,
- т.е. произведение ограниченной функции на б.м. есть функция бесконечно малая.
- **Следствие 1.** Произведение постоянной величины C на функцию $\phi(x)$ – б.м. в точке a , является функцией б.м. в этой точке.

- Замечание.
- Постоянная функция $f(x) = c = \text{const}$ ограничена на всем своем множестве определения.
- Следствие 2.
- Произведение двух функций, б.м. в точке a , является функцией б.м. в этой точке.

- Замечание.
- « $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$ » Запись допускается, **НО**:
- Равенства не выражают никакой количественной связи: на 0 делить нельзя, а бесконечность – не число.

● 7. Свойства функций, стремящихся к конечному пределу

- Теорема 1. Если функция $f(x)$ при $x \rightarrow a$ стремится к конечному пределу, то этот предел является единственным.
- Доказательство (от противного):
- Пусть $f(x)$ при $x \rightarrow a$ имеет два предела A и B , при этом $A \neq B$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B,$$

- Значит (см. теорему 2, параграф 5)
 - $f(x) = A + \alpha(x)$
 - $f(x) = B + \beta(x)$,
- где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые в точке a .
- Вычитаем почленно:
- $0 = A - B + \alpha(x) - \beta(x)$, или $B - A = \alpha(x) - \beta(x)$.
- $B - A$ – число, не равное 0, $\alpha(x) - \beta(x)$ – б.м. в точке a . Равенство невозможно.

Предположение о существовании второго предела – неверно.

- **Теорема 2.** Если функция $f(x)$ при $x \rightarrow a$ стремится к конечному пределу, то в некоторой окрестности точки a эта функция ограничена.
- **Доказательство:**
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, где A – число.
- По определению предела: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$:
- $\forall x \in R_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. Последнее неравенство эквивалентно двойному неравенству:
 - $-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$, или $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.
 - Обозначим $A - \varepsilon = m, A + \varepsilon = M$

- Тогда: $m < f(x) < M$, т.е. $f(x)$ – ограничена в окрестности точки a .
- *Замечание.*
- В двух последних теоремах точка a может быть как конечной, так и бесконечными точками.

8. Неперово число

- Джон Непер (1550-1617) – шотландский математик. Изобрел логарифмы: дал определение, объяснение свойств, таблицы и приложения.

- Рассмотрим $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- Формула бинома Ньютона:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \dots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n - (n-1))}{n!} b^n$$

- Положим $a=1$, $b=1/n$:

- $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$

- $= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots +$
 $+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n - (n-1))}{n!} \frac{1}{n^n}$

- Или $f(n) = 2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots +$

- $+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad (*)$

- Все скобки в правой части (*) положительны, и все члены в правой части положительны.
- Перейдем от n к $n+1$. Все слагаемые в (*) возрастут, прибавится еще одно положительное слагаемое $\Rightarrow f(n+1) > f(n)$
- Функция $f(n)$ на множестве N – монотонно возрастает.
- Покажем, что $f(n)$ ограничена.
- Все скобки в (*) меньше 1. Заменяем их на 1. Правая часть возрастет.

- Получим оценку:

- $$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

- Заменим в знаменателях все множители, большие чем 2, на 2. Правая часть еще больше возрастет, неравенство усилится.

- $$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

- Правая часть, начиная со второго слагаемого, - геометрическая прогрессия: $b_1=1/2$, $q=1/2$.



- Сумма $n-1$ члена:

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

- Эта сумма меньше единицы. Получим оценку:

-
- $$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < 3$$

- $$\forall n \in \mathbb{N}$$

- Функция $f(n)$ возрастает, наименьшее значение принимает при $n=1$.

- $f(1)=2$

- Итак, $\forall n \in \mathbb{N}: 2 \leq f(n) < \infty \Rightarrow$

- $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ - ограничена.

- (монотонна и ограничена на множестве натуральных чисел)

- На основании теоремы 2, пункта 4 следует, что $f(n)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу.

- Этот предел называют «неперовым числом» и обозначают через « e ».

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

- e - иррациональное число, выражается бесконечной десятичной дробью

- $e=2,7181\dots$

- (Леонард Эйлер, L.Euler)

9. Натуральные логарифмы

- Число e играет большую роль в математике и в приложениях.
- Логарифмы при основании e называются натуральными логарифмами. Обозначение $\ln x$.
- Натуральный логарифм примерно в 2,3 раза больше десятичного логарифма.

10. Теорема о конечных пределах функции

- **Теорема.** Если при $x \rightarrow a$ функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ стремятся каждая к конечному пределу, то:

- 1).
$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

- 2).
$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

- 3).
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) \neq 0$$

- Доказательство единообразно.
- Докажем вторую часть.
- По условию $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_1$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A_2$
- A_1 и A_2 – числа. Тогда по теореме 2.5:
- $f_1(x) = A_1 + \phi_1(x)$ и $f_2(x) = A_2 + \phi_2(x)$, где $\phi_1(x)$ и $\phi_2(x)$ – функции, б.м. в точке a .
- $f_1(x) f_2(x) = (A_1 + \phi_1(x)) \cdot (A_2 + \phi_2(x)) = A_1 A_2 + (A_1 \phi_2(x) +$
- $+ A_2 \phi_1(x) + \phi_1(x) \phi_2(x))$

Функция в скобках – б.м. в точке a . (См. теоремы)

- Получили:
- $f_1(x) f_2(x) = A_1 \cdot A_2 + \text{б.м.}$
- Следовательно:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = A_1 \cdot A_2 = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

- В частности, при $f_1(x) = C = \text{const}$, получим:

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак предела.