Моделирование физических процессов (механика)

Задача.

Построить математическую модель физического процесса — движения тела, брошенного под углом к горизонту.

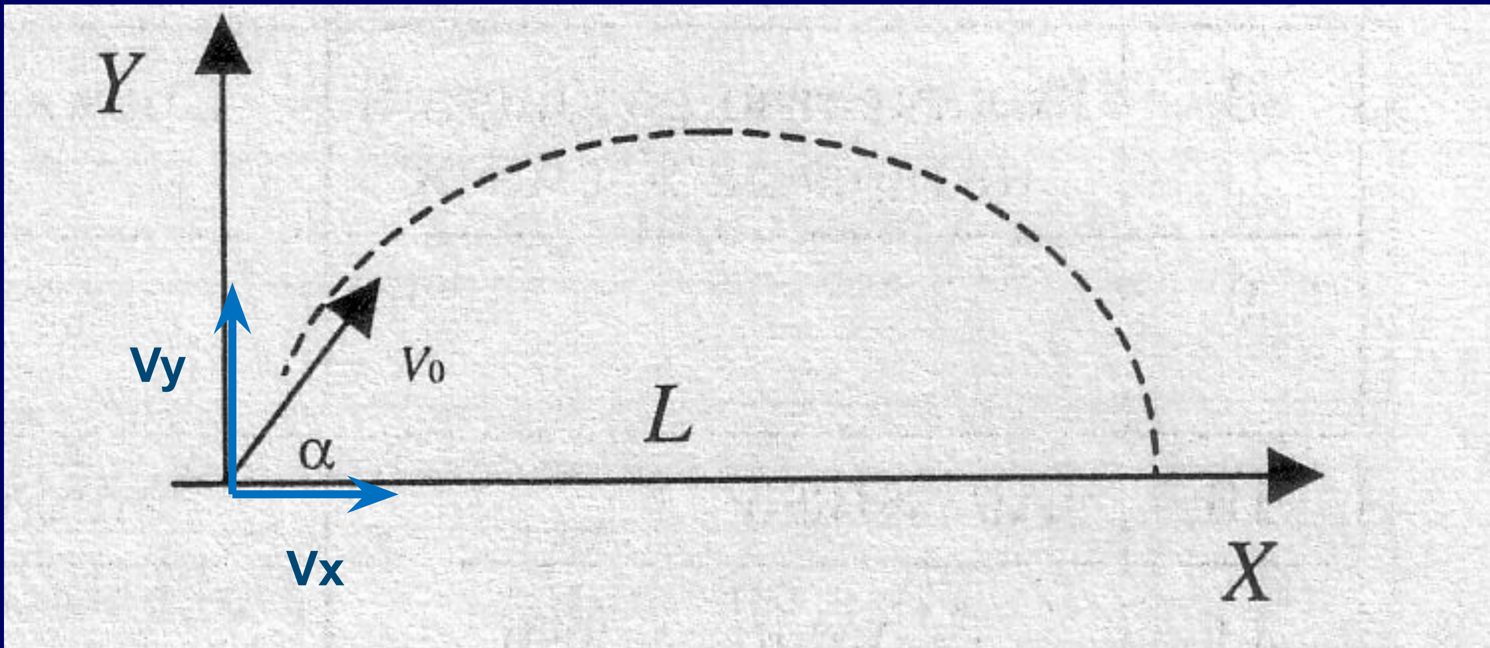
Выяснить зависимость расстояния и времени полета тела от угла броска и начальной скорости.

Угол броска и начальная скорость являются главными факторами процесса моделирования.

Решение.

При расчетах будем использовать следующие допущения:

1. **начало системы координат расположено в точке бросания;**
2. **тело движется вблизи поверхности Земли, т. е. ускорение свободного падения постоянно и равно 9,81 м/с²;**
3. **сопротивление воздуха не учитывается, поэтому движение по горизонтали равномерное.**



Vo — начальная скорость (м/с),
α — угол бросания (радиан),
L — дальность полета (м).
$V_x = V_o \cos\alpha$ — горизонтальная составляющая Vo
$V_y = V_o \sin\alpha$ — вертикальная составляющая Vo
$x = V_x t$ — так как движение по горизонтали равномерное
$y = V_y t - \frac{gt^2}{2}$ – так как движение по вертикали

равноускоренное с отрицательным ускорением.

Искомым в этой задаче будет то значение $x = L$, при котором $y = 0$.

(1) $L = V_x t$ — дальность полета,

(2) $0 = V_y t - \frac{gt^2}{2}$ — точка падения,

(3) $V_x = V_o \cos\alpha$ — горизонтальная проекция вектора начальной скорости,

(4) $V_y = V_o \sin\alpha$ — вертикальная проекция вектора начальной скорости,

$g = 9{,}81$ — ускорение свободного падения,

$V_o > 0$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Подставляем в формулу (2) значение *Vy* из формулы (4).
Получаем уравнение:

$$0 = V_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} \qquad (5)$$

Найдем из формул (1) и (3) выражение для *t*:

$$t = \frac{L}{V_x} = \frac{x}{V_0 \cos\alpha}$$

Подставив значение t в уравнение (5), получаем решение:

$$0 = V_0 \sin\alpha \frac{L}{V_0 \cos\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{L}{V_0 \cos\alpha}\right)^2 =$$

$$= \frac{L \sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{g L^2}{2 V_0^2 \cos^2\alpha}$$

или

$$2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha = gL$$

Отсюда дальность полета равна:

$$\boxed{L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}}$$

т. е. зависит от начальной скорости и угла наклона.

Проведем исследование полученной математической модели, чтобы выяснить, как зависит дальность полета от угла броска.

Зададим количественные величины для моделирования:

$V_o = 60$ м/с

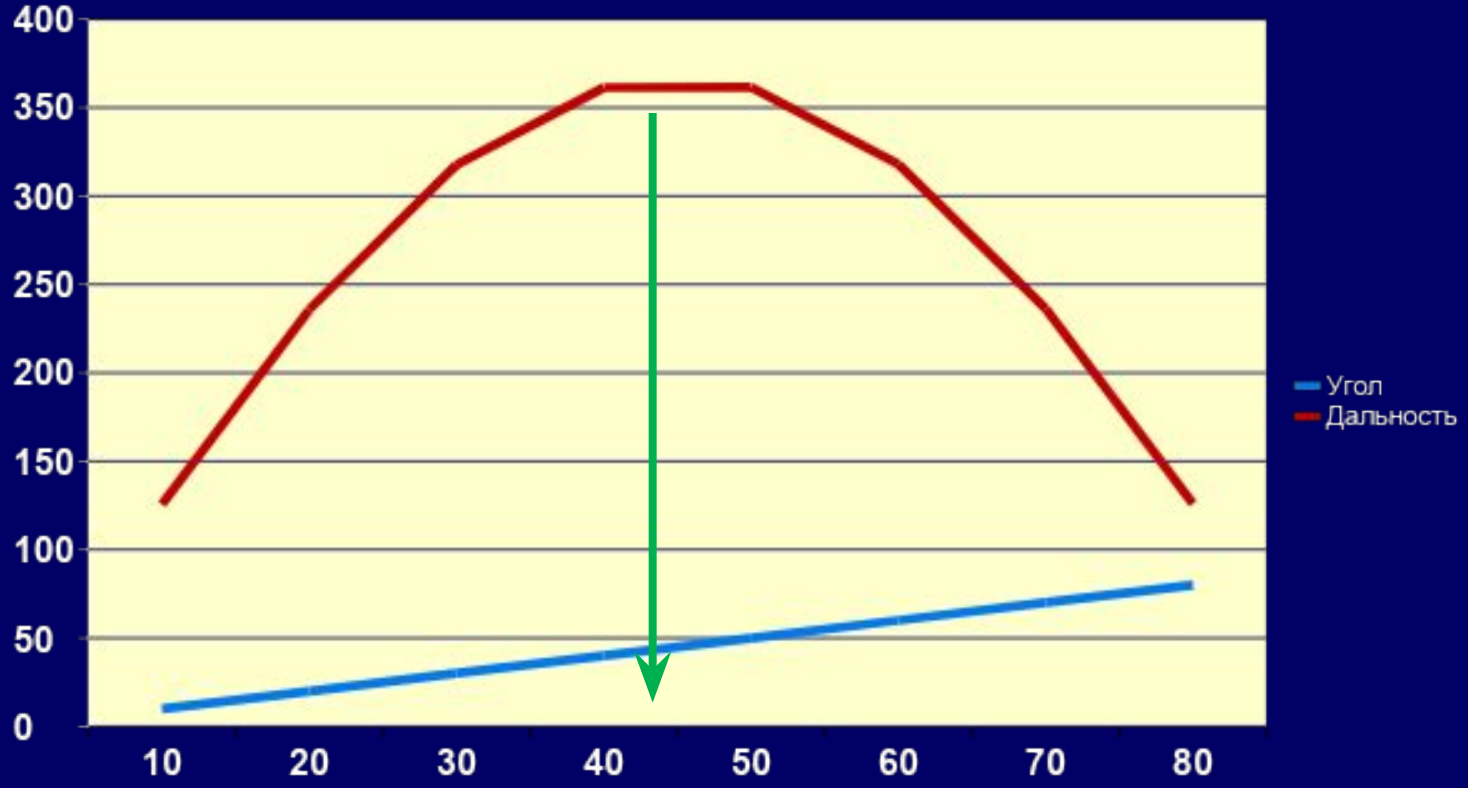
$\alpha = 10 \ldots 80$ град.

$\Delta\alpha = 10$ град.

$g = 9{,}81$

Результаты моделирования приведем в таблице и на графике.

Угол	10	20	30	40	50	60	70	80
Угол рад	0,1744	0,3488	0,5233	0,6978	0,8722	1,0467	1,2211	1,3956
Дальность	125,45	235,78	317,71	361,35	361,45	318,00	236,23	126



Выводы:

- С увеличением угла бросания от 15 до 45° при постоянной начальной скорости полета дальность полета увеличивается.
- С увеличением угла бросания от 45 до 90° при постоянной начальной скорости полета дальность полета уменьшается.

2. Выяснить, как зависит на Луне дальность полета от угла броска ($g = 1{,}63$ м/с²)

3. Выяснить, при каком угле броска, тело улетит на наибольшее расстояние.

Начальная скорость – 15 м/с, величина угла лежит в пределах от 30 до 70°.

Какое при этом будет время полета?

Формулы в ячейках остаются такими же, как и в п. 1 и 2, меняются лишь исходные данные.