Модели со стохастическими регрессорами

Модели со стохастическими регрессорами

Ранее мы предполагали, что $COV(x_i,u_i)=0$

На практике это не всегда справедливо.

Причины:

1. В моделях временных рядов, регрессоры являются функциями времени, что приводит к их корреляции со случайными возмущениями

2. Регрессоры измеряются с ошибками т.е являются случайными величинами

3. Использование лаговых переменных

Модели со стохастическими регрессорами

Возможны три ситуации:

1. В уравнениях модели отсутствует корреляция между регрессорами и случайным возмущением ($COV(x_i,u_i)=0$ (оценки несмещенные и эффективные)

2. Регрессоры не коррелируют со случайными возмущениями в текущих наблюдениях, но коррелируют со случайными возмущениями в предыдущих наблюдениях: $COV(x_i,u_i)=0$, $COV(x_i,u_{i-1})\neq 0$ (Оценки смещенные на небольших выборках и состоятельные на выборках большого объема)

3. Регрессоры коррелируют со случайными возмущениями в текущих уравнениях наблюдений: $COV(x_i,u_i)\neq 0$ (Оценки смещенные и несостоятельные)

Модели со стохастическими регрессорами

Рассмотрим модель вида:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + a_2 y_{t-1} + u_t \qquad (1.1)$$

Система уравнений наблюдений для модели (1.1)

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_0 + u_1\\
y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_1 + u_2\\
y_3 &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_2 + u_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 y_{n-1} + u_n
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(u_1)\\
y_2 &= f_2(u_1, u_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{n-1} &= f_{n-1}(u_1, u_2, \ldots, u_{n-2})
\end{aligned}
\qquad (1.2)$$

Лаговая переменная y_{t-1} коррелирует со случайным возмущением в предыдущих наблюдениях

Модель (1.1) частный случай авторегрессионных моделей

Модели с распределенными лагами

2. Модели с конечным числом лагов

$$y_t = a_0 + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \ldots + b_k x_k + u_t \qquad (2.1)$$

Решается методом замены переменных

Вводятся новые переменные: $z_{0t}=x_t$, $z_{1t}=x_{t-1}$,…,$z_{kt}=x_{t-k}$

В новых переменных получается обычное уравнение множественной регрессии

Его оценка и анализ производится с помощью МНК

Модели с распределенными лагами

3. Модели с бесконечным числом лагов

В общем случае они имеют вид:

$$y_t = a_0 + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + ... + u_t = a_0 + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x_i + u_t \qquad (3.1)$$

Предпосылка: параметры b_i при лаговых значениях регрессоров убывают в геометрической прогрессии:
$b_k=b_0\lambda^k$, $k=0,1,\ldots,$ $0<\lambda<1$

Параметр λ характеризует скорость убывания коэффициентов с увеличением лага

Модели с распределенными лагами

Модель (3.1) принимает вид:

$$y_t = a_0 + b_0 x_t + b_0 \lambda x_{t-1} + b_0 \lambda^2 x_{t-2} + b_0 \lambda^3 x_{t-3} + \ldots + u_t \qquad (3.2)$$

Метод оценки модели (3.2) – метод переход к модели с конечным лагом:

1. Задают набор значений параметра λ, например, (0.1, 0.001, 0.0001)

2. Для каждого λ рассчитывается значение переменной

$$z_t(p) = x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \lambda^3 x_{t-3} + \ldots + \lambda^p x_{t-p}$$

Значение максимального лага «p» подбирается из условия

$$\left| z_t(p-1) - z_t(p) \right| < \delta$$

Модели с распределенными лагами

3. Методом наименьших квадратов оценивается модель:

$$y_t = a_0 + b_0 z_t(p) + u_t$$

Для каждого λ получают значения оценок a_0 и b_o

Из набора значений параметра λ выбирается то, при котором коэффициент детерминации R^2 имеет максимальное значение

4. Найденное значение λ и соответствующие ему значения параметров a_0 и b_0 используются в модели (3.2)

Модели частичной корректировки

В экономической практике часто приходится моделировать не фактические значения эндогенной переменной, а ее ожидаемое или целевое значение

Например, ожидаемый доход от ценных бумаг, инвестиций, ожидаемый уровень дивидендов и т.п.)

Пусть y_t – фактическое значение эндогенной переменной

y^*_t – ожидаемое значение эндогенной переменной

x_t – экзогенная переменная

Необходимо построить модель:

$$y^*_t = a_0 + a_1 x_t + u_t \qquad (4.1)$$

Модели частичной корректировки

<u>Особенность</u>: отсутствие данных по переменной y^*_t

Делается предположение, что фактическое приращение эндогенной переменной пропорционально разности между ее желаемым уровнем и реальным значением в прошлом периоде:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda\left(y_t^* - y_{t-1}\right) + \varepsilon_t \quad \left(0 < \lambda < 1\right) \qquad (4.2)$$

Выражение (4.2) можно переписать в виде:

$$y_t = \lambda y_t^* + (1 - \lambda) y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \left(0 < \lambda < 0\right) \qquad (4.3)$$

y_t – средневзвешенное желаемого уровня эндогенной переменной и фактическим ее значением в предыдущем периоде

Модели частичной корректировки

Подставив (4.1) в (4.3) получим выражение:

$$y_t = a_0\lambda + a_1\lambda x_t + (1-\lambda)y_{t-1} + \varepsilon_t + \lambda u_t \qquad (4.4)$$

Оценив параметры модели (4.4), получим оценки всех необходимых параметров: λ, a_0 и a_1

Однако модель (4.4) имеет стохастический регрессор y_{t-1}, что приводит к «частичному» нарушению четвертой предпосылки теоремы Гаусса-Маркова

Поэтому оценку модели (4.4) необходимо проводить по выборке большого объема.

Построение модели Лизера

Модель корректировки уровня сбережений Лизера

Год	Доход Y_t	Сбережения S_t	Год	Доход Y_t	Сбережения S_t
1946	8,8	0,36	1955	15,5	0,59
1947	9,4	0,21	1956	16,7	0,90
1948	10,0	0,08	1957	18,6	0,82
1949	10,6	0,20	1958	19,7	1,04
1950	11,0	0,10	1959	21,1	1,53
1951	11,9	0,12	1960	22,8	1,94
1952	12,7	0,41	1961	23,9	1,75
1953	13,5	0,50	1962	25,2	1,99
1954	14,3	0,43	1963	26,0	2,03
			1964	26,8	2,40

Построение модели Лизера

Спецификация модели

$$S_t^* = a_0 + a_1 Y_t + u_t \qquad (4.5)$$

где: S^*_t –ожидаемый уровень сбережений в текущем году

Используется предположение:

$$S_t - S_{t-1} = \lambda\left(S_t^* - S_{t-1}\right) \qquad (4.6)$$

Подставляя (4.5) в (4.6) после преобразования получим

$$S_t = \lambda a_0 + \lambda a_1 Y_t + \left(1 - \lambda\right) S_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (4.7)$$

Построение модели Лизера

Вводя новые значения параметров:

$$\alpha = \lambda a_0 \quad \beta = \lambda a_1 \quad \mu = 1 - \lambda \qquad (4.8)$$

спецификация (4.7) принимает вид:

$$S_t = \alpha + \beta Y_t + \mu S_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (4.9)$$

Оценка спецификации (4.9) по имеющимся данным

$$S_t = \underset{(0.246)}{-0.865} + \underset{(0.023)}{0.089} Y_t + \underset{(0.2)}{0.326} S_{t-1} + \underset{(0.154)}{\varepsilon_t} \qquad R^2 = 0.942$$

Возвращаемся к исходным параметрам согласно (4.8)

$$\lambda = 1 - \mu = 1 - 0.326 = 0.674 \quad a_1 = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{0.089}{0.674} = 0.132 \quad a_0 = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{-0.865}{0.674} = -1.283$$

Модели адаптивных ожиданий

Случай «противоположный» рассмотренному

Например. Известно, что дивиденды от ценной бумаги 30% в год от ее стоимости. Но не известно, какова будет ее стоимость в следующем периоде времени

Инвестор ориентируется на некоторое ожидаемое значение в будущем

Спецификация модели имеет вид:

$$y_t = a_0 + a_1 x^*_{t+1} + u_t \qquad (5.1)$$

где: X^*_{t-1} – ожидаемое значение регрессора в следующем периоде времени

Модели адаптивных ожиданий

Т.к. X^*_{t-1} величина не наблюдаемая, ее заменяют на ту переменную, которая поддается наблюдениям

В данном случае – это текущее значение регрессора

Предполагается, что ожидаемое значение регрессора есть взвешенное среднее между текущими реальным и ожидаемым значениям регрессора:

$$x^*_{t+1} = \rho\, x_t + (1-\rho)\, x^*_t \qquad (5.2)$$

Другими словами, предполагается:

$$x^*_{t+1} = \begin{cases} x^*_t & \textit{при} \quad \rho = 0 \quad \textit{ожидания} \quad \textit{статичны} \\ x_t & \textit{при} \quad \rho = 1 \quad \textit{мгновенная} \quad \textit{реализация} \quad \textit{ожиданий} \end{cases}$$

Модели адаптивных ожиданий

Подставив (5.2) в (5.1) получаем спецификацию:

$$y_t = a_0 + a_1\left[\rho x_t + (1-\rho)x_t^*\right] + u_t \qquad (5.3)$$

Далее записывается (5.13) для момента времени (t-1), умножается на(1-ρ) и вычитается из него (5.3)

$$(1-\rho)y_{t-1} = (1-\rho)a_0 + a_1(1-\rho)\left[\rho x_{t-1} + (1-\rho)x_{t-1}^*\right] + \varepsilon_t$$

$$y_t - (1-\rho)y_{t-1} = \rho a_0 + \rho a_1 x_t + \varepsilon_t \quad \textit{или}$$

$$y_t = \rho a_0 + \rho a_1 x_t + (1-\rho)y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \textit{или}$$

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \mu y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (5.4)$$

Оценивается спецификация (5.4) и производится обратный переход к исходным параметрам модели