

2. Правила сложения и умножения вероятностей и их следствия

Ключевые слова

- *правило сложения для несовместных событий*
- *сумма вероятностей событий полной группы*
- *вероятности противоположных событий*
- *зависимые и независимые события*
- *условная и безусловная вероятность*
- *правило умножения*
- *условие независимости*

- *надежность*
- *система без резервирования*
- *система с резервированием*
- *вероятность хотя бы одного из событий*
- *правило сложения для совместных событий*
- *неравенство вероятностей*
- *формула Бернулли*
- *формула гипотез (полной вероятности)*
- *формула Бейеса*

Правило сложения для несовместных событий

(только для него – «как получено»)

Вероятность суммы двух несовместных событий (т.е., одного из них) равна сумме их вероятностей:

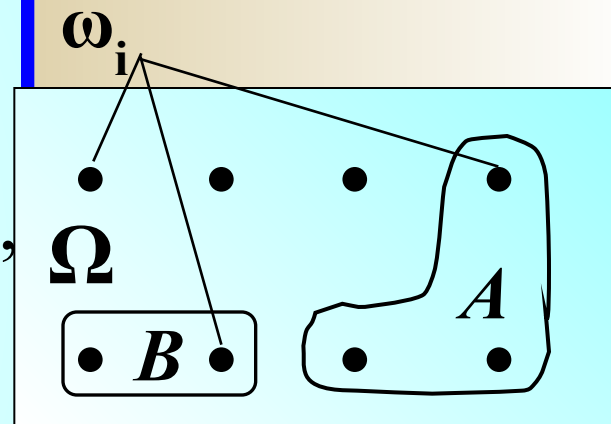
$$P(A + B) = P(A) + P(B), \text{ если } A \cdot B = \emptyset$$

Из аксиоматического определения:

$$P(A) = \sum_i p(\omega_i \in A), \quad P(B) = \sum_i p(\omega_i \in B),$$

$$P(A + B) = \sum_i p(\omega_i \in A + B)$$

Эта сумма равна сумме двух первых



По классическому определению:

пусть в эксперименте с равновозможными исходами m_A элементарных событий благоприятны событию A , m_B – событию B , $(m_A + m_B)$ – событию $(A + B)$.

Тогда:

$$P(A+B) = (m_A + m_B) / n = m_A/n + m_B/n = P(A) + P(B)$$

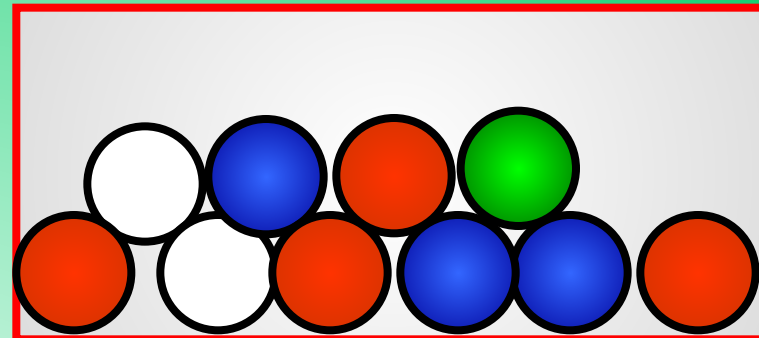
→ теорема доказана

Обобщается на k несовместных событий ($k > 2$)

Вероятность наступления одного из попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P\left(\sum_{j=1}^k A_j\right) = \sum_{j=1}^k P(A_j)$$

Пример: в ящике 2 белых,
3 синих, 4 красных шара и
1 зеленый



**Вероятность вынуть наугад шар цвета
российского флага: $0.2 + 0.3 + 0.4 = 0.9$**

+ 0.1 – вероятность вынуть зеленый шар = 1
– вероятность достоверного события ? –
«вынуть шар одного из возможных цветов»

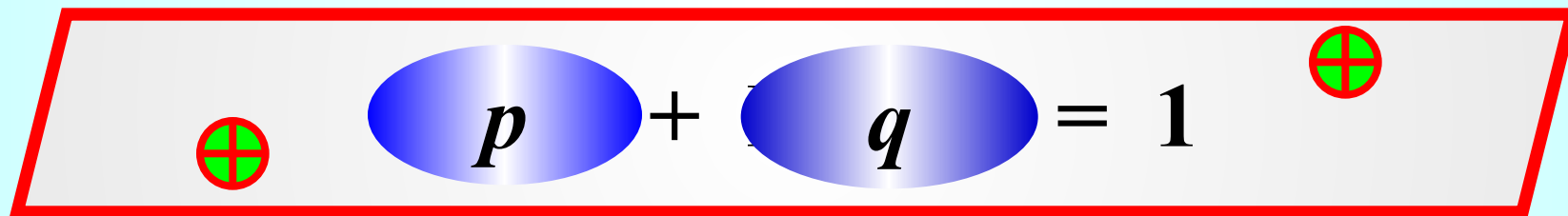
Эта ситуация иллюстрирует следующее правило

Если события A_1, A_2, \dots, A_k образуют *полную группу*,
то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_j P(A_j) = 1, \quad \text{если } \sum_j A_j = \Omega \text{ и } A_i \cdot A_j = \emptyset, i \neq j$$

**Важный частный случай –
*противоположные события***

**Сумма вероятностей *противоположных*
событий равна единице**


$$\oplus \quad p \quad + \quad q \quad = \quad 1 \quad \oplus$$

Часто на практике оценивается *вероятность отказа* объекта q , а затем определяется *надежность* p (*вероятность безотказной работы*)

$$p = 1 - q$$

Зависимые и независимые события. Условная и безусловная вероятность

Два события называют *независимыми*, если наступление одного из них не изменяет вероятности другого

Пример

Эксперимент: из коробки с 5 белыми и 3 черными шарами извлекаются наугад 2 шара.

События: В – 1-ый шар черный, А – 2-ой шар белый.

2 разные схемы эксперимента:

а) «схема с возвращением»

(1-ый шар возвращается перед доставанием 2-го);

б) «схема без возвращения» (1-ый шар не возвращается)

Вероятности:

а) $P(A) = 5 / 8$ (не зависит от того, было ли В)

$P(B) = 3 / 8 \quad \rightarrow \quad A$ и B – независимые

б) $P(A) = 4 / 7$, если В не произошло, но

$P(A) = 5 / 7$, если В произошло

\rightarrow вероятность наступления А

зависит от наступления или не наступления В

Условная вероятность – $P(A/B)$ или $P_B(A)$
есть вероятность события A , вычисленная при
условии, что событие B имело место.

Вероятность события – безусловная

**Отсюда следует
правило
умножения
вероятностей!**

Следует из определений вероятности,

**условная вероятность равна вероятности
совместного наступления двух событий,
деленной на вероятность события, о котором
предполагается, что оно имело место:**

$$P(A/B) = P(A \cdot B) / P(B)$$

Правило умножения

Вероятность произведения двух событий (т.е., их совместного наступления) равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при условии, что первое имело место:

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Пример. В эксперименте с шарами по схеме (б), когда 1-ый шар не возвращается, $P(A \cdot B) = (3/8) \cdot (5/7) = 15/56$ – вероятность того, что 1-ый черный, а 2-ой белый

Для независимых событий выполняется (по определению) *условие независимости*:

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B)$$

В этом случае правило умножения принимает следующую форму

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей

Пример. В ситуации с возвращением шара (а)

$$P(A \cdot B) = (5/8) \cdot (3/8) = 15/64$$

Правило умножения обобщается на любое число взаимонезависимых событий

Вероятность совместного наступления независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k)$$

Все последующие формулы для расчета вероятностей событий можно рассматривать как следствия правил сложения и умножения

Важные примеры

Надежность системы независимых
последовательных элементов

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_j \cdot \dots \cdot p_k,$$

p_j – надежность j -го элемента



Это «системы без резервирования»

Работа системы – произведение рабочих состояний всех k элементов (функционирует, только если все действуют). Вероятность работы системы в целом определяется по правилу умножения.

Если надежность элементов одинакова, т.е.,

$$p_j = p, j = 1 \dots k \rightarrow P = p^k$$

**Надежность системы без резервирования
падает с ростом количества элементов**

Вероятность отказа такой системы:

$$Q = 1 - P = 1 - p_1 p_2 \dots p_j \dots p_k$$

Отказ системы независимых элементов, работающих параллельно – произведение отказов элементов.

Откажет, только когда откажут все элементы.

1
...

Это «система с резервированием»

k

Вероятность отказа

$$Q = q_1 q_2 \dots q_j \dots q_k$$

$$Q = q^k, \text{ если } q_j = q (j = 1 \dots k)$$

$$P = 1 - Q = 1 - q_1 q_2 \dots q_j \dots q_k$$

Надежность системы с резервированием растет с ростом количества элементов

**В практических расчетах надежности
и вероятности отказа
наиболее удобно определить:**

**1) для последовательной системы –
сначала R потом Q**

**2) для параллельной системы –
сначала Q затем R**

NB!

Пример:

Вероятности отказа элементов системы $q_1 = 0.1$, $q_2 = 0.2$

1) Если элементы последовательны,

$$\begin{aligned} \text{то надежность } P &= p_1 \cdot p_2 = (1 - q_1) \cdot (1 - q_2) \\ &= 0.9 \cdot 0.8 = 0.72; \end{aligned}$$

вероятность отказа $Q = 1 - P = 0.28$

Q ← «откажет хотя
бы 1»

2) Если элементы действуют параллельно,

$$\begin{aligned} \text{то } Q &= q_1 \cdot q_2 = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02; \\ \text{надежность } P &= 1 - Q = 1 - 0.02 = 0.98 \end{aligned}$$

P ← «работает хотя
бы 1»

**Общее правило для расчета вероятности
«хотя бы одного из событий»
(как совместных, так и не совместных)**

**Вероятность наступления хотя бы одного
из нескольких независимых событий равна
единице без произведения вероятностей
противоположных событий:**

$$P(A = A_1 + A_2 + \dots + A_k) \\ = 1 - p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot p(\bar{A}_k)$$

**Если событий лишь два, то вероятность
«по крайней мере одного» можно определить
по *правилу сложения для совместных событий*
(при $k > 2$ существенно усложняется)**

**Вероятность наступления хотя бы одного
из двух совместных событий
равна сумме их вероятностей
без вероятности их совместного наступления:**

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Пример. Какова вероятность хотя бы одного попадания при 3-х выстрелах, если вероятность попасть в каждом равна 0.7?

$$P(\text{хотя бы 1 из 3-х}) = 1 - q^3 = 1 - 0.3^3 = 0.973$$

Веро.
попада
одно

to be
contin
ued

$$P(\text{хотя бы 1 из 2-х}) = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0.3 \cdot 0.2 = 0.94;$$

$$P(\text{хотя бы 1 из 2-х}) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 0.94$$