2. Правила сложения и умножения вероятностей и их следствия

Ключевые слова

- *правило сложения* для *несовместных событий*
- *сумма вероятностей событий полной группы*
- *вероятности противоположных событий*
- *зависимые и независимые события*
- *условная и безусловная вероятность*
- *правило умножения*
- *условие независимости*

- *надежность*
- *система без резервирования*
- *система с резервированием*
- *вероятность хотя бы одного из событий*
- *правило сложения для совместных событий*
- *неравенство вероятностей*
- *формула Бернулли*
- *формула гипотез (полной вероятности)*
- *формула Бейеса*

Правило сложения для несовместных событий

(только для него – «как получено»)

Вероятность суммы двух несовместных событий (т.е., одного из них) равна сумме их вероятностей:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$, если $A \cdot B = \varnothing$

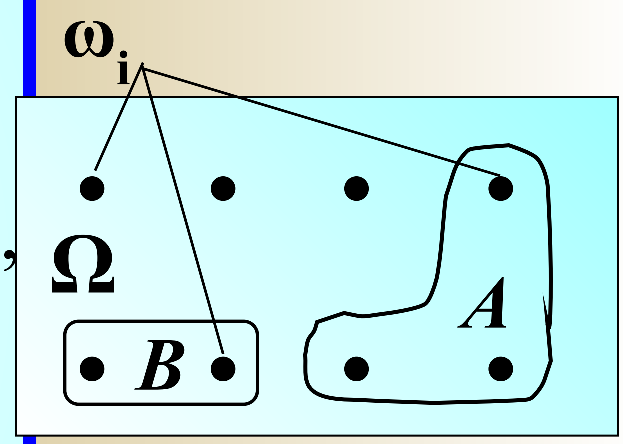
Из аксиоматического определения:

$$P(A) = \sum_i p(\omega_i \in A),$$

$$P(B) = \sum_i p(\omega_i \in B),$$

$$P(A + B) = \sum_i p(\omega_i \in A + B)$$

Эта сумма равна сумме двух первых



По классическому определению :

пусть в эксперименте с равновозможными исходами m_A элементарных событий благоприятны событию A, m_B – событию B, $(m_A + m_B)$ – событию (A + B).

Тогда:

$$P(A+B) = (m_A + m_B) / n = m_A/n + m_B/n = P(A) + P(B)$$

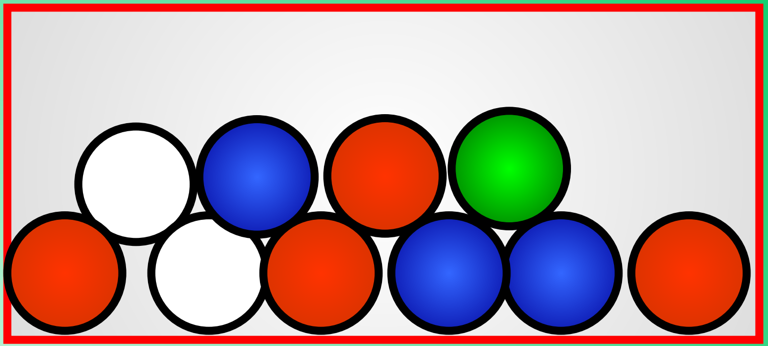
→ теорема доказана

Обобщается на k несовместных событий (k > 2)

Вероятность наступления одного из попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P\left(\sum_{j=1}^{k} A_j\right) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j)$$

Пример: в ящике 2 белых, 3 синих, 4 красных шара и 1 зеленый



Вероятность вынуть наугад шар цвета российского флага: 0.2 + 0.3 + 0.4 = 0.9

+ 0.1 – вероятность вынуть зеленый шар = 1

– вероятность достоверного события ? – «вынуть шар одного из возможных цветов»

Эта ситуация иллюстрирует следующее правило

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ образуют *полную группу*, то сумма их вероятностей равна единице:

$$\sum_j P(A_j) = 1, \quad \text{если} \quad \sum_j A_j = \Omega \quad \text{и} \quad A_i \cdot A_j = \varnothing,\ i \neq j$$

Важный частный случай –
противоположные события

Сумма вероятностей *противоположных* событий равна единице

$$p + q = 1$$

Часто на практике оценивается *вероятность отказа* объекта q, а затем определяется *надежность* p (*вероятность безотказной работы*)

$$p = 1 - q$$

Зависимые и независимые события. Условная и безусловная вероятность

Два события называют *независимыми*, если наступление одного из них не изменяет вероятности другого

Пример

Эксперимент: из коробки с 5 белыми и 3 черными шарами извлекаются наугад 2 шара.

События: B – 1-ый шар черный, A – 2-ой шар белый.

2 разные схемы эксперимента:

а) «схема с возвращением»

(1-ый шар возвращается перед доставанием 2-го);

б) «схема без возвращения» (1-ый шар не возвращается)

Вероятности:

а) P(A) = 5 / 8 (не зависит от того, было ли B)

P(B) = 3 / 8 $\longrightarrow$ A и B – независимые

б) P(A) = 4 / 7, если B не произошло, но
P(A) = 5 / 7, если B произошло

$\longrightarrow$ вероятность наступления A зависит от наступления или не наступления B

Условная вероят... сть – P(A/B) или $P_B(A)$
есть вероятност... тия А, вычисленная при
услови... е В имело место.
... бытия – *безусловная*

Отсюда следует *правило умножения* вероятностей !

...ледует из определений вероятности,

условная вероятность равна вероятности совместного наступления двух событий, деленной на вероятность события, о котором предполагается, что оно имело место:

$$P(A/B) = P(A \cdot B) / P(B)$$

Правило умножения

Вероятность произведения двух событий (т.е., их совместного наступления) равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого при условии, что первое имело место:

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Пример. В эксперименте с шарами по схеме (б), когда 1-ый шар не возвращается, $P(A \cdot B) = (3/8) \cdot (5/7) = 15/56$ – вероятность того, что 1-ый черный, а 2-ой белый

Для независимых событий выполняется (по определению) *условие независимости*:

$$P(A/B) = P(A), \qquad P(B/A) = P(B)$$

В этом случае правило умножения принимает следующую форму

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей

Пример. В ситуации с возвращением шара (а)

$$P(A \cdot B) = (5/8) \cdot (3/8) = 15/64$$

Правило умножения обобщается на любое число взаимонезависимых событий

Вероятность совместного наступления независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A_1A_2\ldots A_k) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot \ldots \cdot P(A_k)$$

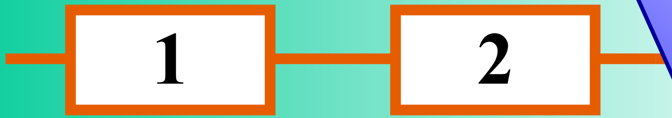
Все последующие формулы для расчета вероятностей событий можно рассматривать как следствия правил сложения и умножения

Важные примеры

<u>Надежность</u> системы независимых последовательных элементов

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_j \cdot \ldots \cdot p_k ,$$

p_j – надежность j-го элемента



Это «*системы без резервирования*»

Работа системы – произведение рабочих состояний всех k элементов (функционирует, только если все действуют). Вероятность работы системы в целом определяется по правилу умножения.

Если надежность элементов одинакова, т.е.,

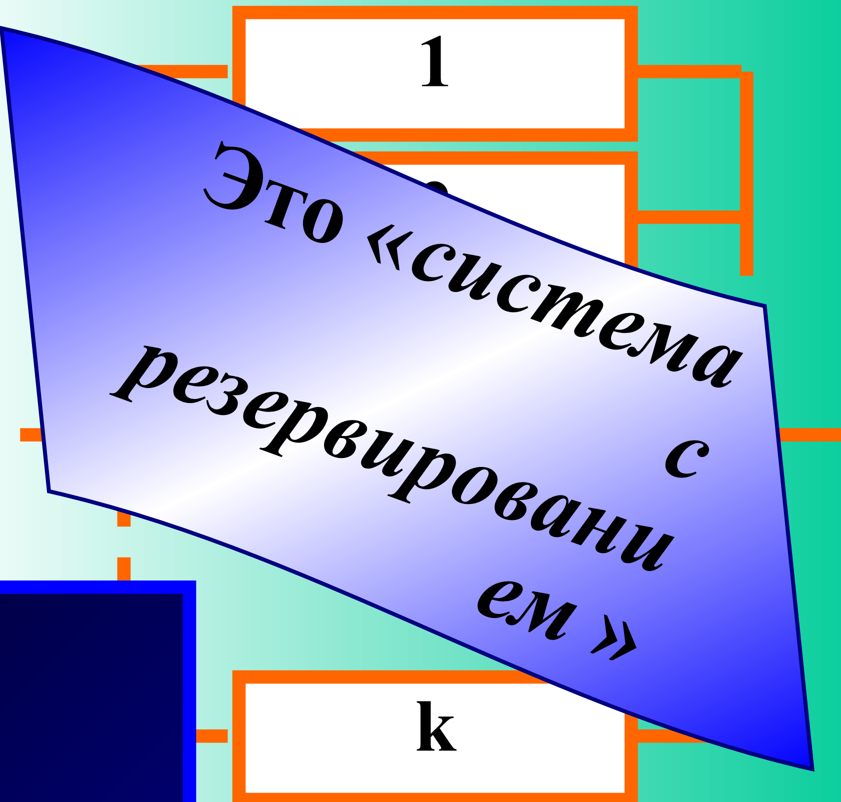
$$p_j = p,\ \ j = 1 \ldots k \ \rightarrow \ P = p^k$$

Надежность системы без резервирования падает с ростом количества элементов

Вероятность отказа такой системы:

$$Q = 1 - P = 1 - p_1\, p_2 \ldots p_j \ldots p_k$$

Отказ системы независимых элементов, работающих параллельно – произведение отказов элементов. Откажет, только когда откажут все элементы.



Вероятность отказа

$$Q = q_1 q_2 \ldots q_j \ldots q_k$$

$$Q = q^k \text{, если } q_j = q \ (j = 1 \ldots k)$$

$$P = 1 - Q = 1 - q_1 q_2 \ldots q_j \ldots q_k$$

Надежность системы с резервированием растет с ростом количества элементов

В практических расчетах надежности и вероятности отказа наиболее удобно определить:

1) ***для последовательной системы*** **– сначала P потом Q**

2) ***для параллельной системы*** **– сначала Q затем P**

NB!

Пример:

Вероятности отказа элементов системы $q_1 = 0.1$, $q_2 = 0.2$

1) Если элементы последовательны,

то надежность $P = p_1 \cdot p_2 = (1 - q_1) \cdot (1 - q_2)$

$= 0.9 \cdot 0.8 = 0.72$;

вероятность отказа $Q = 1 - P = 0.28$

Q ← «откажет хотя бы 1»

2) Если элементы действуют параллельно,

то $Q = q_1 \cdot q_2 = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$;

надежность $P = 1 - Q = 1 - 0.02 = 0.98$

P ← «работает хотя бы 1»

Общее правило для расчета вероятности «*хотя бы одного из событий*» (как совместных, так и не совместных)

Вероятность наступления хотя бы одного из нескольких независимых событий равна единице без произведения вероятностей противоположных событий:

$$P(A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k) = 1 - p(\bar{A}_1) \cdot p(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot p(\bar{A}_k)$$

Если событий лишь два, то вероятность «по крайней мере одного» можно определить по *правилу сложения для совместных событий* (при k > 2 существенно усложняется)

Вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Пример. Какова вероятность хотя бы одного попадания при 3-х выстрелах, если вероятность попасть в каждом равна 0.7?

$$P(\text{хотя бы 1 из 3-х}) = 1 - q^3 = 1 - 0.3^3 = 0.973$$

Веро…

попада…

одно…

to be contin ued

$$P(\text{хотя бы 1 из 2-х}) = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0.3 \cdot 0.2 = 0.94;$$

$$P(\text{хотя бы 1 из 2-х}) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 = 0.7 + 0.8 - 0.56 = 0.94$$