Правило сложения для совместных А и В выражает вероятность суммы произвольных событий, и совместных, и несовместных:

если А и В не пересекаются, $P(A \cdot B) = 0$

Поскольку в любых случаях $P(A \cdot B) \geq 0$,

можно записать $P(A + B) \leq P(A) + P(B)$

Это *неравенство вероятностей* обобщается на $k > 2$ событий:

Вероятность суммы нескольких событий не превосходит суммы их вероятностей

Формула Бернулли

от «хотя бы 1» к «ровно 1, ровно 2, ...»

Позволяет определять вероятности «ровно одного», «ровно двух» и т.д. наступлений события в нескольких независимых экспериментах (попаданий при … хов в сделках и др.)

Пояснение →

Если событие A может произойти в каждом из n независимых опытов с вероятностью p, то вероятность его наступления ровно k раз в данной серии опытов выражается формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Следует из правил умножения и сложения вероятностей:

вероятность, что A наступит в некоторых k опытах и не наступит в n-k остальных равна $p^k q^{n-k}$ – по правилу умножения для независимых событий;

по правилу сложения $P_n(k)$ равна сумме таких вероятностей для всех вариантов k наступлений и n-k не наступлений A;

количество таких вариантов есть число сочетаний из n элементов по k, т.е., C_n^k

Пример

В серии из 3-х независимых выстрелов с вероятностью попадания в каждом 0.7:

вероятность только одного попадания

$$P_3(1) = C_3^{\,1} \cdot 0.7 \cdot 0.3^2 = 0.189,$$

вероятность ровно двух попаданий

$$P_3(2) = C_3^{\,2} \cdot 0.7^2 \cdot 0.3 = 0.441$$

Формула полной вероятности и формула Байеса

**связаны с ситуациями,
в которых эксперимент
как бы состоит из 2-х стадий:**

**на 1-ой «разыгрываются»
взаимоисключающие условия,**

**на 2-ой – определяется исход,
когда имеет место одно из условий**

Пример. Имеются 3 урны
с белыми и черными шарами.
Шар можно вынуть случайным образом
из одной из них.

Какова вероятность того,
что извлеченный наугад шар **белый**,
если
в 1-ой урне 2 белых и 3 черных шара,
во 2-ой 4 белых и 1 черный,
в 3-ей – 3 белых шара?

1) **Выбор урны (условий) – это**

гипотеза $\mathbf{H_j}$ **,**

что шар берется из j-ой урны

(*hypothesis*, предположение).

События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу:
они несовместны (альтернативны),
одно из них обязательно произойдет →

$$H_1 + H_2 + H_3 = \Omega,$$

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

Выбор случайный →

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$$

1) **Выбор урны (условий) – это *гипотеза* H_j что шар берется из j-ой урны (*hypothesis*, предположение).**

События H_1, H_2, H_3 образуют полную группу: они несовместны (альтернативны), одно из них обязательно произойдет →

$$H_1 + H_2 + H_3 = \Omega,$$

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1.$$

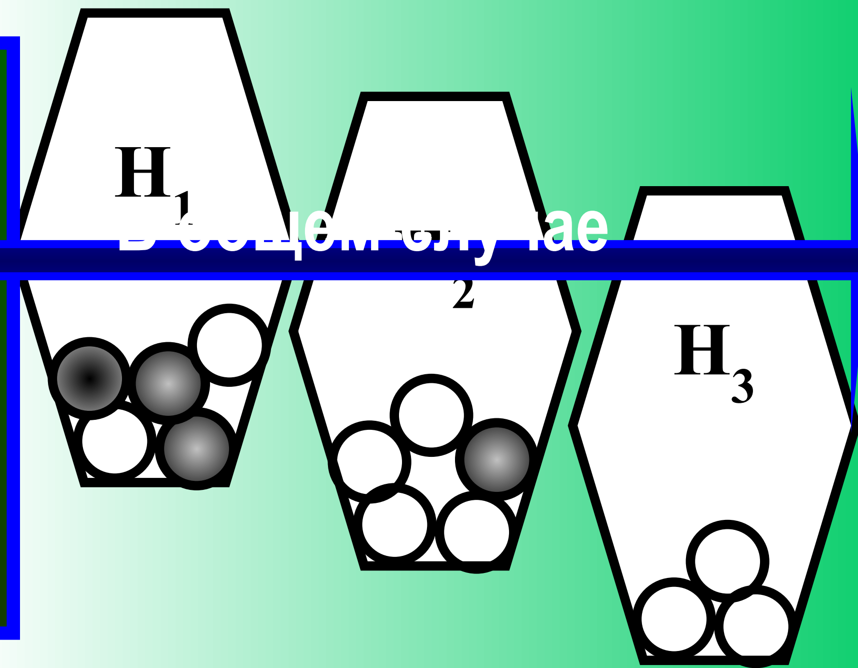
Выбор случайный →

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$$

2) Выбор белого из j-ой

A_j – это выбор и j-ой урны, и белого шара из нее → по правилу умножения

$P(A_j) = P(H_j) \cdot P(A/H_j)$.



По правилу сложения

$$P(A) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)$$
$$= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3)$$

Вероятность вынуть белый шар

$$P(A) = 1/3 \cdot (2/5 + 4/5 + 3/3) = 11/15$$

Если об условиях эксперимента можно сделать k исключающих друг друга предположений – гипотез $H_1, H_2, \dots, H_k$, и событие A может иметь место при одной из этих гипотез, то вероятность события A определяется по формуле *полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(H_j) \cdot P(A / H_j)$$

Абсолютная, безусловная **вероятность события в эксперименте с гипотетическими условиями рассчитывается как сумма произведений вероятностей гипотез на условную вероятность события при соответствующей гипотезе**

Пример

Нормальный режим работы устройства наблюдается в 80% случаев, в 20% – режим аномальный.

Вероятность отказа устройства (A) в 1-ом режиме 0.1, во 2-ом – 0.7

Где гипотезы, где условные вероятности?

Безусловная вероятность отказа, независимо от того, в каком режиме он произошел:

$$P(A) = 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.7 = 0.22$$

В условиях предыдущей задачи пусть событие имело место – устройство прекратило работу. Какова вероятность что отказ произошел в нормальном р

$$P(H_j/A)=\frac{P(H_j)P(A/H_j)}{P(A)}=\frac{P(H_j)P(A/H_j)}{\sum_{j=1}^{k}P(H_j)P(A/H_j)}$$

Для ответа на подобные вопросы используется
формула Байеса
(для вероятностей гипотез)

Доля, шансы гипотезы в наступлении А

В общем случае

Пусть А может произой… при наступлении одного

…ри

…H_k

Какова вероятность случайно встретить в дверях длинноволосую студентку, если у 15 из 40 студенток в аудитории короткая стрижка?

Если до опыта вероятности гипотез были

$P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_k)$,

а в результате опыта событие А произошло,

то «новые» *условные* вероятности гипотез

рассчитываются по *формуле Байеса*

The End

В «примере с устройством»:

вероятность того, что отказ случился при работе в нормальном режиме, равна

$$P(H_1/A) = 0.8 \cdot 0.1 / [0.22 = 0.8 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.7] = 0.36$$