Представление информации в памяти ЭВМ

Системы счисления

Число – это некоторая величина

Система счисления – это способ записи чисел с помощью цифр

Непозиционная – количественный эквивалент («вес») цифры не зависит от её положения в записи числа

CDXLIV

Позиционная – количественный эквивалент («вес») цифры зависит от её положения в записи числа

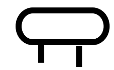
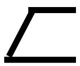
444

Непозиционные системы счисления

Единичная (унарная)

Египетская  единицы  сотни

 десятки  тысячи

2376 =   - 1/10  - 2/3  - 1/2

алфавитные системы

римская 1-I, 5-V, 10-X, 50-L, 100-C, 500-D, 1000-M

444

400 40 4

D - C (L – X) (V – I)

CDXLIV

1986

1000 + 900 + 50 + 30 + 6

M + (M-C) + L + (X + X + X) + V + I

MCMLXXXVI

Позиционные системы счисления

Индийская мультипликативная система

X – десятки
Y - сотни

323 $\longrightarrow$ 3Y2X3

Десятичная, двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная и др.

Основные достоинства любой позиционной системы

1. Простота выполнения арифметических действий
2. Ограниченное количество символов, необходимых для записи числа

Любое число в любой системе счисления можно представить с помощью развёрнутой формулы числа:

$$A = \pm(a_{n-1} g^{n-1} + a_{n-2} g^{n-2} \ldots a_0 g^0 + a_1 g^{-1} + a_2 g^{-2} \ldots a_m g^{-m})$$

A – само число
g - основание системы счисления
a - цифры данной системы счисления
n - число разрядов целой части числа
m - число разрядов дробной части числа

Во всех позиционных системах счисления арифметические операции выполняются по одним и тем же правилам:

1. справедливы одни и те же законы арифметики: коммутативный, ассоциативный, дистрибутивный;

   Коммутативный закон: ***а+в=в+а***

   Ассоциативный закон: ***а+(в+с)=(а+в)+с***

   Дистрибутивный закон: ***(а+в)с=ас+вс***

2. справедливы правила сложения, вычитания, умножения и деления столбиком;
3. правила выполнения арифметических операций опираются на таблицы сложения и умножения.

	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Перевод чисел из любой системы счисления в десятичную

Алгоритм

1. Представить число в развёрнутой форме. При этом основание системы счисления должно быть представлено в десятичной системе счисления

2. Найти сумму ряда. Полученное число является значением числа в десятичной системе счисления

Пример: $\mathbf{1101_2 \rightarrow A_{10}}$

1) $\mathbf{1101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0}$

2) $\mathbf{2^3 + 2^2 + 0 + 2^0 = 8+4+0+1 = 13_{10}}$

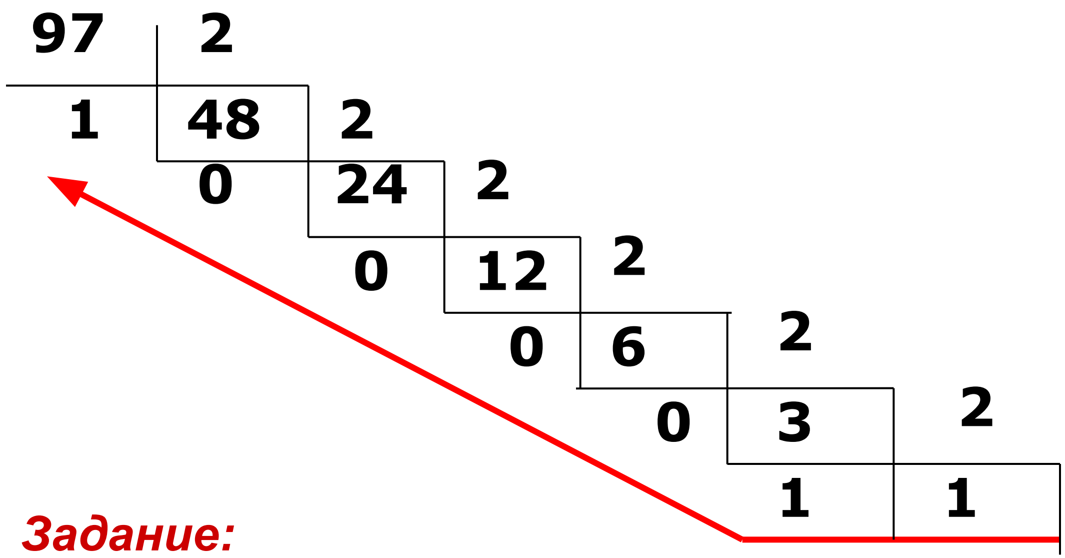
Задание:

Перевести в десятичную систему числа:

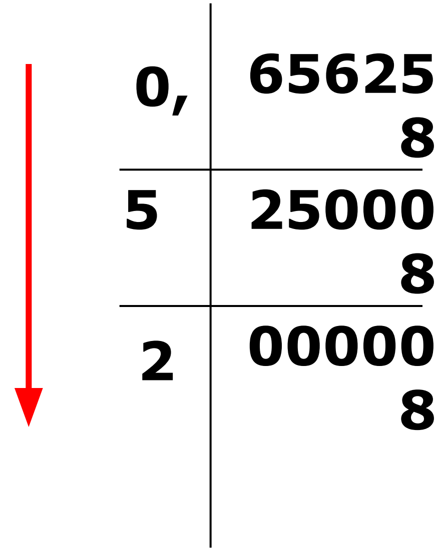
$1111_2 = 15_{10}$ $1111_5 = 156_{10}$ $1111_3 = 40_{10}$

Перевод чисел из десятичной системы счисления любую другую

Целое число



Дробное число



Задание:

Перевести число 356_{10}:

в восьмеричную $=544_8$

в двоичную $=101100100_2$

в пятеричную $=2411_5$ системы счисления

Системы счисления, используемые в ЭВМ

A_{10}	A_2	A_8	A_{16}
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Системы счисления, используемые в ЭВМ (с основанием 2^m)

Алгоритм перевода целых двоичных чисел в системах счисления с основанием с основанием 2^m

1. Двоичное число разбить справа налево на группы по n разрядов в каждой

2. Если в левой последней группе окажется меньше n разрядов, то её надо дополнить слева нулями до нужного числа разрядов

3. Рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать её соответствующей цифрой в системе счисления с основанием q=2n

$$\underbrace{001}_{1}\underbrace{100}_{4}\underbrace{101}_{5}\underbrace{001}_{1}\underbrace{101}_{5}\underbrace{010}_{2}\underbrace{111}_{7}{}_2 \longrightarrow A_8 \quad q=8=2^3$$

$$\underbrace{0110}_{6}\underbrace{0101}_{5}\underbrace{0011}_{3}\underbrace{0101}_{5}\underbrace{0111}_{7}{}_2 \longrightarrow A_{16} \quad q=16=2^4$$

Используя таблицу, перевести:

1. $10001101011001_2 \rightarrow A_8 \rightarrow A_{16}$ $= 21531_8 = 2359_{16}$

2. $4AC2_{16} \rightarrow A_2 \rightarrow A_8$ $= 100101011000010_2 = 45302_8$

3. $713_8 \rightarrow A_2 \rightarrow A_{16}$ $= 111001011_2 = 1CB_{16}$

Двоичная система счисления

Сложение

```
  101110101
+   1101101
  ---------
  111100010
```

Вычитание

```
  101110101
-   1101101
  ---------
  100001000
```

Умножение

```
     101110101
   x      1101
   -----------
     101110101
       101110101
      101110101
  --------------
    1001011110001
```

Деление

```
101101 |101
101    |----
----     1001
  0101
   101
   ---
     0
```

Решить:

1. Произвести сложение, вычитание, умножение и деление двоичных чисел 1010_2 и 11_2
2. Сложить восьмеричные числа 5_8 и 4_8, 17_8 и 41_8
3. Сложить числа 10_2 и 4_8
4. Прочитать число: MMIX
5. Записать число 3974 в римской системе счисления

Ответы:

1. 1101_2, 111_2, 100110_2, 11_2 и 1 в остатке.
2. 11_8, 60_8.
3. 110_2
4. 2009
5. MMMCMLXXIV

Представление чисел в ЭВМ

Решение проблем математического моделирования в естественных науках, экономике и технике, работа с САПР, электронными таблицами невозможна без использования вещественных (действительных) чисел.

Все числовые данные хранятся в памяти компьютера в двоичном виде, т. е. в виде последовательностей нулей и единиц, однако формы хранения целых и вещественных чисел **различны.**

Необходимость различного представления целых и вещественных чисел вызвана тем, что скорость выполнения операций над целыми числами существенно выше, чем над вещественными числами.

Текстовая, графическая, звуковая информация, количество деталей, акций, сотрудников – эти и многие другие данные выражаются **целыми числами**.

Для решения математических и физических задач, в которых невозможно обойтись только целыми числами, используются **вещественные числа**.

Границы представления целых чисел

Целые числа могут быть представлены как **беззнаковые** - только неотрицательные, и как **знаковые** – положительные и отрицательные.

В зависимости от количества разрядов ячейки памяти границы представления целых чисел будут различными.

Разрядность	**8**	**16**	**32**
Минимум (без знака)	**0**	**0**	**0**
Максимум (без знака)	**255**	**65 535**	**4 294 967 295**
Минимум (со знаком)	**- 128**	**- 32 768**	**- 2 147 483 648**
Максимум (со знаком)	**127**	**32 767**	**2 147 483 647**

Представление целых чисел

Целые числа, как знаковые, так и беззнаковые, хранятся в формате с **фиксированной точкой**.

При таком представлении чисел все разряды ячейки, кроме знакового, если он есть, служат для изображения разрядов числа.

Причем каждому разряду ячейки соответствует один и тот же разряд числа. Именно поэтому такое представление называется с фиксированной точкой, так как **фиксируется место десятичной точки** перед определенным разрядом.

Для целых чисел десятичная точка находится после младшего разряда, то есть **вне разрядной сетки**.

Форматы представления целых чисел

При представлении **беззнаковых** чисел все разряды ячейки отводятся под представление разрядов самого числа.

Минимальное
0

0	0	0	0	0	0	0	0

Максимальное
255

1	1	1	1	1	1	1	1

В случае представления **знаковых** целых чисел старший (левый) разряд ячейки отводится под хранение знака числа. В этот разряд заносится 0, если число положительное и 1 – если число отрицательное. Поскольку для хранения разрядов самого числа количество разрядов ячейки уменьшается на единицу, границы представления уменьшаются в два раза.

Максимальное знаковое число 127

0	1	1	1	1	1	1	1

Минимальное знаковое число -128

1	1	1	1	1	1	1	1

Почему минимальное знаковое число в 8-разрядной ячейке –128, а максимальное +127?

Прямой код числа

Представление в форме «знак» - «величина», когда старший разряд ячейки отводится под знак, называется **прямым кодом** двоичного числа.

Число $\mathbf{1001_2}$

0	0	0	0	1	0	0	1

Положительные числа в ЭВМ всегда представляются с помощью прямого кода. Прямой код числа полностью совпадает с записью самого числа в ячейке памяти машины.

Для получения обратного кода числа все значения инвертируются.

1	1	1	1	0	1	1	0

Для положительного числа

Дополнительный код = прямому коду.

<u>*Например*</u>: Дано число $\mathbf{1001_2}$. Записать его для 8-разрядной ячейки.

прямой код =

0	0	0	0	1	0	0	1

дополнительный код =

0	0	0	0	1	0	0	1

Дополнительный код

Отрицательные целые числа представляются в ЭВМ с помощью **дополнительного кода**.

Число 243 в одном байте будет выглядеть так:

Число $\mathbf{243_{10}}$								
	1	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**

Но если эту запись рассматривать как запись числа со знаком, значением записи будет число -115_{10}

Дополнительный код позволяет заменить арифметическую операцию вычитания операцией сложения, что значительно упрощает работу процессора и увеличивает его быстродействие.

Дополнительный код отрицательного числа

Дополнительный код отрицательного числа $\mathbf{m = 2^k - |m|}$, где **k** – количество разрядов в ячейке,

$|m| < 2^k$

Дополнительный код отрицательного числа – это **дополнение |m| до 2^k.**

Если $\mathbf{k=8,\ |m|=01100101_2}$, то **дополнительный код** можно получить

как разность $\mathbf{100000000_2 - 01100101_2 = 00011011_2 \rightarrow 10011011_2}$

Или $\mathbf{01100101_2 + 00011011_2 = 100000000_2}$ **(155+101=256)**

Алгоритм получения дополнительного кода отрицательного числа в n двоичных разрядах:

1. Модуль числа записать в прямом коде в n двоичных разрядах.
2. Получить обратный код числа.
3. К полученному обратному коду прибавить единицу.

Например: записать дополнительный код отрицательного числа -2002 для 16-разрядного компьютерного представления.

Прямой код: $|-2002_{10}| = 2002_{10} = 0000011111010010_2$

Обратный код: 1111100000101101_2

$+1$

Дополнительный код: 1111100000101110_2

Нормализованная запись чисел

Недостатком представления чисел с фиксированной точкой является небольшой диапазон представляемых величин, недостаточный для решения математических, физических, экономических и других задач.

Вещественные (дробные) числа хранятся и обрабатываются в компьютере в формате с **плавающей точкой**. Формат чисел с плавающей точкой базируется на экспоненциальной форме записи, в которой может быть представлено любое число.

$A=m*q^n$ где m – мантисса числа
q - основание системы счисления
n- порядок числа

Для единообразия представления чисел с плавающей точкой, используется нормализованная форма, при которой мантисса отвечает условию:

$$1/ n \le |m| < 1$$

Это означает, что мантисса должна быть правильной дробью и иметь после запятой цифру отличную от нуля.

Примеры нормализации чисел:

1) $3.1415926=0.31415926 \bullet 10^1$
2) $1000=0.1 \bullet 10^4$
3) $-0.123456789=-0.123456789 \bullet 10^0$
4) $0.0000107_8=0.107_8 \bullet 8^{-4}$
5) $1000.0001_2=0.10000001_2 \bullet 2^4$
6) $-0.0001101_2=-0.1101_2 \bullet 2^{-3}$

Запись нуля считается нормализованной, если и мантисса, и порядок равны нулю, т. е. $\mathbf{0 = 0.0 \bullet 10^0}$

Числа в формате с плавающей точкой занимают в памяти компьютера 4 (число обычной точности) или 8 байтов (число двойной точности).

Компьютерное представление вещественных чисел

Как и для целых чисел, при представлении вещественных чисел используется двоичная система счисления, поэтому предварительно <u>число должно быть переведено в двоичную систему</u>.

При представлении чисел с плавающей точкой в разрядах ячейки отводится место для знака числа, знака порядка, абсолютной величины порядка, абсолютной величины мантиссы.

знак числа (-)

абсолютная величина порядка (13)

1	0	00001101	101101100001011100110

знак порядка (+)

абсолютная величина мантиссы (5826486)

В ячейке записано отрицательное двоичное число –1011011000010.1110011

В десятичном представлении это будет число –5826.486

Контрольные задания

1. Как будут представлены в 8-битном знаковом типе числа:
а) –1; б) –10; в) –120; г) –102;

2. Запишите следующие двоичные числа в прямом, обратном и дополнительном коде для 8-разрядной ячейки:
а) –1000; б) –11101; в) –1; г) –1111111;

3. Приведите к нормализованному виду числа, оставляя их в тех же системах счисления, в которых они записаны:
а) -0.000001011101_2; б) 987654321_{10}; в) 100.01_2; г) -0.001502_8;

4. Запишите в естественной форме с фиксированной запятой следующие нормализованные числа:
а) $0.1011_2 \cdot 2^1$; б) $0.1011_2 \cdot 2^{11}$;
в) $0.12345_{10} \cdot 10^{-3}$; г) $-0.40065_8 \cdot 8^{-4}$;